Modely CAPM a APT

Miroslav Beran

06.03.2013, Brno

Obsah

Úvod

- CAPM - model oceňovania kapitálových aktív vznikol v 60. rokoch - niekoľko ekonónov publikovalo nezávisle na sebe články o CAPM, ktoré vychádzali z práce Harryho Markowitza
- za zmienku stojí článok W. Sharpeho „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk“
- s CAPM súvisí priamka kapitálového trhu - CML a priamka cenného papiera - SML
- vo vývoji teórie portfolia nasleduje arbitrážna teória oceňovania - APT, ktorú odvodil S. A. Rosse vo svojej práci „The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing“ z roku 1976

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom
4. investori majú odpor k riziku, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom
4. investori majú odpor k riziku, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom
5. jednotlivé aktiva sa dajú ľubovolne deliť, t. j. je možné kúpiť i kúsok akcie

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom
4. investori majú odpor k riziku, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom
5. jednotlivé aktiva sa dajú ľubovolne deliť, t. j. je možné kúpiť i kúsok akcie
6. existuje bezrizikové aktivum so sadzbou r_f

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom
4. investori majú odpor k riziku, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom
5. jednotlivé aktiva sa dajú ľubovolne deliť, t. j. je možné kúpiť i kúsok akcie
6. existuje bezrizikové aktivum so sadzbou r_f
7. zanedbávame dane, poplatky a dalšie transakčné náklady

Model CAPM - Předpoklady

1. investori investujú v jednom určitom časovom období
2. investori hodnotia portfolio podľa očakávaného výnosu a očakávaného rizika
3. platí predpoklad nenasýtenosti investorov, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným rizikom si vyberú to s vyšším výnosom
4. investori majú odpor k riziku, t. j. z dvoch portfolií s rovnakým očakávaným výnosom si vyberú to s nižším rizikom
5. jednotlivé aktiva sa dajú ľubovolne deliť, t. j. je možné kúpiť i kúsok akcie
6. existuje bezrizikové aktivum so sadzbou r_f
7. zanedbávame dane, poplatky a dalšie transakčné náklady
8. investori sú si rovní

Model CAPM - Předpoklady

- Čo to znamená, že investori sú si rovní?

Model CAPM - Předpoklady

- Čo to znamená, že investori sú si rovní?
  1. všetci investori majú rovnaké jedno obdobie (horizont)

Model CAPM - Předpoklady

- Čo to znamená, že investori sú si rovní?
  1. všetci investori majú rovnaké jedno obdobie (horizont)
  2. bezriziková sadzba je pre všetkých investorov rovnaká

Model CAPM - Předpoklady

- Čo to znamená, že investori sú si rovní?
  1. všetci investori majú rovnaké jedno obdobie (horizont)
  2. bezriziková sadzba je pre všetkých investorov rovnaká
  3. informácie sú voľné a okamžite dostupné všetkým investorom rovnako

Model CAPM - Předpoklady

- Čo to znamená, že investori sú si rovní?
  1. všetci investori majú rovnaké jedno obdobie (horizont)
  2. bezriziková sadzba je pre všetkých investorov rovnaká
  3. informácie sú voľné a okamžite dostupné všetkým investorom rovnako
  4. investori majú homogenné očakávania, t. j. majú rovnako odhadnuté očakávané výnosnosti, riziká a kovariancie cenných papierov

- je zrejmé, že tieto predpoklady splňuje len modelovaný trh
- na ich základe môžeme analyzovať chovanie investorov, ale tiež aj ceny jednotlivých cenných papierov
- ak predpokladáme, že všetci investori postupujú rovnako, môžeme z pozorovania ich chovania odvodiť rovnovážny vzťah medzi výnosom a rizikom jednotlivých cenných papierov na trhu

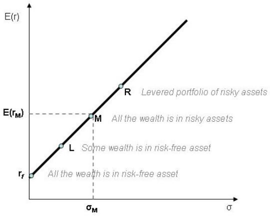
Relatívna tržná hodnota cenného papiera

- označme c_i tržnú cenu i-tého CP, s_i celkový počet kusov i-tého CP emitovaných k obchodovaniu na trhu
- agregovaná tržná hodnota CP i bude $A_i = c_i \cdot s_i$
- uvažujme ďalej, že na trhu existuje N cenných papierov s agregovanými tržnými hodnotami A_j, $j = 1, \ldots, N$
- potom relatívnu tržnú hodnotu i-tého CP R_i definujeme

$$R_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{N} A_j}$$

- relatívna tržná hodnota je teda rovná agregovanej tržnej hodnote cenného papiera delené sumou agregovaných tržných hodnôt všetkých cenných papierov

