MASARYKOVA UNIVERZITA

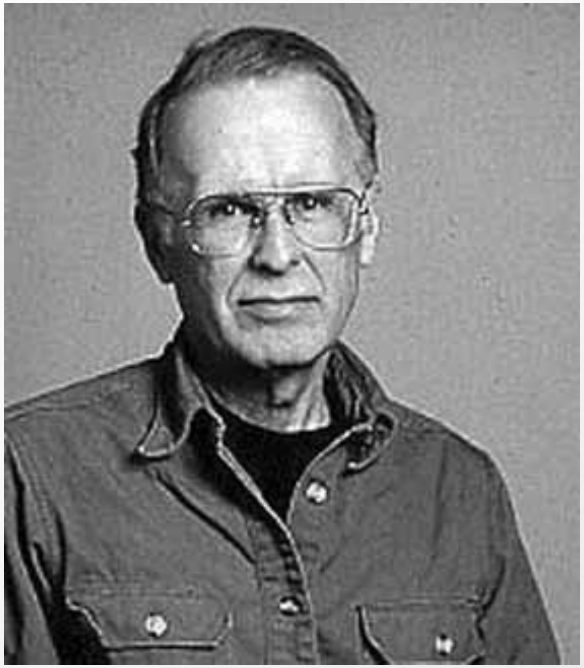
Black-Scholesův model, jištění, citlivosti

Hana Florianová

Obsah

- BS model
  - pojmy
  - předpoklady
  - tvar
- Citlivosti
- Jištění
- Příklad

BS model – otcové myšlenky



Fischer Black (1938-1995)

Myron Scholes (1941-)

BS model - pojmy

= model pro oceňování opcí

- S_T … cena podkladového aktiva v čase T
- S_0 … cena podkladového aktiva v čase 0 (spotová)
- K … realizační cena
- σ … volatilita
- T … doba expirace
- r … bezriziková úroková míra
- c … cena evropské call opce
- p … cena evropské put opce

BS model - předpoklady

- neexistence transakčních nákladů
- neměnné zdanění opcí
- úroková míra stejná pro půjčku a výpůjčku
- trhy fungují nepřetržitě (odstraňují arbitráž okamžitě)
- ceny akcií jsou spojitou náhodnou veličinou
- akcie nenese dividendy
- opce je evropského typu
- akcie lze prodávat i na krátko
- můžeme obchodovat i s částí akcie

BS model - tvar

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

- kde

$$d_1 = \frac{ln \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \qquad d_2 = \frac{ln \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

- N je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení

Citlivost - Greeks

- Δ … delta
- θ … theta
- Γ … gamma
- V … vega
- ρ … rho

Delta a delta-neutrální portfolio

- Delta vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně ceny akcie:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

- Delta-neutrální portfolio: $\Delta = 0$
- Výhoda: Při malých změnách ceny akcie se hodnota celého portfolia nemění.
- Platí: $\Delta c = N(d_1)$, $\Delta p = N(d_1) - 1$, $\Delta port. = suma(n_i \Delta_i)$,
  $\Delta(akcie) = 1$
- Pozor na vysoké transakční náklady.

Theta

- Theta vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně času:

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial T}$$

- Proti času nemá smysl se jistit – víme, jak se mění.
- θ v praxi náhražka za Γ
- θc získáme derivací podle T

Gamma a gamma-neutrální portfolio

- Gamma vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně delta:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

- Čím je Γ větší, tím častěji musíme rebalancovat portfolio.
- Γ-neutrální portfolio: Γ = 0
- Výhoda: I při velkých změnách ceny akcie se hodnota celého portfolia nemění.
- Platí: Γ(akcie)=0, Γc dostaneme druhou derivací podle S

Vega

- Vega vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně volatility:

$$\nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

- Platí: $\mathcal{V}$ (akcie) = 0
- Obvykle pokud $\Gamma = 0 \leftrightarrow \mathcal{V} \neq 0$
- Pro $\Gamma = 0 \wedge \mathcal{V} = 0$ potřebuje dva různé deriváty na stejné podkladové aktivum

Rho

- Rho vyjadřuje rychlost změny ceny opce vzhledem ke změně úrokové míry:

