Stacionární procesy

[MF006] Seminář z finanční matematiky

Jan Bernard

Masarykova univerzita

Náhodné procesy

Stacionární náhodné procesy

Stacionární procesy - příklady

ARIMA procesy

Náhodný proces

Definice (Stochastický proces)

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, indexová množina* $T \subseteq \mathbb{R}$ *a reálná funkce*

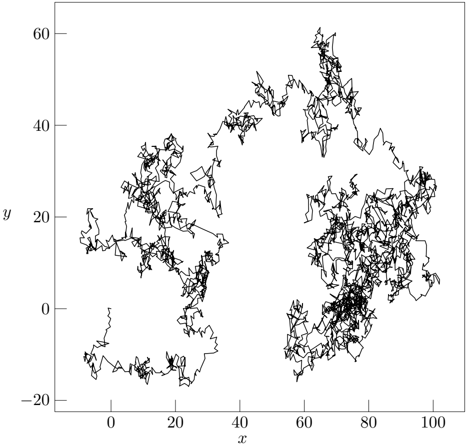
$$Y : \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

definovaná pro $\forall \omega \in \Omega$ *a* $\forall t \in T$*. Jestliže pro* $\forall t \in T$ *je* $Y(\omega, t)$ *borelovsky měřitelná funkce vzhledem k* $\mathcal{A}$ *(tj. pro* $\forall B \in \mathcal{B}$*,* $\forall t \in T$ *platí*

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{A},$$

kde $\mathcal{B}$ *je* σ*-algebra borelovských podmnožin), pak tuto funkci nazýváme (n-rozměrným) náhodným procesem a značíme* $\{Y_t, t \in T\}$*.*

Brownův pohyb (W.P.)



MATH MUNI

Stacionarita I

Definice (Striktní stacionarita)

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ *je striktně stacionární, jestliže* $\forall \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ *a pro* $\forall \boldsymbol{\tau} = (t_1 + h, \ldots, t_n + h) \in T^n$ *platí*

$$F_{\mathbf{t}}(\mathbf{X}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\tau_1,\ldots,\tau_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{X})$$

Při posunutí v čase se tedy základní pravděpodobnostní charakteristiky nemění.

Stacionarita II

Definice (Stacionarita ve střední hodnotě)

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ *nazýváme stacionární ve střední hodnotě, pokud* $\forall t \in T$ *je střední hodnota konstantní, tj.*

$$E(X_t) = \textit{konst.} = \mu.$$

Pokud $E(X_t) = 0$*, náhodný proces nazýváme centrovaným.*

Stacionarita III

Definice (Autokovarianční funkce)

Nechť náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ *má konečné druhé momenty. Pak funkci*

$$\gamma(s,t) = C(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)$$

nazveme autokovarianční funkcí.

Tato reálná funkce dvou proměnných dává informaci o lineárním vztahu mezi jakoukoliv dvojicí náhodných veličin X_t a X_s.

Stacionarita III

Definice (Kovariančně stacionární proces)

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá kovariančně stacionární, pokud pro $\forall s, t \in T$ platí

$$\gamma(s,t) = \gamma(0, |s-t|)\,.$$

Autokovarianční funkce závisí pouze na svých argumentech prostřednictvím rozdílu („časové vzdálenosti“).

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá **(slabě) stacionární**, je-li kovariančně stacionární, tj. $\forall t, s \in T : \gamma(s,t) = \gamma(s-t)$.

Bílý šum

Model

Náhodný proces $\{w_t, t \in T\}$ nazýváme bílý šum[a]*, jestliže platí*

$$E(w_t) = 0, \qquad VAR(w_t) = \sigma^2, \qquad \forall s, t, s \neq t: \; C(w_t, w_s) = 0,$$

[a] *WhiteNoise*

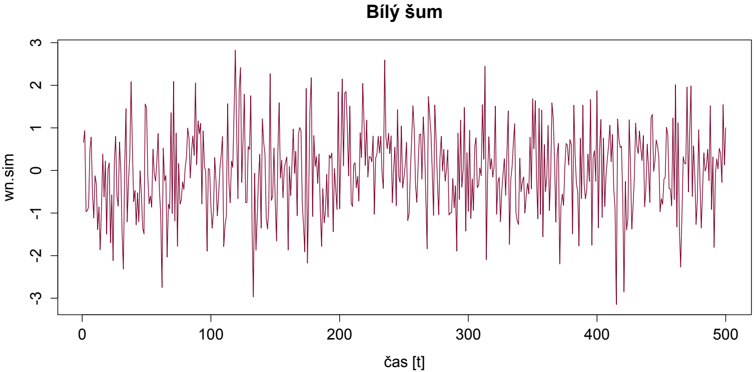
Tedy w_t jsou nekorelované náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem.

