Diskrétní modely oceňování derivátů, jednokrokový a vícekrokový binomický model

JURAJ KAPASNÝ

Obsah

1 krokový model

Predpoklady: - v čase $t = 0$ je cena akcie S_0 známa hodnota

- v čase $t = 1$ je cena akcie S_1 náhodná veličina

- hodnota $S_1(\omega)$ je funkciou tržného scenáru $\omega \in \Omega$, kde $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ je priestor tržných scenárov

- predpokladajme, že existuje bezrizikové aktívum, ktorého hodnota je v čase $t = 0$ je rovná 1 a v čase $t = 1$ je rovná e^r pri všetkých tržných scenároch, kde r je bezriziková úroková miera

- predpokladajme, že úroková miera je rovnaká pre požičiavanie aj pre ukladanie peňazí

1 krokový model

<u>**Príklad 1:**</u> *Forwardová zmluva* uzatvorená v čase $t = 0$ je záväzný kontrakt: V čase $t = 1$ kúpi X od Y jednu akciu za cenu F. Aká je správna cena F?

Veta: Ak neexistuje arbitráž, potom jediná možná správna cena je $F = S_0 e^r$.

Dôkaz: Dokážeme, že $F > S_0 e^r$ aj $F < S_0 e^r$ vedie ku arbitráži.

1. Nech $F > S_0 e^r$ (výhodné pre Y). Uvažujme nasledujúcu stratégiu:

$t = 0$... Y si požičia v banke S_0, kúpi akciu a uzavrie forwardovú zmluvu na predaj akcie. $t = 1$... Y predá akciu za F, do banky vráti $S_0 e^r$. Stratégia dáva arbitráž, pretože Y ostane bezrizikový zisk $F - S_0 e^r > 0$.

2. Nech $F < S_0 e^r$ (výhodné pre X). Uvažujme takúto stratégiu:

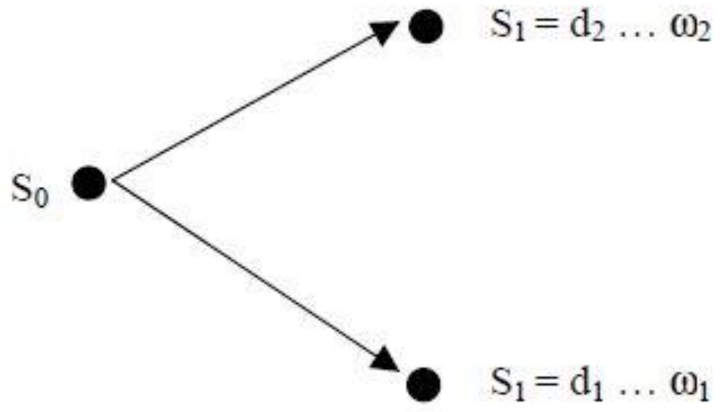
$t = 0$... X predá akciu na krátko (short-selling) za S_0, uloží výnos do banky a uzavrie forwardovú zmluvu na kúpu akcie. $t = 1$... X dostane z banky $S_0 e^r$ a kúpi akciu za F a uzavrie krátku pozíciu. Stratégia dáva arbitráž, pretože X ostane bezrizikový zisk $S_0 e^r - F > 0$.

1 krokový model

Príklad 2: *Európska call opce* dáva držiteľovi právo kúpiť akciu v čase $t = 1$ za cenu K (realizačná cena). Kupec opcie zaplatí v čase $t = 1$ za toto právo predávajúcemu cenu V_0. Aká je férová cena V_0?

Hodnota v čase $t = 1$ je

$$V_1 = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & ak\ S_1 > K \\ 0 & ak\ S_1 \leq K \end{cases}$$



Chceme určiť cenu V_0 za predpokladov:

1. $d_1 < K < d_2$
2. $d_1 < S_0 e^r < d_2$, pre $S_0 e^r < d_1 < d_2$ dostaneme arbitráž a rovnako aj v opačnom prípade.

1 krokový model

Majme portfólio (x_1, x_2, x_3), kde $x_1$je počet bezrizikových aktív, x_2 je počet akcií a x_3 počet opcií.

Hodnota portfólia v čase $t = 1$ za scenáru ω_1 je

$$y_1 = x_1 e^r + x_2 d_1 + 0 x_3$$

Hodnota portfólia v čase $t = 1$ za scenáru ω_2 je

$$y_2 = x_1 e^r + x_2 d_1 + (d_2 - K) x_3$$

Zobrazenie T: $(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2)$ je lineárne zobrazenie z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ s nenulovým jadrom dimenzie 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pre portfólio $(0, 0, 1)$ existuje jednoznačné portfólio $(x_1, x_2, 0)$, ktoré má rovnakú hodnotu v oboch scenároch (replikujúce portfólio).