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r}$$

- ρc získáme derivací podle r

Jištění – možnosti investora

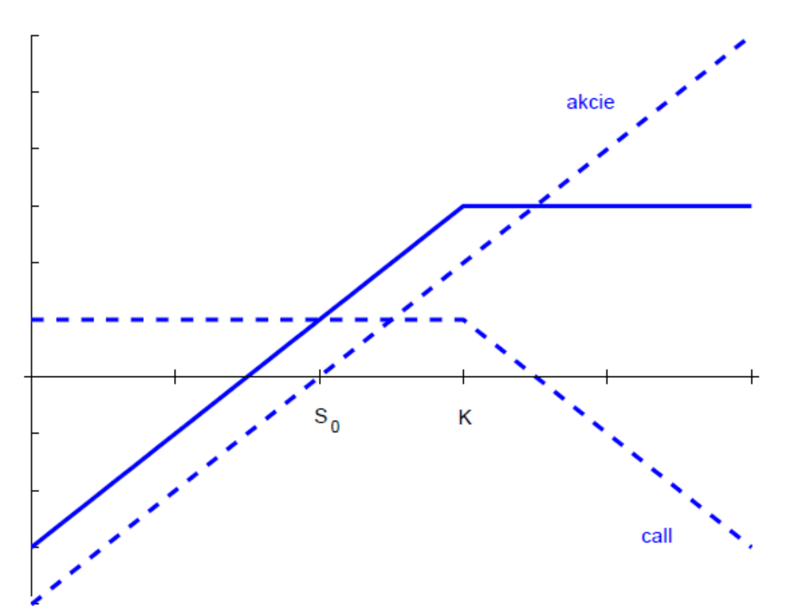
- nicnedělání (naked position)
- prodej akcií

Jištění pomocí opcí:

- krytý call
- ochranný put
- dynamické jištění (delta hedging)

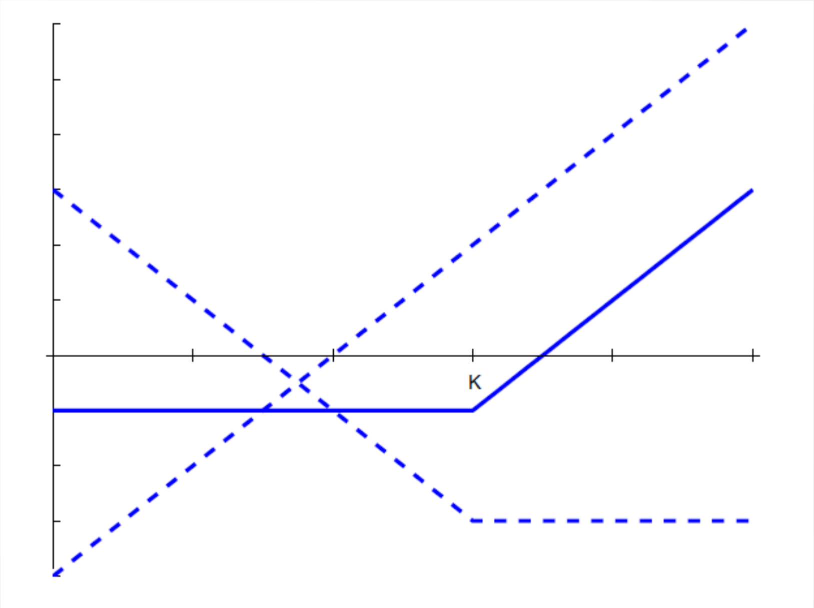
- Jištění = chránění investice v akciích.

Krytý call



- skládá se z short call opce a long akcie
- případná ztráta z akcií je kryta výnosem z opcí

Ochranný put



- skládá se z long put opce a long akcie
- garance minimální hodnoty investice

Dynamické jištění

- utvoříme delta-neutrální portfolio => je imunní vůči malým výkyvům ceny akcie
- za daný časový úsek měníme svou pozici v opcích tak, aby portfolio zůstávalo delta-neutrální
- existuje delta-hedging s call a s put

Příklad - zadání

- Vypočítejte cenu evropské call opce pomocí BS vzorce, když znáte:
  - doba expirace 1 rok
  - spotová cena je 2Kč
  - úroková míra 82%,
  - realizační cena je 2Kč
  - volatilita 0,6

  - nápověda: N(1,666)=0,9521, N(1,366)= 0,9141, N(1,066)=0,8569, exp(-0,82)=0,44
  - výsledek c = 1,15Kč

Příklad - řešení

- použijeme vzorce viz slide 6
- nejprve spočítáme d1 = 1,6667 a d2 = 1,0667
- v tabulkách nebo pomocí fce NORMDIST v Excelu najdu
- N(d1) = 0,9522 a N(d2) = 0,8569
- pak c = 1,15 Kč
- Cena call opce tedy bude asi 1,15Kč

Zdroje

- Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives*. 8. vyd. Boston: Pearson, 2012, 847 s. ISBN 9780273759072.
- Ambrož, L. *Oceňování opcí*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2002, xvi, 313 s. ISBN 8071795313.
- přednášky do MF003

Děkuji za pozornost.