- reprezentuje rovnovážny stav medzi očakávanou výnosnosťou a smerodatnou odchýlkou efektívnych portfolií



$$\overline{r}_p = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

Model CAPM - CML

- $\overline{r}_p$ - očakávaná výnosnost portfolia
- r_M - očakávaná výnosnosť tržného portfolia
- r_f - očakávaná výnosnosť bezrizikového aktiva
- σ_M - riziko trhu, σ_p - riziko portfolia
- efektívna množina je tvorená polopriamkou vychádzajúcou z bodu $[0, r_f]$ a prechádzajúca bodom $M = [\sigma_M, r_M]$
- táto priamka sa označuje ako **priamka kapitálového trhu - CML**

- V CAPM vlastní každý investor tržné portfolio a zaujíma sa o jeho smerodatnú odchýlku, pretože tá ovplyvní veľkosť jeho investície do tržného portfolia

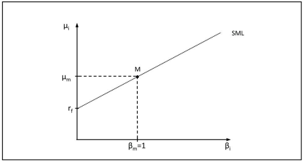
$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{iM} X_{jM} \sigma_{ij}}$$

- X_{iM} a X_{jM} sú váhy investované do cenných papierov i a j v tržnom portfoliu
- príspevok každého cenného papiera ku smerodatnej odchýlke tržného portfolia závisí na veľkosti jeho kovariancie s tržným portfoliom

$$\sigma_{jM} = \sum_{i=1}^{n} X_{iM} \sigma_{ij}$$

Model CAPM - SML

- vzťah medzi kovarianciou a očakávanou výnosnosťou je známy ako **priamka cenného papiera - SML**
- využíva sa v rámci daného kapitálového trhu na stanovenie strednej výnosnosti alebo rizika individuálneho aktiva (predovšetkým akcie)



$$\overline{r}_i = r_f + \frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \sigma_{iM}$$

Model CAPM - SML

- $\overline{r}_i$ - očakávaná výnosnost i-tého cenného papiera
- r_M - očakávaná výnosnosť tržného portfolia
- r_f - očakávaná výnosnosť bezrizikového aktiva
- σ_M^2 - rozptyl trhu, σ_{iM} - kovariancia i-tého cp a trhu
- na rozdiel od CML rozlišuje tržné (systematické) a jedinečné (nesystematické) riziko - to umožňuje oceniť jednotlivé aktiva na základe pohybu tržného indexu

Model CAPM - SML

- iný spôsob ako sa dá vyjadriť priamka SML je pomocou bety (faktor beta)

$$\overline{r}_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i$$

- beta je vlastne alternatívny spôsob ako vyjadriť kovariančné riziko cenného papiera

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

- beta môže nadobudnúť rôzne hodnoty
  - (i) $\beta > 1$ - cp agresívny, výnos kolísa rýchlejšie ako trh
  - (ii) $\beta < 1$ - cp defenzívny, výnos kolísa menej ako trh
  - (iii) $\beta = 1$ - cp neutrálny, výnos kolísa spoločne s trhom

Ohodnotenie cenných papierov

- mnoho investorov vyhľadáva cenné papiere, ktoré sa zdajú byť nesprávne ohodnotené
  1. CP je podhodnotený, ak je jeho očakávaná výnosnosť vyššia ako predpokladaná - leží nad SML
  2. CP je nadhodnotený, ak je jeho očakávaná výnosnosť nižšia ako predpokladaná - leží pod SML
- porovnávame očakávané výnosnosti cenných papierov $\overline{r_i}$ s rovnovážnou očakávanou výnosnosťou $\overline{r_i}^e$, to je taká, ktorá by mala byť, keby bol cenný papier ohodnotený správne (ležal na SML)

- určujeme hodnotu $\delta_i = \overline{r_i} - \overline{r_i}^e$, teda rozdiel medzi očakávanou a rovnovážnou výnosnosťou
  a) ak je $\delta > 0$, leží CP nad SML a je podhodnotený
  b) ak je $\delta < 0$, leží CP pod SML a je nadhodnotený
  c) ak je $\delta = 0$, leží CP na SML a je správne ohodnotený
- z toho teda vyplýva, že je nutné nakupovať cenné papiere, ktoré ležia nad priamkou SML a predávať tie, ktoré ležia pod priamkou SML a je nutné držať tie cenné papiere, ktoré ležia na priamke SML

Faktorové modely

- poukazujú na to, že výnosnosť cenných papierov je citlivá na zmenu určitých faktorov
- **makroekonomické faktory:** inflácia, neočakávané zmeny úrokových sadzieb, výnos tržného portfolia, rast HDP
- **mikroekonomické faktory:** prírodné podmienky, vojnové konflikty
- tieto modely môžeme rozdeliť na jedno resp. viacfaktorové
- APT je faktorový model

