Definice Lévyho procesem nazýváme stochastický proces X_t definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pro který platí

- $X_0 = 0$

Definice Lévyho procesem nazýváme stochastický proces X_t definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pro který platí

- $X_0 = 0$
- přírůstky procesu jsou nezávislé, tedy $X_t - X_s$ je nezávislý na $\mathcal{F}_s$ pro $0 \leq s < t$ generované procesem X

Definice Lévyho procesem nazýváme stochastický proces X_t definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pro který platí

- $X_0 = 0$
- přírůstky procesu jsou nezávislé, tedy $X_t - X_s$ je nezávislý na $\mathcal{F}_s$ pro $0 \leq s < t$ generované procesem X
- přírůstky procesu X jsou stacionární

Definice Lévyho procesem nazýváme stochastický proces X_t definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pro který platí

- $X_0 = 0$
- přírůstky procesu jsou nezávislé, tedy $X_t - X_s$ je nezávislý na $\mathcal{F}_s$ pro $0 \leq s < t$ generované procesem X
- přírůstky procesu X jsou stacionární
- X je stochasticky spojitý proces, pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro $\forall t \geq 0$ platí
$$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$$

- Každý Lévyho proces má jednoznačně určenou càdlàg[1] modifikaci, která je sama též Lévyho procesem.

[1] zprava spojitá s konečnou limitou zleva

- Každý Lévyho proces má jednoznačně určenou càdlàg[1] modifikaci, která je sama též Lévyho procesem.
- Skokovou míru J stochastického procesu Z_t rozumíme

$$J(I \times H) = \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(I) \delta_{\Delta Z_n}(H)$$

kde δ značí Dirakovu deltu, T_n rostoucí posloupnost časů skoků, ΔZ_n n-tý skok procesu Z, I časový interval a H velikost skoků.

[1] zprava spojitá s konečnou limitou zleva

- Očekávání skokové míry stochastického procesu Z_t pro časový interval $[0; 1]$ se nazývá Lévyho mírou, kterou značíme ν.

- Očekávání skokové míry stochastického procesu Z_t pro časový interval $[0;1]$ se nazývá Lévyho mírou, kterou značíme ν.
- Pro složený Poissonův proces platí

$$\mathbb{E}(J([0,t] \times H)) = t\lambda\eta(H)$$

kde λ označuje intenzitu Poissonova procesu a η je pravděpodobnostní funkce rozložení velikosti skoků.

- Očekávání skokové míry stochastického procesu Z_t pro časový interval $[0;1]$ se nazývá Lévyho mírou, kterou značíme ν.
- Pro složený Poissonův proces platí

$$\mathbb{E}(J([0,t] \times H)) = t\lambda\eta(H)$$

kde λ označuje intenzitu Poissonova procesu a η je pravděpodobnostní funkce rozložení velikosti skoků.

- Tedy

$$\nu(\mathbb{R}^d) = \lambda$$

- Pro každou càdlàg funkci platí, že počet "velkých" skoků je konečný na kompaktiním intervalu $[0, T]$.

- Pro každou càdlàg funkci platí, že počet "velkých" skoků je konečný na kompaktiním intervalu $[0, T]$.
- Lévyho procesy se dělí na *konečně* a *nekončně* aktivní.

- Nechť X_t je Lévyho proces, pak pro všechny $R > 0$ existuje $\mu_R \in \mathbb{R}^d$ takové že

$$X_t = \mu_R t + B_t + X_t^R + M_t^R$$

kde B_t je korelovaný brownův pohyb a

$$X_t^R = \int_0^t \int_{|x| \geq R} x J(ds, dx)$$

$$M_t^R = \int_0^t \int_{|x| < R} x \tilde{J}(ds, dx)$$

kde $\tilde{J}(ds, dx)$ označuje kompenzovanou skokovou míru procesu X_t.

- Členy v Lévy-Itôově dekompozici jsou na sobě nezávislé.

- Členy v Lévy-Itôově dekompozici jsou na sobě nezávislé.
- Proces lze rozdělit na driftovou a martingalovou část.

- Členy v Lévy-Itôově dekompozici jsou na sobě nezávislé.
- Proces lze rozdělit na driftovou a martingalovou část.
- Driftová část

$$\mu_R t + X_t^R$$

- Členy v Lévy-Itôově dekompozici jsou na sobě nezávislé.
- Proces lze rozdělit na driftovou a martingalovou část.
- Driftová část

$$\mu_R t + X_t^R$$

- Martingalová část

$$B_t + M_t^R$$

- Koeficienty μ_R, $\mathcal{C}$, ν se nazývají charakteristický R-triplet procesu.

- Koeficienty μ_R, $\mathcal{C}$, ν se nazývají charakteristický R-triplet procesu.
- V literatuře se běžně používá $R = 1$.

