Stochastický integrál, Itoova a Stratonovičova definice

Jitka Brabcová

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta

27. března 2013

Obsah

- Pochází z práce Itôov kalkulus japonského matematika Kiyoshiho Itôa (1915 - 2008), držitel Gaussovy ceny v roce 2006

- Pochází z práce Itôov kalkulus japonského matematika Kiyoshiho Itôa (1915 - 2008), držitel Gaussovy ceny v roce 2006
- Při odvození použil Itôovu aproximaci podobnou Riemann-Stieltjesovmu integrálu přes limitní sumaci přírůstků Wienerova procesu s ohledem na neanticipativní integrand (hlavní rozdíl oproti R-S integrálu)

- Pochází z práce Itôov kalkulus japonského matematika Kiyoshiho Itôa (1915 - 2008), držitel Gaussovy ceny v roce 2006
- Při odvození použil Itôovu aproximaci podobnou Riemann-Stieltjesovmu integrálu přes limitní sumaci přírůstků Wienerova procesu s ohledem na neanticipativní integrand (hlavní rozdíl oproti R-S integrálu)
- Neanticipovanost integrandu v čase t charakterizuje nezávislost na budoucnosti ve smyslu měřitelnosti vzhledem k přítomné a minulé dostupné informaci

- Pochází z práce Itôov kalkulus japonského matematika Kiyoshiho Itôa (1915 - 2008), držitel Gaussovy ceny v roce 2006
- Při odvození použil Itôovu aproximaci podobnou Riemann-Stieltjesovmu integrálu přes limitní sumaci přírůstků Wienerova procesu s ohledem na neanticipativní integrand (hlavní rozdíl oproti R-S integrálu)
- Neanticipovanost integrandu v čase t charakterizuje nezávislost na budoucnosti ve smyslu měřitelnosti vzhledem k přítomné a minulé dostupné informaci
- Důležitým výsledkem Itôova kalkulu je Itôovo lemma, které postihuje definici "stochastického diferenciálu"

Obsah

Filtrace

$\mathcal{F}_t =$ všechny jevy, které jsou určené během prvních t period
tzn. $\mathcal{F}_t$ shrnuje informace, kterou máme v čase t

- Posloupnost $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá **FILTRACE** prostoru tržních scénářů Ω
- Obecně, posloupnost σ-algebra $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ se nazývá filtrace, pokud $\mathcal{F}_t \leq \mathcal{F}_s$ pro každé $t \leq s$
  tzn., že s rostoucím časem neztrácíme informace, tj. σ-algebra se s rostoucím časem zvětšuje
- Nechť $W(t)$ je W.proces. Filtrace $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t\}$, pro $t \geq 0$ se nazývá **HISTORIE W.PROCESU** jestliže pro $t > 0$ je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s, \omega)$ pro $s \leq t$
  $\mathcal{F}_t^W$ popisuje růst informace o trajektorii W.P. v čase t

Definice neanticipativního procesu

- Nechť je $W(t)$ Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť informační filtrace $\mathcal{F}$ značí historii Wienerova procesu. Říkáme, že proces $\{G(t, \omega), t \in < 0, \infty)\}$ je **NEANTICIPATIVNÍ** (resp. adaptovaný filtraci $\mathcal{F}^W$), jestliže pro každé $t \geq 0$ je funkce $\omega \longrightarrow G(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná. Tzn., že hodnota $G(t, \omega)$ závisí jen na hodnotách W.P. do času t

Definice neanticipativního procesu

- Nechť je $W(t)$ Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť informační filtrace $\mathcal{F}$ značí historii Wienerova procesu. Říkáme, že proces $\{G(t,\omega), t \in< 0, \infty)\}$ je **NEANTICIPATIVNÍ** (resp. adaptovaný filtraci $\mathcal{F}^W$), jestliže pro každé $t \geq 0$ je funkce $\omega \longrightarrow G(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná. Tzn., že hodnota $G(t,\omega)$ závisí jen na hodnotách W.P. do času t
- Funkce $h(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$ právě tehdy, když h je bodová limita součtů funkcí tvarů
  $g_1(W(t_1)) \cdot g_2(W(t_2)) \ldots g_n(W(t_n))$,
  kde $g_1, \ldots g_n$ jsou omezené spojité funkce, $t_j \leq t$ pro $j \leq n$

- Nechť W_t představuje Wienerův proces s filtrací $\mathcal{F}_t$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále nechť stochastický proces $f_t, t \geq 0$ splňuje následující vlastnosti:

- Nechť W_t představuje Wienerův proces s filtrací $\mathcal{F}_t$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále nechť stochastický proces $f_t, t \geq 0$ splňuje následující vlastnosti:
  (1) f_t je $\mathcal{F}_t$ - adaptovaný proces (neanticipativita)

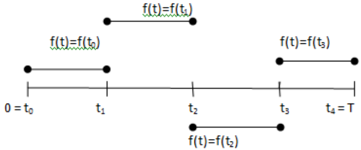
- Nechť W_t představuje Wienerův proces s filtrací $\mathcal{F}_t$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále nechť stochastický proces $f_t, t \geq 0$ splňuje následující vlastnosti:
  (1) f_t je $\mathcal{F}_t$ - adaptovaný proces (neanticipativita)
  (2) $E \int\limits_0^T f_t^2 dt < \infty$

- Nechť W_t představuje Wienerův proces s filtrací $\mathcal{F}_t$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále nechť stochastický proces $f_t, t \geq 0$ splňuje následující vlastnosti:
  1. f_t je $\mathcal{F}_t$ - adaptovaný proces (neanticipativita)
  2. $E\int\limits_0^T f_t^2 dt < \infty$
- S uvedenými předpoklady chceme definovat Itôoův integrál ve tvaru

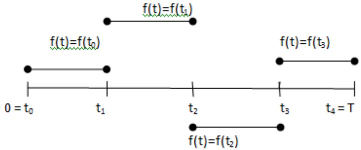
$$I_t = \int\limits_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t),\ t \geq 0$$

Itôův integrál elementárního integrandu

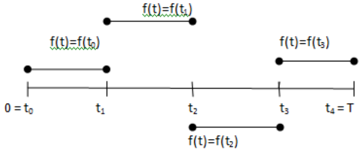
- Nechť $D_n = t_0, t_1 \ldots, t_n$ je dělení intervalu $[0, T]$.
  Předpokládejme **elementární integrand** f_t, který je konstantou na každém podintervalu $[t_k, t_{k+1}]$



- Nechť W_t charakterizuje cenu jednotky drženého aktiva v čase t



- Nechť W_t charakterizuje cenu jednotky drženého aktiva v čase t
- Nechť $t_0, t_1, \ldots, t_n$ představuje obchodní dny daného aktiva



- Nechť W_t charakterizuje cenu jednotky drženého aktiva v čase t
- Nechť $t_0, t_1, \ldots, t_n$ představuje obchodní dny daného aktiva
- Nechť f_{t_k} vyjadřuje počet držených jednotek daného aktiva v čase t_k až do času t_{k+1} (v případě záporných hodnot je vlastník dlužníkem)

Potom Itôův integrál I_t můžeme zapsat jako celkový příjem z obchodování do času t

$$I_t = \begin{cases} f(t_0)[W_t - \underbrace{W_{t_0}}_{W_0=0}], & 0 \leq t \leq t_1 \\ f(t_0)[W_{t_1} - W_{t_0}] + f(t_1)[W_t - W_{t_1}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ f(t_0)[W_{t_1} - W_{t_0}] + f(t_1)[W_{t_2} - W_{t_1}] + f(t_2)[W_t - W_{t_2}], & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Obecně pro $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, zapíšeme Itôův integrál jako

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} f(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + f(t_k)[W(t) - W(t_k)]$$

Itôův integrál pro obecný integrand

- Tentokrát $f(t)$ je obecný proces splňující dané předpoklady

Itôův integrál pro obecný integrand

- Tentokrát $f(t)$ je obecný proces splňující dané předpoklady
- Existuje posloupnost elementárních procesů $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Itôův integrál pro obecný integrand

- Tentokrát $f(t)$ je obecný proces splňující dané předpoklady
- Existuje posloupnost elementárních procesů $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0$$

- Myšlenka limity je založená na postupné aproximaci obecného procesu , procesem elementárních pro stále jemnější dělení.

Itôův náhodný integrál

Nechť $\{W_t, t \in [0, T]\}$ je standardní Wienerův proces s filtrací $\mathcal{F}_t$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť f_t je neanticipativní proces. Potom

$$I(t) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_n(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

nazýváme **Itôův náhodný integrál**

Obsah

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Symbolem M označme třídu stochastických procesů $f(t, \omega)$ s následujícími vlastnostmi:

1. $f(t, \omega)$ je anticipativní

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Symbolem M označme třídu stochastických procesů $f(t, \omega)$ s následujícími vlastnostmi:

1. $f(t, \omega)$ je anticipativní
2. funkce $(t, \omega) \longrightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-měřitelná, kde $\mathcal{B}$ je Borelovská σ-algebra na $< 0, T)$