Pokud tyto náhodné veličiny i nezávislé, značíme je symbolem IID[1], píšeme

$$w_t \sim IID(0, \sigma^2).$$

[1] *IndependentIdenticalDefined*

Bílý šum



Bílý šum a IID jsou stacionárními náhodnými procesy.

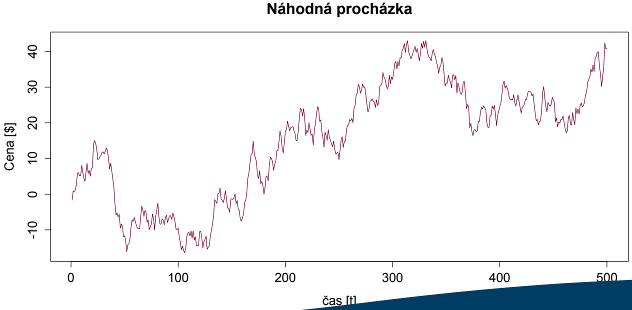
Náhodná procházka

Model

Mějme proces $\{X_t, t \in T\}$ a platí

$$X_0 = 0, \qquad X_t = X_{t-1} + w_t,$$

kde w_t jsou nezávislé náhodné veličiny $w_t \sim \mathcal{L}\left(0, \sigma_w^2\right)$.



Náhodná procházka

Je náhodná procházka stacionární proces? Připomeňme si model NP

$$X_t = X_{t-1} + w_t, \qquad w_t \sim \mathcal{L}\left(0, \sigma_w^2\right), X_0 = 0,$$

pak střední hodnota

$$\mathrm{E}\left(X_t\right) = \mathrm{E}\left(\sum w_i\right) = \sum \mathrm{E}\left(w_i\right) = 0$$

Proces je konstantní ve střední hodnotě. Dále počítejme autokovarianční funkci

$$\gamma(t+h, t) = C(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{t+h} w_i\right)\left(\sum_{t=1}^{t} w_i\right) = t\sigma_w^2,$$

ACF závisí na t. Náhodná procházka není stacionární proces.

Autokovarianční funkce

AFC udává lineární vztah mezi jakoukoliv dvojicí X_t a X_s. Platí

$$C(X_t, X_s) = C(X_s, X_t), \qquad \text{pak } \gamma(-t) = \gamma(t).$$

Pro rozptyl

$$\mathrm{VAR}(X_t) = C(X_t, X_t) = \gamma(t - t) = \gamma(0).$$

Všechny náhodné veličiny X_t mají tentýž konečný rozptyl.

V reálných situacích se se slabě stacionárními procesy setkáváme zřídkakdy. Obecně rozlišujeme dva druhy nestacionarity.

- ve střední hodnotě
- v rozptylu

Procesy nestacionární ve střední hodnotě

Rozlišujeme

- Deterministický trend
  Nestacionaritu ve střední hodnotě chápeme jako funkci času.
- Stochastický trend
  Nestacionaritu chápeme jako kolísání náhodné veličiny.

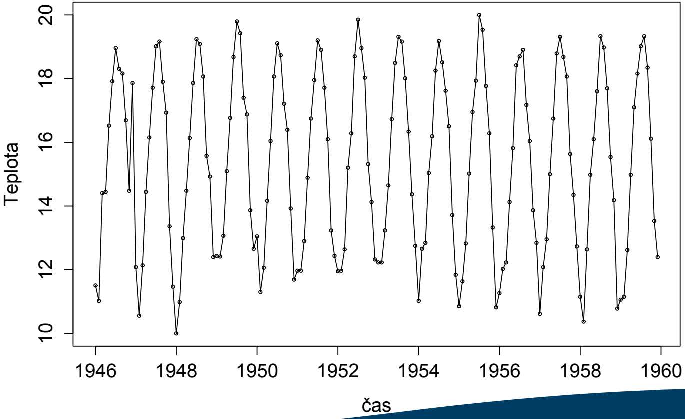
Deterministický trend

K modelování deterministického trendu použijeme například

- Polynomický trend: $f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_d t^d$
- Periodický trend: $f(t) = \mu + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j \cos(\lambda_j t) + \beta_j \sin(\lambda_j t))$