1 krokový model

Hodnoty x_1 a x_2 nájdeme vyriešením rovníc

$x_1 e^r + x_2 d_1 = 0$ pre $V_1(\omega_1)$ a

$x_1 e^r + x_2 d_2 = d_2 - K$ pre $V_1(\omega_2)$.

Riešením dostaneme:

$$x_1 = \frac{-d_1 e^{-r}(d_2 - K)}{d_2 - d_1} \quad \text{a}$$

$$x_2 = \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1}.$$

1 krokový model

Portfólio $(x_1, x_2, 0)$ má rovnakú hodnotu ako $(0, 0, 1)$ v každom scenári $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ musí mať rovnakú hodnotu aj v čase $t = 0$ (inak by existovala arbitráž).

Potom platí

$$V_0 = -e^{-r} \frac{d_1(d_2 - K)}{d_2 - d_1} 1 + \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1} S_0 = (d_2 - K) \frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1} e^{-r} + 0 =$$
$$= e^{-r} V_1(\omega_2) p + V_1(\omega_1)(1 - p),$$

Kde $V_1(\omega_1) = 0, e^{-r}$ je diskontný faktor a $p = \frac{e^r S_0 - d_1}{d_2 - d_1}$ sa nazýva rovnovážna pravdepodobnosť scenára ω_2.

$\Rightarrow$ V_0 je diskontované očakávanie hodnoty opcie v čase $t = 1$ vzhľadom k rovnovážnej pravdepodobnostnej miere.

Základná veta APT

Predpoklady: -uvažujme trh s K voľne obchodovateľnými aktívami $A^1, \dots, A^k$, kde A^1 je bezrizikové aktívum, to znamená, že jeho hodnota v čase $t = 1$ je $S_1^1 = e^r$ pre každý tržný scenár

-cena podielu aktíva A^j v čase $t = 0$ je S_0^j (známa hodnota)

-množina všetkých scenárov je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ a hodnotu aktíva A^j v čase $t = 1$ za scenáru ω_i je $S_1^j(\omega_i)$.

$S_1^j(\omega_i)$ je náhodná veličina na priestore tržných scenárov Ω.

Základná veta APT

Definícia: *Portfólio* je vektor $\Theta = (\theta_1,\ \theta_2, \dots ,\ \theta_K)$**,** kde θ_j je veľkosť podielu aktíva A^j v portfóliu.

V čase $t = 0$ sa hodnota Θ rovná $V_0(\Theta) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$.

Pri $t = 1$ závisí hodnota Θ na $\omega_{i,}$ $V_1(\Theta, \omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i)$.

Definícia: Arbitráž je portfólio, ktoré dokáže dosiahnuť kladný zisk z ničoho pri všetkých tržných scenároch, tj. buď $V_0(\Theta) \leq 0$ a $V_1(\Theta, \omega_j) > 0$ pre všetky $\omega_j \in \Omega$

alebo $V_0(\Theta) < 0$ a $V_1(\Theta, \omega_j) \geq 0$ pre všetky $\omega_j \in \Omega$.

Definícia: Pravdepodobnostná miera na množine scenárov Ω je rovnovážna pravdepodobnostná miera, ak pre všetky A^j je hodnota podielu v čase $t = 0$ rovná diskontovanému očakávaniu hodnoty podielu v čase $t = 1$ vzhľadom k pravdepodobnostnej miere π, tj.

$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$ pre všetky $j = 1, \dots, K$, kde e^{-r} je diskontný faktor.

Základná veta APT

Veta (Základná veta APT): Rovnovážna pravdepodobnostná miera existuje práve vtedy, keď neexistuje arbitráž.

Dôkaz: Implikácia $\Leftarrow$ **.**

Ak existuje rovnovážna pravdepodobnostná miera π a Θ je portfólio, ktorého hodnota v čase $t = 1$ je ≥ 0 pri všetkých scenároch, potom

$$V_0(\Theta) = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) V_1(\Theta, \omega_i) \geq 0,$$

odkiaľ plynie, že Θ nie je arbitráž (a arbitráž teda neexistuje).

Základná veta APT

Implikácia ⇒ : Ak neexistuje arbitráž, tak existuje taká rovnovážna pravdepodobnostná miera, že platí $S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i)\, S_1^j(\omega_i)$

Pre $j = 1$ platí tento vzťah automaticky

$$1 = S_0^1 = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i)\, e^r$$

A^1 je bezrizikové aktívum s hodnotou $S^1 = e^r$ pre všetky scenáre.

Uvažujme $2 \leq j \leq K$. Označme ε množinu všetkých vektorov s tvarom $y = (y_2, \dots, y_K)$, kde

$$y_j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pre všetky $j = 2, 3, \dots, K$ a ľubovoľnú pravdepodobnostnú mieru π.

