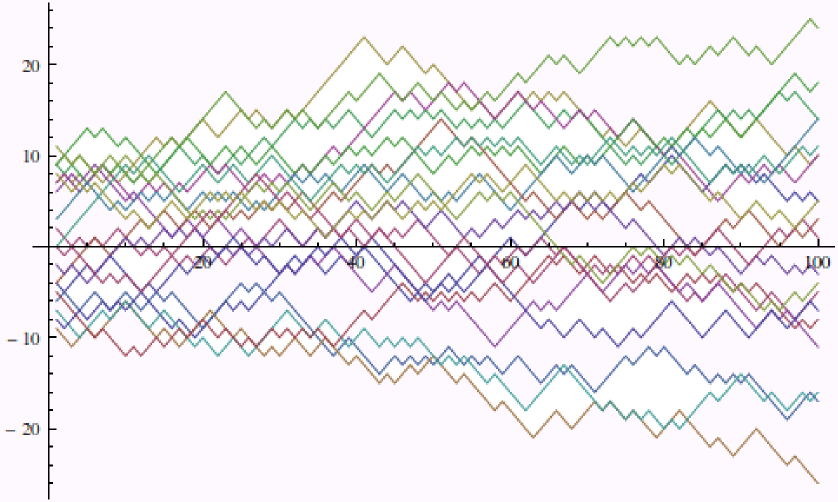
Náhodná procházka
Polyova věta
Zákony arcsinu

Jana Faltýnková



Obsah

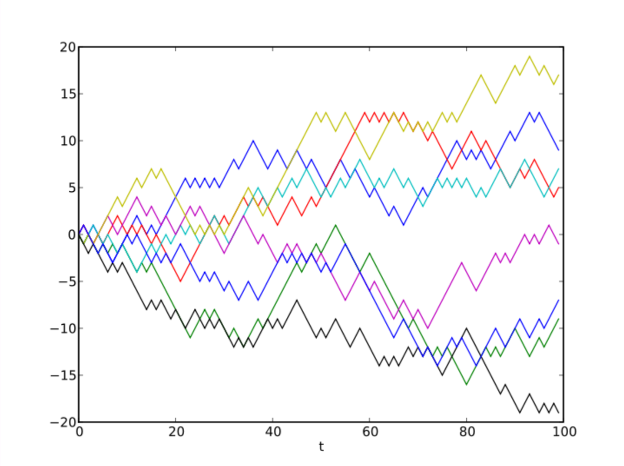
Náhodná procházka - úvod

- **Jednoduchá náhodná procházka** – základ diskrétních modelù pro pohyb cen aktiv, „diskrétní verze“ *Brownova pohybu*
- Stochastický proces, který můžeme popsat pomocí následující hry:
  - Házíme mincí – padne-li hlava, získáme 1 Kč, padne-li orel, prohrajeme 1 Kč
  - na začátku máme sumu S_0
  - v čase n pak máme sumus $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i je výsledek i–té hry
  - X_i – náh. veličiny s pravděpodobnostní funkcí: $P(X_i = 1) = p$ a $P(X_i = -1) = 1 - p = q$ (analogie *Bernoulliho náhodné veličiny*)
- takto popsaný stochastický proces $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme ***jednoduchá náhodná procházka***

- pokud $p = \frac{1}{2} = q$, mluvíme o ***symetrické jednoduché náhodné procházce***

- **Jiná interpretace náhodné procházky**: náhodný pohyb částice po přímce (v každém časovém okamžiku $t = 0, 1, 2, \ldots$ se částice posune o 1 doprava (s pravděpodobností p) nebo o 1 doleva (s pravděpodobností q)

- **Grafické znázornění náhodné procházky:** Body o souřadnicích (n, S_n) spojíme úsečkami $\rightarrow$ lomená čára – *trajektorie náhodné procházky*