Periodický trend

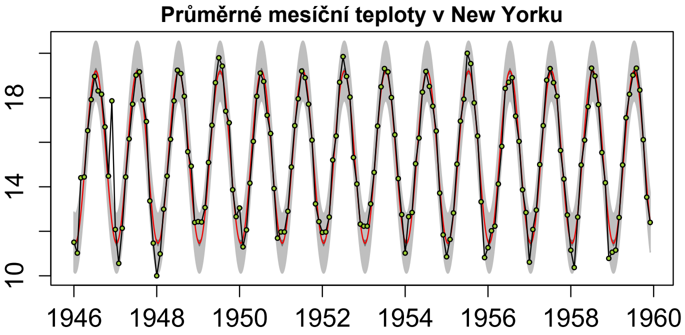
Mějme náhodný proces, u kterého je patrný deterministický trend, který lze modelovat pomocí po sobě jdoucích period.



Periodický trend

Model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t_i\right) + \beta_2 \cos\left(\frac{2\pi}{12} t_i\right)$$



Stochastický trend

- ARMA - Autoregresní proces klouzavých součtů
  $Y_t \sim ARMA(p,q) : \Phi(B)\, Y_t = \Theta(B)\, w_t$
- ARIMA - Integrovaná smíšený model
  $Y_t \sim \mathrm{ARIMA}(\mathrm{p}, \mathrm{d}, \mathrm{q}) : \ \Phi(B)(1-B)^d\, Y_t = \Theta(B)\, w_t$

Pozn. Jedná se o zkrácený zápis pomocí operátorů Φ, Θ a operátoru zpětného posunutí B.

Operátor zpětného posunutí

Definice (Operátor zpětného posunutí)

Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *je posloupnost náhodných veličin. Operátor zpětného posunutí je definován rovnicí*

$$BY_t = Y_{t-1},$$

přičemž jej lze aplikovat vícenásobně

$$B^j Y_t = Y_{t-j}.$$

AR proces

Časové řady mohou vykazovat korelaci s pozorováními té samé řady, proto AR procesy modelují dynamiku pomocí předchozích pozorování.

Definice (Autoregresní proces)

Náhodná posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *se nazývá autoregresní posloupnost řádu p, značíme* $\mathrm{AR}(p)$, *jestliže vyhovuje rovnici*

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \ldots - \varphi_p Y_{t-p} = w_t,$$

kde $w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ *jsou reálné konstanty a* $\varphi_p \neq 0$.

MA proces

Definice (Proces klouzavých součtů)

Náhodná posloupnost $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *se nazývá proces klouzavých součtů řádu* q*, značíme* MA (q)*, jestliže vyhovuje rovnici*

$$Y_t = w_t + \vartheta_1 w_{t-1} + \ldots + \vartheta_q w_{t-q},$$

kde $w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$*,* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ *jsou reálné konstanty a* $\vartheta_q \neq 0$*.*

Kauzalita AR procesu

AR proces $Y_t \sim AR(p)$ se nazývá kauzální, jestliže je ho možné zapsat jako proces $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j w_{t-j}$.

Kauzální AR proces je zároveň stacionární. Nutnou a postačující podmínkou kauzality AR procesu je, aby všechny kořeny polynomu

$$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \ldots - \varphi_p z^p$$

ležely vně jednotkové kružnice.
Důsledek: Proces AR(p) **nezávisí na budoucnosti**.