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Symbolem M označme třídu stochastických procesů $f(t, \omega)$ s následujícími vlastnostmi:

1. $f(t, \omega)$ je anticipativní
2. funkce $(t, \omega) \longrightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-měřitelná, kde $\mathcal{B}$ je Borelovská σ-algebra na $< 0, T)$
3. platí $P(\int\limits_0^T f(t, \omega)^2 \, \mathrm{d}t < \infty) = 1$

Jednoduchá funkce

Neanticipativní proces S se nazývá **JEDNODUCHÁ FUNKCE** na $[0, T]$ jestliže existuje dělení $D = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\}$ tak, že

$$S(t, \omega) = S_k(\omega) \qquad pro \; t \in [t_k; t_{k+1}]$$

Trajektorie S je tedy po částech konstantní funkce

Nechť S je jednoduchá funkce. Pak

$$\int_0^T S \, \mathrm{d}W = \sum_{k=0}^{m-1} S_k(\omega)(W(t_{k+1},\omega) - W(t_k,\omega))$$

se nazývá **ITÔŮV INTEGRÁL** funkce S na $(0,T)$

Obsah

Nechť $f(t)$ je integrovatelná funkce taková, že $\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Pak existuje $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t)$, který představuje náhodnou veličinu s rozdělením $N(0, \sigma^2(T))$, kde
$\sigma^2(t) = \int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Tedy platí $E(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t)) \equiv 0$

$$E((\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t))^2) = \int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

což je **ITÔOVA IZOMETRIE**

Obecný případ Itôovy izometrie

- Nechť $S \in M$ je jednoduchá omezená funkce. Pak

$$E((\int_0^T S(t,\omega)\,\mathrm{d}W(t))^2) = E(\int_0^T S^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t)$$

Obecný případ Itôovy izometrie

- Nechť $S \in M$ je jednoduchá omezená funkce. Pak

$$E((\int_0^T S(t,\omega)\,\mathrm{d}W(t))^2) = E(\int_0^T S^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t)$$

- Nechť f je náhodný proces ze třídy M. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $f_n \in M$ tak, že

$$E(\int_0^T [f(t,\omega) - f_n(t,\omega)]^2\,\mathrm{d}t) \longrightarrow 0 \quad pro\ n \to \infty$$

Obsah

Adaptovanost Pro každé $t \in [0, T]$ je Itôův integrál $I(t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

Adaptovanost Pro každé $t \in [0, T]$ je Itôův integrál $I(t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

Linearita Nech $I(t)$ a $J(t)$ jsou Itôovy integrály definované jako

$$I(t) = a \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t), \quad J(t) = b \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

potom

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^T (af(t) \pm bg(t))\,\mathrm{d}W(t)$$

Adaptovanost Pro každé $t \in [0, T]$ je Itôův integrál $I(t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

Linearita Nech $I(t)$ a $J(t)$ jsou Itôovy integrály definované jako

$$I(t) = a \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t), \quad J(t) = b \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

potom

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^T (af(t) \pm bg(t))\,\mathrm{d}W(t)$$

Spojitost v čase Itôův integrál $I(t)$ je spojitou funkcí vrchní integrační proměnné T

Adaptovanost Pro každé $t \in [0, T]$ je Itôův integrál $I(t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

Linearita Nech $I(t)$ a $J(t)$ jsou Itôovy integrály definované jako

$$I(t) = a \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}W(t), \quad J(t) = b \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

potom

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^T (af(t) \pm bg(t))\,\mathrm{d}W(t)$$

Spojitost v čase Itôův integrál $I(t)$ je spojitou funkcí vrchní integrační proměnné T

Vlastnost martingalu Itôův integrál je martingal

Obsah

Motivace

- Nechť $W(t)$ je cena akcie v čase t při tržním scénáři ω

Motivace

- Nechť $W(t)$ je cena akcie v čase t při tržním scénáři ω
- Nechť $f(t, \omega)$ je obchodní strategie, tj. počet držených akcií v čase t za scénáře ω

Motivace

- Nechť $W(t)$ je cena akcie v čase t při tržním scénáři ω
- Nechť $f(t, \omega)$ je obchodní strategie, tj. počet držených akcií v čase t za scénáře ω
- Zisk ze stategie v časovém intervalu $[t, t_{k+1}]$ je definován jako $f(t, \omega)(W_{t+1} - W_t) = f(t, \omega)W(\Delta t)$

Motivace

- Nechť $W(t)$ je cena akcie v čase t při tržním scénáři ω
- Nechť $f(t,\omega)$ je obchodní strategie, tj. počet držených akcií v čase t za scénáře ω
- Zisk ze stategie v časovém intervalu $[t, t_{k+1}]$ je definován jako $f(t,\omega)(W_{t+1} - W_t) = f(t,\omega)W(\Delta t)$
- Součtem hodnot jednotlivých zisků dostaneme v limitě integrál $\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}W$ který představuje zisk ze strategie v časovém intervalu $[a, b]$

- Mějme dělení intervalu $[0,T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\dots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.

