Domácí úkol z 9. května 2013

Nechť $\theta, \theta' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$, $\theta \sim \theta'$. Tedy vyjádření θ a θ' řetězovými zlomky jsou od jistého místa stejná, přesněji: označíme-li $\theta = [a_1, a_2, \dots]$, $\theta' = [a'_1, a'_2, \dots]$, pak existují $\ell, m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{\ell+n} = a'_{m+n}$.

Označme dále $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ (resp. $(p'_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(q'_n)_{n=1}^{\infty}$) posloupnosti konstruované větou 2 pro θ (resp. θ'), platí tedy

$$\begin{aligned} p_0 &= 1,\ q_0 = 0,\ p_1 = 0,\ q_1 = 1, \\ p_{n+1} &= a_n p_n + p_{n-1}, \\ q_{n+1} &= a_n q_n + q_{n-1}, \\ p'_0 &= 1,\ q'_0 = 0,\ p'_1 = 0,\ q'_1 = 1, \\ p'_{n+1} &= a'_n p'_n + p'_{n-1}, \\ q'_{n+1} &= a'_n q'_n + q'_{n-1}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $\phi_n = \frac{q_n}{q_{n+1}}$, $\phi'_n = \frac{q'_n}{q'_{n+1}}$ a $x_n = |\phi_{\ell+n} - \phi'_{m+n}|$.

Připomeňme, že pro libovolné $\theta \in \mathbb{R}$ značíme

$$\nu(\theta) = \liminf_{q \to \infty} q \cdot \|q\theta\| = \liminf_{n \to \infty} q_n \cdot \|q_n \theta\|.$$

1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\phi_{n+1}^{-1} = a_{n+1} + \phi_n$ a $\phi_n \phi_{n+1} < \frac{1}{2}$.

   [Návod: užijte rekurentní vztah pro q_{n+2} a to, že $q_{n+1} > q_n$ a $a_{n+1} \in \mathbb{N}$.]

2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $x_n = x_{n-1} \phi_{\ell+n} \phi'_{m+n}$.

   [Návod: užijte bod 1 a rovnost $a_{\ell+n} = a'_{m+n}$.]

3. Dokažte, že $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$.

   [Návod: užijte body 1 a 2 a ukažte, že $x_{n+1} < \frac{1}{4} x_{n-1}$.]

4. Dokažte, že $\nu(\theta) = \nu(\theta')$.

   [Návod: užijte bod 3 a rovnost (20) z přednášky, podle které platí $q_n \cdot \|q_n \theta\| = (\phi_{n-1} + a_n + [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots])^{-1}$.]