

## Diskrétní deterministické modely – cvičné písemky

1. Najděte řešení počáteční úlohy

$$x(t+1)^2 - (2+t)x(t+1)x(t) + 2tx(t)^2 = 0, \quad x(1) = 1.$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - x(t) = 2^t t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} H(t+1) &= rH(t) \exp(-aP(t)), \\ P(t+1) &= cH(t) [1 - \exp(-aP(t))]; \end{aligned}$$

parametry  $r$ ,  $a$  a  $c$  jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

---

### Řešení:

1. Dvě řešení:  $x_1(t) = 2^{t-1}$ ,  $x_2(t) = (t-1)!$
2.  $x(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{2^5} 2^t (8 - 5t) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
3.
  - $r \leq 1$  rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje
  - $r > 1$  rovnovážný bod  $\left(\frac{1}{ac} \frac{r \ln r}{r-1}, \frac{\ln r}{a}\right)$  je nestabilní

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+1) = \frac{2x(t) + 4}{x(t) - 1}.$$

2. Najděte řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 7x(t+1) + 6x(t) = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = -\frac{7}{125}.$$

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) \exp\left(r(1-x(t)) - y(t)\right), \\ y(t+1) &= \alpha x(t) \left(1 - \exp(-y(t))\right); \end{aligned}$$

oba parametry  $r$  a  $\alpha$  jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

**Řešení:**

$$1. \quad x(t) = 1 - \frac{2(4-x_0)}{4-x_0+(1+x_0)\left(-\frac{3}{2}\right)^t} + \frac{3(1+x_0)}{1+x_0+(4-x_0)\left(-\frac{2}{3}\right)^t}$$

$$2. \quad x(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{50}t^2 - \frac{27}{750}t$$

3. •  $\alpha \leq 1$  rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje

•  $\alpha > 1$  rovnovážný bod je  $\left(1 - \frac{y^*}{r}, y^*\right)$ , kde  $y^*$  je jediné kladné řešení rovnice

$$\frac{r}{\alpha} \frac{y}{r-y} = 1 - e^{-y}.$$

• Pokud

$$\left|1 + \frac{\alpha}{r}(r-y^*) - r\right| - 1 < \frac{1}{r}(1-r+y^*)(\alpha r - (\alpha+r)y^*) - y^* < 1$$

pak je  $\left(1 - \frac{y^*}{r}, y^*\right)$  asymptoticky stabilní,

• Pokud

$$\left|1 + \frac{\alpha}{r}(r-y^*) - r\right| - 1 \geq \frac{1}{r}(1-r+y^*)(\alpha r - (\alpha+r)y^*) - y^*$$

$$\text{nebo } \frac{1}{r}(1-r+y^*)(\alpha r - (\alpha+r)y^*) - y^* \geq 1$$

pak je  $\left(1 - \frac{y^*}{r}, y^*\right)$  nestabilní.