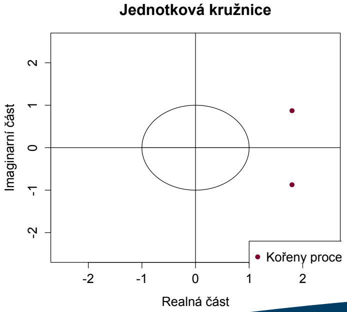
Příklad AR procesu

Model

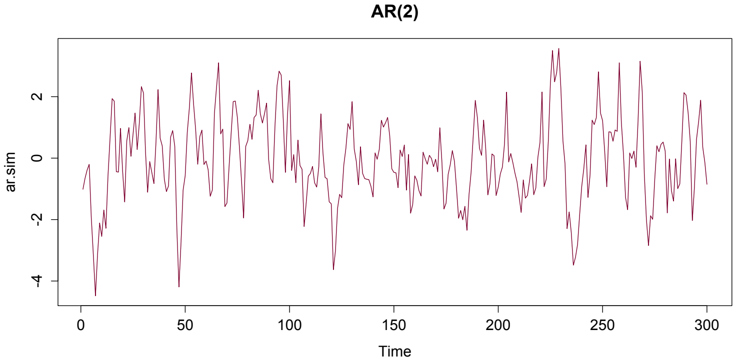
Mějme model

$$Y_t = 0,9Y_{t-1} - 0,25Y_{t-2} + w_t, \qquad w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$$

Vykreslíme si kořeny polynomu $\Phi(z)$ v komplexní rovině



Příklad AR procesu



$$Y_t = 0,9Y_{t-1} - 0,25Y_{t-2} + w_t, \qquad w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$$

Invertibilita MA procesu

Uvažujme MA model řádu q

$$Y_t = w_t + \vartheta_1 w_{t-1} + \ldots + w_{t-q}, \qquad w_t \sim WN(0, \sigma_w^2).$$

MA proces je vždy slabě stacionární. Nutnou a postačující podmínkou invertibility MA procesu je, aby všechny kořeny polynomu

$$\Phi(z) = 1 - \vartheta_1 z - \vartheta_2 z^2 - \ldots - \vartheta_q z^q$$

ležely vně jednotkové kružnice.
Důsledek: Je-li proces MA(q) invertibilní, pak je určen **jednoznačně** pomocí prvních dvou momentů a nepozorovatelné veličiny w_t můžeme odhadnout pomocí **minulých** a **přítomných** hodnot.

ARMA model

Definice (ARMA proces)

ARMA proces řádu p, q je definován vztahem

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \ldots - \varphi_p Y_{t-p} = w_t + \vartheta_1 w_{t-1} + \ldots + \vartheta_q w_{t-q},$$

kde $w_t \sim WN\left(0, \sigma_w^2\right)$.
Pomocí operátoru zpětného posunu můžeme také psát

$$Y_t \sim ARMA\left(p, q\right) : \Phi\left(B\right) Y_t = \Theta\left(B\right) w_t,$$

kde

$$\Phi\left(B\right) = 1 - \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \ldots + \varphi_p B^p, \qquad \varphi_0 \equiv 1$$

a

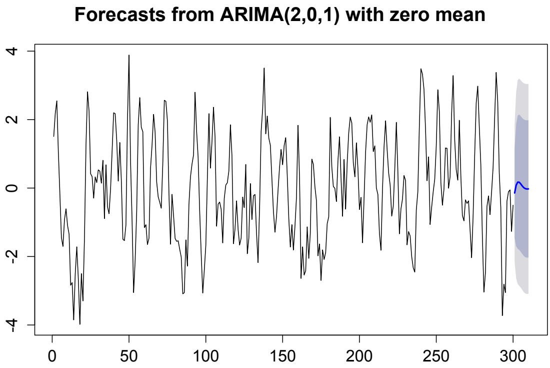
$$\Theta\left(B\right) = 1 - \vartheta_1 B + \vartheta_2 B^2 + \ldots + \vartheta_p B^q, \qquad \vartheta_0 \equiv 1.$$

Box-Jekninsova metodologie

Určení vhodného $ARMA(p,q)$ modelu pro danou realizaci stacionárního procesu $\{Y_t | t \in T\}$ zahrnuje následující kroky:

1. Výběr řádu p a q, tj. provést identifikaci modelu.
2. Odhad parametrů $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ a σ_w^2.
3. Ověření vhodnosti modelu.

ARMA s predikcí 10 kroků



Pozn. Jedná se v podstatě o ARMA model, protože $d = 0$.

Bibliografie

[1] FORBELSKÁ, Marie. *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*. Brno: Masarykova univerzita, 2009.

Děkuji za pozornost