Náhodná procházka - vlastnosti

- **Prostorová homogenita**

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_n = j + b | S_0 = a + b)$$

- **Časová homogenita**

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_{n+m} = j | S_m = a)$$

- **Markovova vlastnost** (*„náhodná procházka nemá paměť“, „minulost ovlivňuje budoucnost jen skrze současnost“*)

$$P(S_{m+n} = j | S_0, S_1, \dots, S_m) = P(S_{n+m} = j | S_m)$$

Základní techniky počítání s náhodnou procházkou

- **Podmínění 1. krokem**
- **Počítání trajektorií**
- **Generující funkce**
  - u diskrétních náhodných veličin, které nabývají hodnot na množině 0,1,2,. . . , s pravděpodobnostní funkcí $f(i) = P(X = i)$
  - *Generující funkce:*

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i$$

  - (*Pozn.:* Generujícím funkcím je věnována samostatná státnicová otázka)

Technika podmínění 1. krokem

- **Příklad:** Házíme férovou mincí $(p = \frac{1}{2})$. Pokud padne hlava, získáme 1 Kč, pokud orel, prohrajeme 1 Kč. Na počátku máme sumu $S_0 = k$ a chceme si koupit auto, které stojí N Kč. Budeme tedy hrát tak dlouho, dokud nezískáme $S_n = N$ nebo dokud nebudeme „zruinováni“, tedy $S_n = 0$. Jaká je pravděpodobnost, že budeme zruinováni?

- **Řešení:**
  - Označme:

    $A \ldots$ hráč nakonec zbankrotuje
    $H \ldots$ první hod padne hlava
    $O \ldots$ první hod padne orel

  - Věta o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = P(H)P(A|H) + P(0)P(A|O)$$

Technika podmínění 1. krokem

- **Řešení – pokračování:**
  - Dále označme: $P_k(A) \ldots$ pravděpodobnost bankrotu při počáteční sumě k
  - pak
$$P_k(A) = P(H)P_k(A|H) + P(0)P_k(A|O)$$
  - $P_k(A|H)$ nám udává pravděpodobnost, že po prvním hodu budeme mít sumu $k+1$ – v důsledku nezávislosti X_i hra začíná znovu (ale s počáteční sumou $k+1$)
  - bude tedy platit

    $P_k(A|H) = P_{k+1}(A)$ a analogicky
    $P_k(A|O) = P_{k-1}(A)$
  - Dále označme: $P_k(A) = p_k$

Technika podmínění 1. krokem

- **Řešení – pokračování:**
  - Pak můžeme psát:

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_{k+1} - p_k\right) = \frac{1}{2}\left(p_k - p_{k-1}\right)$$

  - přírůstky jsou konstantní $\rightarrow$ můžeme je označit jako $p_{k+1} - p_k = b$, tedy $p_k = b \cdot k + p_0$
  - okrajové podmínky:

    $p_0 = 1$ (okamžitý bankrot)

    $p_N = 0$ (okamžitá koupě auta)
  - pak tedy $1 + N \cdot b = 0$ a $p_k = 1 - \frac{k}{N}$

Technika počítání trajektorií

- Uvažujeme náhodnou procházku vycházející z bodu a, což můžeme zapsat jako
  - $S_0 = a$, $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$
  - tedy $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Chceme-li vypočítat pravděpodobnost, že náhodná procházka bude sledovat námi předem zvolenou trajektorii, bude dána vztahem $p^r \cdot q^l$, kde r je počet kroků doprava a l počet kroků doleva
- Nyní ale chceme vypočítat pravděpodobnost, že za n kroků budeme v bodě b, začínáme-li v bodě a
- musíme tedy uvážit všechny možné trajektorie, které splňují tuto podmínku – tyto trajektorie však budou mít společnou jednu podmínku – znalostí počátečního a koncového bodu je jednoznačně dán počet kroků r, které musíme udělat doprava a tedy i počet kroků l, které musíme udělat doleva