- Koeficienty μ_R, $\mathcal{C}$, ν se nazývají charakteristický R-triplet procesu.
- V literatuře se běžně používá $R = 1$.
- Použitím 0-tripletu separujeme skokovou a spojitou složku procesu.

- Koeficienty μ_R, $\mathcal{C}$, ν se nazývají charakteristický R-triplet procesu.
- V literatuře se běžně používá $R = 1$.
- Použitím 0-tripletu separujeme skokovou a spojitou složku procesu.
- Naopak ∞-triplet od sebe oddělí martingalovou a driftovou část.

- Nechť X_t je Lévyho proces v $\mathbb{R}^d$ s charakteristickým tripletem $(\mu_R, \mathcal{C}, \nu)$, pak jeho charakteristická funkce je následujícího tvaru

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) = e^{t\psi_{X_t}(\xi)}$$

- Nechť X_t je Lévyho proces v $\mathbb{R}^d$ s charakteristickým tripletem $(\mu_R, \mathcal{C}, \nu)$, pak jeho charakteristická funkce je následujícího tvaru

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) = e^{t\psi_{X_t}(\xi)}$$

- kde

$$\psi_{X_t} = i\mu_R - \frac{1}{2} < \mathcal{C}\xi, \xi > + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x 1_{|x|<R})\nu(dx)$$

- Nechť X_t je Lévyho proces v $\mathbb{R}^d$ s charakteristickým tripletem $(\mu_R, \mathcal{C}, \nu)$, pak jeho charakteristická funkce je následujícího tvaru

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) = e^{t\psi_{X_t}(\xi)}$$

- kde

$$\psi_{X_t} = i\mu_R - \frac{1}{2} < \mathcal{C}\xi, \xi > + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x 1_{|x|<R})\nu(dx)$$

- n-tý Lévyho kumulant

$$c_n = \frac{t}{i^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \psi(\xi)|_{\xi=0}$$

- LP s konečnou aktivitou a konečnou variací: *složený Poissonův proces*

- LP s konečnou aktivitou a konečnou variací: *složený Poissonův proces*
- LP s konečnou aktivitou a nekonečnou variací: *skokový difuzní proces*

- LP s konečnou aktivitou a konečnou variací: *složený Poissonův proces*
- LP s konečnou aktivitou a nekonečnou variací: *skokový difuzní proces*
- LP s nekonečnou aktivitou a konečnou variací: *α-stabilní proces s* $\alpha \varepsilon\ ]0,1[$

- LP s konečnou aktivitou a konečnou variací: *složený Poissonův proces*
- LP s konečnou aktivitou a nekonečnou variací: *skokový difuzní proces*
- LP s nekonečnou aktivitou a konečnou variací: α-*stabilní proces s* $\alpha \varepsilon$ *]0,1[*
- LP s nekonečnou aktivitou a nekonečnou variací: α-*stabilní proces s* $\alpha \varepsilon$ *[1,2[*

- Trh bez arbitráže modelovaný pomocí Lévyho procesu s vyjímkou Brownova pohybu a Poissonova procesu *není* kompletní.

- Trh bez arbitráže modelovaný pomocí Lévyho procesu s vyjímkou Brownova pohybu a Poissonova procesu *není* kompletní.
- z matematického hlediska: existuje nekonečně mnoho EMMs

- Trh bez arbitráže modelovaný pomocí Lévyho procesu s vyjímkou Brownova pohybu a Poissonova procesu *není* kompletní.
- z matematického hlediska: existuje nekonečně mnoho EMMs
- finanční význam: neexistuje jednoznačná replikace portfolia

- Jednou z možností jak jednoznačně dostat cenu derivátu je použít užitkovou funkci investora.

- Jednou z možností jak jednoznačně dostat cenu derivátu je použít užitkovou funkci investora.
- Z přirozených preferencí investora plyne, že užitková funkce je rostoucí a konkávní.

- Jednou z možností jak jednoznačně dostat cenu derivátu je použít užitkovou funkci investora.
- Z přirozených preferencí investora plyne, že užitková funkce je rostoucí a konkávní.
- Koeficient risk-averze pro užitkovou funkci $U(x)$

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

- Uvažujme investora, jehož preference se řídí exponenciální užitkovou funkcí

$$U(x) = 1 - e^{-\gamma x}$$

- Uvažujme investora, jehož preference se řídí exponenciální užitkovou funkcí

$$U(x) = 1 - e^{-\gamma x}$$

- Dále investor se snaží maximalizovat optimalizací svého portfolia očekávání užitku, který mu přináší.

$$V^O(t,x) = \sup_{\pi_t \epsilon \mathcal{A}_t} \mathbb{E}(1 - \exp(-\gamma X_T^O) | \mathcal{F}_t)$$

kde $\mathcal{A}_t$ je množina všech dostupných strategií v čase t.