Model APT

- arbitráž - obchody, ktoré využívajú cenové rozdiely na dosiahnutie zisku
- tento spôsob sa používal často, ale v súčasnej dobe pri rozvinutých informačných sieťach sa používa už len veľmi zriedka
- model APT je však založený na zákone jednej ceny, t. j. dva rovnaké statky nemôžu byť predávané za odlišné ceny
- APT predpokladá, že výnosnosť každej akcie je v lineárnom vzťahu k množine faktorov, ktoré sú charakterizované faktorovým indexom

Model APT

- môžeme teda písať

$$r_i = a_i + b_{i_1} \cdot I_1 + \cdots + b_{i_j} \cdot I_j + e_i$$

- kde a_i je očakávaná výška výnosnosti akcie i za predpokladu, že sú všetky faktory rovné 0
- I_j je hodnota j-tého faktoru, ktorý ovplyvňuje výnosnosť akcie i
- b_{i_j} je citlivosť výnosnosti i-tej akcie na j-tý faktor
- e_i je náhodná chyba s nulovou strednou hodnotou a rozptylom $\sigma^2_{e_i}$

Model APT

- ďalej predpokladáme, že náhodné chyby i-tej a j-tej akcie, náhodná chyba i-tej akcie a j-ty faktor a aj faktory medzi sebou su nekorelované
- APT je popis očakávanej výnosnosti za predpokladu, že výnosnosti akcií sú dané (generované) jedno alebo viacfaktorovým (indexovým) modelom
- APT je rovnovážny model

- ak investor drží dobre diverzifikované portfolio (má v ňom dostatočný počet cenných papierov), nesystematické riziko sa blíži k nule a význam má len riziko systematické (budú nás zaujímať len hodnoty „b“)
- ak budeme mať tri dobre diverzifikované portfolia, tak nám potom tieto portfolia určujú rovinu, na ktorej ležia všetky portfolia, ktoré sú konštruované z týchto troch portfolií za predpokladu, že súčet váh jednotlivých portfolií, z ktorých konštruujeme nové portfolio, je rovný 1

Model APT

- ak by dáke portfolio neležalo v danej rovine, existovala by možnosť arbitráže, čo je vlastne dosiahnutie výnosu bez rizika
- arbitráže by prebiehali do tej doby, kým by sa portfolio pôvodne v danej rovine nenachádzajúce svojimi parametrami prispôsobilo parametrom danej roviny
- vďaka predpokladu APT (zákon jednej ceny - neexistencia arbitráže) nie je nutné nájsť všetky rizikové aktiva alebo tržné portfolio, aby sme APT mohli testovať
- APT je vhodné využiť pri hľadaní modelu chovania tých akcií, o ktoré sa investor zaujíma

- tak ako CAPM aj APT je rovnovážnym modelom
- CAPM vyžaduje dosť silné predpoklady o preferenciách investorov (výnosnosť, riziko, odpor k riziku), na druhej strane APT takéto predpoklady nerobí
- APT nie je založená na myšlienke, že všetci investori pozerajú na portfolio v zmysle očakávaných výnosností a smerodatných odchýliek, ale namiesto toho predpokladá, že investori dávajú prednosť vyššej výnosnosti pred nižšou úrovňou bohatstva

APT a CAPM

- v CAPM nie sú zohľadnené všetky faktory, čo môže obmedzovať vypovedajúcu schopnosť
- APT je schopný odstrániť niektoré nedostatky CAPM a nie je závislý na voľbe tržného portfolia
- v CAPM môžu nastať problémy napríklad s výpočtom faktoru beta, určením hodnoty r_M alebo s veľkosťou bezrizikovej výnosovej miery
- problémy s APT môžu nastať pri viac faktoroch, kedy je ťažké určiť najdôležitejšie faktory, ktoré ovplyvňujú výnosovú mieru

APT a CAPM

- dá sa ukázať, že APT je v zhode s CAPM
- najjednoduchšie za predpokladu, že výnosnosti sú generované jednofaktorovým modelom (tým jediným faktorom je tržné portfolio, t. j. $r_i = a_i + b_i \cdot r_M + e_i$) a existuje bezriziková investícia
- potom sa dá ukázať, že platí CAPM: $\overline{r}_i = r_f + (\overline{r}_M - r_f) \cdot \beta_i$
- platnosť sa dá samozrejme ukázať aj na viacfaktorových modeloch

Použité zdroje

1. Čámský, F.: *Teorie portfolia.* Masarykova univerzita v Brně, 2001. ISBN 80-210-2509-3.
2. Sharpe, W. F., Alexander, G. J.: *Investice.* Victoria Publishing Praha, 1994. ISBN 80-85605-47-3.
3. Študijné materiály predmetu *Teorie portfolia.*