Základná veta APT

$\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^{K-1}$ je konvexným obalom svojich extrémnych bodov, ktoré odpovedajú pravdepodobnostiam $\pi(\omega_i) = 1, \pi\left(\omega_j\right) = 0$ pro $j \neq 0$.

Chceme dokázať:

Ak neexistuje arbitráž, potom $S = (S_0^2, \dots, S_0^K) \in \varepsilon$.

inak povedané, ak $S \notin \varepsilon$, potom existuje arbitráž. V dôkaze využijeme vetu o oddeľujúcej nadrovine.

Veta: Nech $F \subseteq \mathbb{R}^n$je uzavretá konvexná množina a $x \notin F$. Potom existuje $v \in \mathbb{R}^n$ také, že $v \cdot x < v \cdot y$ pre všetky $y \in F$, kde $\cdot$ je skalárny súčin.

Dôkaz: Nech a najbližší bod v F k bodu x, potom vektor $a - x$ má hľadané vlastnosti.

Základná veta APT

Podľa predchádzajúcej vety máme

$$S \notin \varepsilon \Rightarrow \exists \Theta^* = (\theta_2, \dots, \theta_K) \neq 0$$

tak, že pre všetky $y \in \varepsilon$ platí:

$$y \cdot \Theta^* > S \cdot \Theta^*.$$

ε obsahuje extrémne body, potom pre všetky i platí:

$$e^{-r} \sum_{j=2}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i) > \sum_{j=2}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Ľavú stranu nerovnosti označíme C_i a pravú D. Ukážeme, že existuje arbitráž.

Zvolíme θ_i tak aby $C_i > \theta_1 > D$ pre všetky i, potom portfólio $(-\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ je arbitráž, pretože jeho hodnota v čase $t = 0$ je < 0 a v čase $t = 1$ je > 0 pre všetky ω_i.

$\boxdot$

Základná veta APT

Uvažujme európsku call opciu, ktorej výplatná funkcia je $V_1 = (S_1 - K)_+$.
Ďalej $S_1(\omega_i) = d_i$ pre $i = 1, 2$ a $d_1 < d_2$.
Pokiaľ neexistuje arbitráž, potom existuje π, pre ktorú platí, že cena akcie v $t = 0$ je diskontované očakávanie

$$S_0 = e^{-r}(\pi(\omega_1)d_1 + \pi(\omega_2)d_2).$$

Naviac vieme, že $\pi(\omega_1) + \pi(\omega_2) = 1.$ Teda platí, že $d_1 < S_0 e^r < d_2$ a dostane

$$\pi(\omega_i) = \frac{d_2 - S_0 e^r}{d_2 - d_1} \text{ a } \pi(\omega_2) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Ak je opcia voľne obchodovateľná a trh je bez arbitráže, musí to isté platiť aj pre opciu, potom:

$$V_0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) + \pi(\omega_1).0 = \pi(\omega_2)(d_2 - K) = \frac{S_0 e^r - d_1}{d_2 - d_1}(d_2 - K).$$

Zaistenie (Hedging)

Majme aktíva $A^1, A^2, \dots, A^K, B$. Nech $S_t^j(\omega_i)$ a $S_t^B(\omega_i)$ sú ceny A^j, respektíve *B*, v čase *t* a scenári ω_i, *kde* $t = 0, 1$.

Definícia: Portfólio $\Theta = (\theta_1,\ \theta_2, \dots,\ \theta_K)$ je replikujúce portfólio pre B, ak

$$S_1^B(\omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i)$$

Pre všetky $i = 1, \dots, N$.

Zaistenie (Hedging)

Veta: Nech $\Theta = (\theta_1,\ \theta_2, \dots,\ \theta_K)$ je replikujúce portfólio pre B. Ak neexistuje arbitráž, potom v čase $t = 0$ platí:

$$S_0^B = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$$

Dôkaz: - Nech tvrdenie neplatí. Ak $S_0^B > \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$, potom portfólio $(-1, \theta_1,\ \theta_2, \dots,\ \theta_K)$ v aktívach $B, A^1, \dots, A^K$ je arbitráž, pretože

$\sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j - S_0^B < 0$ a $\sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i) - S_1^B(\omega_i) = 0$ pre všetky $\omega_i \in \Omega$.