- V případě že investor zařadí opci do svého portfolia

$$\Delta_S S_t + R_f + C_t$$

- V případě že investor zařadí opci do svého portfolia

$$\Delta_S S_t + R_f + C_t$$

- a v čase expirace T

$$\Delta_S S_T + R_f + g(S_T)$$

- V případě že investor zařadí opci do svého portfolia

$$\Delta_S S_t + R_f + C_t$$

- a v čase expirace T

$$\Delta_S S_T + R_f + g(S_T)$$

- Optimalizační problém pro výše zmíněnou situaci

$$V(t,x,s) = \sup \mathbb{E}(1 - \exp(-\gamma(X_T + g(S_T)))|\mathcal{F}_t)$$

- K řešení použijeme Itôovo lemma a HJB (Hamilton–Jacobi–Bellman) rovnici.

- K řešení použijeme Itôovo lemma a HJB (Hamilton–Jacobi–Bellman) rovnici.
- Po vyřešení prvního problému dostáváme následující podmínku pro koeficienty

$$\frac{(\mu_R + \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma^2} + \frac{[\int_{\mathbb{R}}(1 - \exp(-\gamma a(y)) - \gamma a(y) 1_{|y|<R})]^2}{2\sigma^2\gamma^2} +$$

$$+ \frac{(\mu_R + \frac{\sigma^2}{2}) \int_{\mathbb{R}}(1 - \exp(-\gamma a(y)) - \gamma a(y) 1_{|y|<R})}{\sigma^2\gamma} = 0$$

- Řešením druhého optimalizačního problému dostaneme parciální integro-diferenciální rovnici (PIDE)

$$f_t - sf_s \frac{\int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(-\gamma a(y)) - \gamma a(y) 1_{|y|<R}) \nu(dy)}{\gamma} +$$

$$\frac{\sigma^2 s^2}{2} f_{ss} + \frac{s \int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(-\gamma \Delta f) - \gamma a(y) f_s 1_{|y|<R}) \nu(dy)}{\gamma} = 0$$

s koncovou podmínkou

$$f(T, s) = g(s)$$

- Pokud chceme dostat cenu pro risk-neutrálního investora využijem limitního přechodu pro $\gamma \to 0$

- Pokud chceme dostat cenu pro risk-neutrálního investora využijem limitního přechodu pro $\gamma \to 0$
- Výsledná PIDE je tvaru

$$f_t + \frac{\sigma^2 s^2}{2} f_{ss} - s f_s \int_{|y|>R} a(y)\nu(dy) +$$

$$+ s \int_{\mathbb{R}} (\Delta_s f - a(y) f_s 1_{|y|<R})\nu(dy) = 0$$

s koncovou podmínkou

$$f(T, s) = g(s)$$

- Nyní již můžeme odvodit pseudo-diferenciální operátor pod novou risk-neutrální mírou s využitím ∞-tripletu

$$\mathcal{L}_S^{\mathcal{Q}} f(t,s) = \frac{\sigma^2 s^2}{2} f_{ss} + s \int_{\mathbb{R}} (\Delta_s f - a(y) f_s) \nu(dy)$$

- Nyní již můžeme odvodit pseudo-diferenciální operátor pod novou risk-neutrální mírou s využitím ∞-tripletu

$$\mathcal{L}_S^{\mathcal{Q}}\, f(t,s) = \frac{\sigma^2 s^2}{2} f_{ss} + s \int_{\mathbb{R}} (\Delta_s f - a(y) f_s) \nu(dy)$$

- a následně rovnici pro podkladové aktivum pod EMM $\mathcal{Q}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma^2 dW_t + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} a(y) \tilde{J}(dt, dy))$$

- S využitím exponenciální užitkové funkce nová EMM koresponduje s *minimální relativní martingalovou entropií.*

- S využitím exponenciální užitkové funkce nová EMM koresponduje s *minimální relativní martingalovou entropií.*
- Použijeme-li logaritmickou užitkovou funkci má EMM podobu *minimální revezní martingalové entropie.*

- S využitím exponenciální užitkové funkce nová EMM koresponduje s *minimální relativní martingalovou entropií.*
- Použijeme-li logaritmickou užitkovou funkci má EMM podobu *minimální revezní martingalové entropie*.
- Chceme-li získat ekvivalent mean variance hedgingu použijeme *minimální kvadratickou martingalovou entropii.*

Andrea Pascucci, PDE and Martingale Methods in Option Pricing, Springer-Verlag Italia 2011

Cont R, Tankov P, Financial Modeling with Jump Processes, CRC 2004

Benth F, Karlsen K, A PDE REPRESENTATION OF THE DENSITY OF THE MINIMAL ENTROPY MARTINGALE MEASURE IN STOCHASTIC VOLATILITY MARKETS,University of Oslo 2003

Děkuji za pozornost!