Technika počítání trajektorií

- Musí totiž platit:

$$n = r + l$$
$$b - a = r - l$$

- Odtud dopočítáme

$$r = \frac{n+b-a}{2}$$
$$l = \frac{n-b+a}{2}$$

- počet všech cest bude dán jako kombinace r prvků z celkového počtu n prvků (vybíráme r kroků doprava z n možných kroků, přičemž nezáleží na pořadí)

- konkrétně tedy počet všech cest splňujících naše podmínky je

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{\frac{n+b-a}{2}}$$

Technika počítání trajektorií

- hledanou pravděpodobnost pak vypočítáme jako

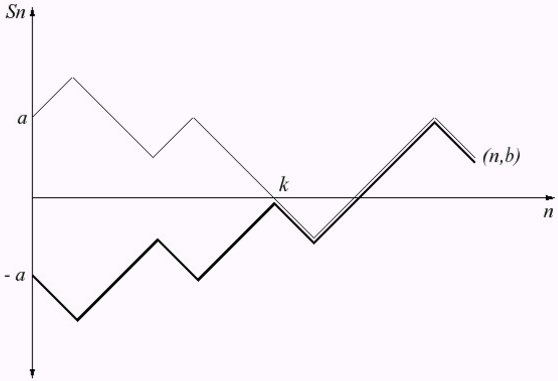
$$N_n(a,b) = P(S_n = b) = \binom{n}{\frac{n+b-a}{2}} \cdot p^{\frac{n+b-a}{2}} \cdot q^{\frac{n-b+a}{2}}$$

- tento vztah ovšem platí pouze pro případ, že $\frac{n+b-a}{2} \in \mathbb{N}$ – v opačném případě totiž žádná taková cesta neexistuje a pravděpodobnost je pak rovna 0
- dále se budeme zabývat tím, kolik cest $N_n^0(a,b)$ z bodu a do bodu b navštíví někdy osu x
- k tomu využijeme tzv. *princip reflexe* (budeme uvažovat případ $a, b > 0$)

Technika počítání trajektorií

- **Princip reflexe**: Každá cesta z bodu $(0, -a)$ do (n, b) protne osu x poprvé v nějakém bodě $(k, 0)$. Reflexí této cesty okolo osy x dostaneme cestu z bodu $(0, a)$ do (n, b), která navštíví osu x. Tato operace dává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi cestami z $(0, -a)$ do (n, b) a cestami $(0, a)$ do (n, b), které navštíví osu x
- Bude tedy platit vztah

$$N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$$



Technika počítání trajektorií

- **Věta o volbách**: Je-li $b > 0$, pak počet cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n,b), které se nevrátí do bodu 0 je

$$\frac{b}{n} \cdot N_n(0,b)$$

- **Myšlenka důkazu**: Nechceme-li se vrátit do 0 a je-li $b > 0$, musí náš první krok vést do bodu $(1,1)$. Poté už můžeme využít princip reflexe (odečteme ty trajektorie, které se vrátí do nuly). Tedy

$$N_{n-1}(1,b) - N^0_{n-1}(1,b)$$

  Vhodnou úpravou pak získáme požadovaný vztah.

- aplikací věty můžeme vypočítat pravděpodobnost, že při volbách mezi kandidátem A a B vedl neustále kandidát A, pokud víme, že A získal α hlasů a B β hlasů, kde $\alpha > \beta \rightarrow$ z této aplikace plyne název věty

Polyova věta

- **Definice**: Mějme posloupnost náhodných vektorů $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, kde

$$X_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \ldots, X_i^{(m)}\right)$$

je m-rozměrný vektor. Nechť platí

$$P\left(X_i^{(j)} = 1\right) = \frac{1}{2}, P\left(X_i^{(j)} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a všechna $X_i^{(j)}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. ***m-rozměrná náhodná procházka*** je definována vztahem

$$S_n^{(j)} = S_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)} \text{ ,vektorově } S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Polyova věta

- **Polyova věta**: *Pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí nekonečněkrát zpět do počátku je rovna* 1 *pro* $m = 1$ *a* $m = 2$ *a je rovna* 0 *pro* $m > 2$.