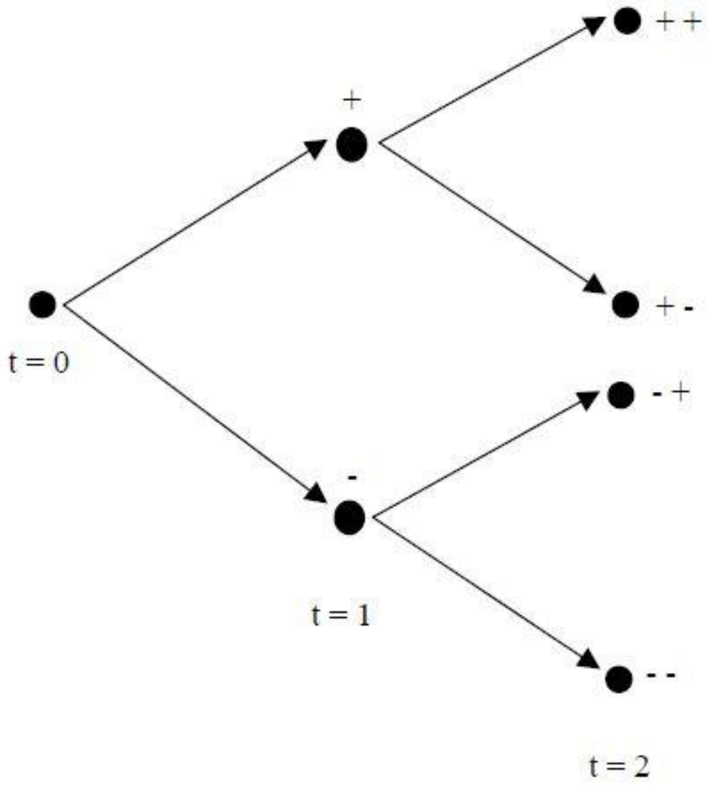
- Analogicky pre $S_0^B < \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j$ vezmeme opačné portfólio.

Model s viacerými periódami

Trh s 2 periódami: Uvažujme 1 bezrizikové aktívum a 1 rizikovou akcii. Tržné scenáre sú v tomto prípade: $\Omega = \{(+\,+), (+\,-), (-\,+), (-\,-)\}$.

- Predpokladáme, že u je výnosová miera pri kroku + v modelu a d je výnosová miera pri kroku -. Potom dostávame:

$$S_1(+) = uS_0$$
$$S_1(-) = dS_0$$
$$S_2(++) = uS_1(+) = u^2S_0$$
$$S_2(+-) = dS_1(+) = udS_0$$
$$S_2(-+) = uS_1(-) = duS_0$$
$$S_2(--) = dS_1(-) = d^2S_0$$



Model s viacerými periódami

- Trh si rozdelíme na 3 čiastočné trhy a pomocou vzorca pre rovnovážnu pravdepodobnostnú mieru za predpokladu, že $dS_k < S_k e^r < uS_k$ dostávame

$p_u = \frac{e^r - d}{u - d}$ a $p_d = \frac{u - e^r}{u - d}$, (S_0 sa vykráti)

A celková pravdepodobnostná miera pre dvojkrokový trh bude:

$P(+\,+) = p_u^2,\ P(-\,-) = p_d^2,\ P(+\,-) = P(-\,+) = p_u p_d.$

Model s viacerými periódami

<u>Trh s viacerými periódami:</u>

V tomto prípade množina všetkých scenárov vyzerá takto:

$$\Omega = \{(+,+,+,\dots,+),(+,+,\dots,+,-),\dots,(-,-,\dots,-)\}$$

a má 2^T prvkov.

Pre scenár $\omega \in \Omega$ Je jeho rovnovážna pravdepodobnosť $P(\omega) = p_u^K p_d^{T-K}$, kde K je počet + v scenári ω.

Pri oceňovaní opcií využijeme, že cena bude diskontované očakávanie jej hodnoty v čase T, $V_T = (S_T - K)_+$, vzhľadom ku rovnovážnej pravdepodobnostnej miere.

Model s viacerými periódami

Pre jednoduchosť uvažujeme $r = 0$ a nech m je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $S_0 u^m d^{T-m} \geq K$. Potom dostávame

$$V_0 = \sum_{n=m}^{T} p_u^n p_d^{T-n} \binom{T}{n} (S_0 u^n d^{T-n} - K)$$

$$= \sum_{n=m}^{T} \frac{(1-d)^n (u-1)^{T-n}}{(u-d)^T} \binom{T}{n} (S_0 u^n d^{T-n} - K),$$

kde $\binom{T}{n}$ je počet trajektórií s celkom *n* plusmi.

Použitá literatúra

1. Skripta doc. Koláře. Ku predmetu Koláře MF001, Stochastické procesy ve finanční matematice
2. Poznámky z prednášok predmetu doc. Koláře MF001, Stochastické procesy ve finanční matematice
3. Poznámky z prednášok predmetu prof. Černého M7772, Matematické techniky ve financích

Ďakujem za pozornosť