- Mějme dělení intervalu $[0,T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\ldots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0,1]$ položme $\tau_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0,\ldots,n-1$.

- Mějme dělení intervalu $[0, T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\ldots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0, 1]$ položme $\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0, \ldots, n - 1$.
- Potom pro

- Mějme dělení intervalu $[0, T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\ldots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0, 1]$ položme $\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0, \ldots, n - 1$.
- Potom pro
  1. $\lambda = 0$ dostaneme levý krajní bod $\tau_k = t_k$

- Mějme dělení intervalu $[0, T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\ldots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0, 1]$ položme $\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0, \ldots, n - 1$.
- Potom pro
  1. $\lambda = 0$ dostaneme levý krajní bod $\tau_k = t_k$
  2. $\lambda = \frac{1}{2}$ dostaneme prostředek, tudíž $\tau_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$

- Mějme dělení intervalu $[0, T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\dots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0, 1]$ položme $\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0, \dots, n - 1$.
- Potom pro
  1. $\lambda = 0$ dostaneme levý krajní bod $\tau_k = t_k$
  2. $\lambda = \frac{1}{2}$ dostaneme prostředek, tudíž $\tau_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$
  3. $\lambda = 1$ dostaneme pravní krajní bod $\tau_k = t_{k+1}$

- Mějme dělení intervalu $[0, T]$, $D = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ a nechť $\| D \| = \max_{j \in \{0,\dots,n\}} | t_{j+1} - t_j |$.
- Pro pevné $\lambda \in [0, 1]$ položme $\tau_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$ pro $k = 0, \dots, n - 1$.
- Potom pro
  1. $\lambda = 0$ dostaneme levý krajní bod $\tau_k = t_k$
  2. $\lambda = \frac{1}{2}$ dostaneme prostředek, tudíž $\tau_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$
  3. $\lambda = 1$ dostaneme pravní krajní bod $\tau_k = t_{k+1}$
- Definujme Riemannovy součty pro $\int_0^T W \,\mathrm{d}W$ vztahem

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

$$W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = W(\tau_k)W(t_{k+1}) - W(\tau_k)W(t_k) =$$

$$W(\tau_k)W(t_{k+1}) \pm \frac{1}{2}W^2(\tau_k) \pm \frac{1}{2}W^2(t_k) \pm W^2(t_{k+1}) - W(\tau_k)W(t_k) =$$

$$= -\frac{1}{2}[W(t_{k+1}) - W(\tau_k)]^2 + \frac{1}{2}[W(\tau_k) - W(t_k)]^2 + \frac{1}{2}[W^2(t_{k+1}) - W^2(t_k)]$$

Dále

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[W(t_{k+1}) - W(\tau_k)]^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[W(\tau_k) - W(t_k)]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[W^2(t_{k+1}) - W^2(t_k)].$$

Poslední člen je tzv. teleskopující součet, ve kterém se všechny členy s výjimkou prvního a posledního vyruší a rovná se tedy

$$W^2(T) - W^2(0).$$

Stratonovičův integrál

Pro $\| D \| \longrightarrow 0$ podobně jako při výpočtu kvadratické variace máme

$$R_n = -\frac{1}{2}(1-\lambda)T + \frac{1}{2}\lambda T + \frac{1}{2}[W^2(T) - W^2(0)] = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T$$

Dvě přirozené volby hodnoty λ vedou ke dvěma různým stochastickým integrálům:

1. Pro $\lambda = \frac{1}{2}$ máme $\int\limits_0^T W_t \, \mathrm{d}W_t = \dfrac{W^2(T)}{2}$
   STRATONOVIČŮV INTEGRÁL
2. Pro $\lambda = 0$ máme $\int\limits_0^T W_t \, \mathrm{d}W_t = \dfrac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2}$
   ITÔŮV INTEGRÁL

- Ve financích se používá jen Itôův integrál, protože portfolio musíme sestavit před pohybem ceny.

Použitá literatura

- vlastní poznámky z přednášek od doc.Martina Koláře ze Stochastické analýzy II
- Derenik,D.:Stochastické metody v ekonomii a financiach, Diplomová práce,Brno 2008

Děkuji za pozornost!