Polyova věta

- **Myšlenka důkazu:**
  - Označme:
  $$p_0(n) = P(S_n = 0)$$
  $$f_0(n) = P(S_n = 0 \wedge S_1 S_2 \dots S_{n-1} \neq 0)$$
  a k nim příslušné generující funkce P_0 a F_0
  - Platí vztah: $F_0 = 1 - \dfrac{1}{P_0}$
  - Pravděpodobnost, že se částice někdy vrátí do počátku můžeme vyjádřit jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - \frac{1}{P_0(1)}$$

Polyova věta

- **Myšlenka důkazu - pokračování:**
  - Dále využijeme Stirlingovu formuli:

$$n! \approx \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}$$

  - Pomocí Stirlingovy formule $P(S_{2k} = 0) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$ vyjádříme $p_0(n) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
  - Dále díky nezávislosti a na základě konvergence, resp. divergence $P_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n)$ dokážeme větu

Zákony arcsinu

- **Věta**: ***(1. zákon arcsinu pro poslední návštěvu počátku)*** *Uvažujme symetrickou náhodnou procházku, t.j. $p = \frac{1}{2}$ a nechť $S_0 = 0$. Pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$, je rovna*

$$P(S_{2k} = 0)P(S_{2n-2k} = 0)$$

- **Myšlenka důkazu**:
  - Pravděpodobnost, že poslední návštěva počátku do času $2n$ nastane v čase $2k$:

$$P(S_{2k} = 0)P(S_{2k+1}S_{2k+2} \cdots S_{2n} \neq 0 | S_{2k} = 0)$$

  - z časové homogenity plyne:

$$P(S_{2k} = 0)P(S_1 S_2 \cdots S_{2n-2k} \neq 0 | S_0 = 0)$$

  - Předpokládejme tedy, že $S_0 = 0$

Zákony arcsinu

- **Myšlenka důkazu – pokračování:**
  - stačí dokázat, že platí:

$$P(S_1 S_2 \cdots S_{2n-2k} \neq 0) = P(S_{2n-2k} = 0)$$

  - Využijeme vztahu:

$$P(S_1 S_2 \cdots S_{2n-2k} \neq 0) = \frac{1}{n} E(|S_n|)$$

  - Úpravami tohoto výrazu získáme požadovanou rovnost $\rightarrow$ dokážeme tak *1. zákon arcsinu*
- **Věta**: ***(2. zákon arcsinu)*** *Nechť* $p = \frac{1}{2}$ *a* $S_0 = 0$. *Pravděpodobnost, že náhodná procházka stráví přesně* $2k$ *časových intervalů napravo od počátku je (opět) rovna* $P(S_{2k} = 0) P(S_{2n-2k} = 0)$

Zákony arcsinu

- Proč se těmto zákonům říká *zákony arcsinu*?
  - Ze Stirlingovy formule plyne, že

$$P(S_{2k}=0)P(S_{2n-2k}=0)\approx\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

  - Označme T_{2n} čas posledního navštívení bodu 0 do času $2n$ (1. zákon), resp. čas strávený napravo od počátku (2. zákon), pak pro $x\in(0,1)$

$$P(T_{2n}\leq 2xn)\approx\sum_{k\leq xn}\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\doteq$$

$$\int_0^{xn}\frac{1}{\pi\sqrt{u(n-u)}}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{n}}$$

Zdroje

[1] KOLÁŘ, Martin. *Stochastické procesy ve finanční matematice*. Skripta.

[2] OEI. [online]. [cit. 2013-03-02]. Dostupné z: http://www.oei.es/oim/revistaoim/divertimentos10.htm

[3] Tricki: A repository of mathematical know-how. [online]. [cit. 2013-03-02]. Dostupné z: http://www.tricki.org/article/Bijections_and_counting

[4] Wikipedia: Random Walk. [online]. [cit. 2013-03-02]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk