Ekvivalentní martingalové míry, věrohodnostní poměr, Cameron-Martinova věta

Seminář z finanční matematiky

Jan Kovář

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

3.dubna 2013

Pravděpodobnostní míra

Definice: Axiomatická definice pravděpodobnosti

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor (jevové pole) a P je reálná množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi

1. $P(\Omega) = 1$ (normovaná),
2. $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$ (nezáporná),
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních náhodných jevů $\Rightarrow$ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (σ-aditivní).

Pak funkci P nazýváme *pravděpodobnostní mírou* (*pravděpodobností*) na $\mathcal{A}$ a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pravděpodobnostním prostorem*.

Připomenutí

Definice: Wienerův proces

Stochastický proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *Wienerův proces*, jestliže platí:

1. $W(0) = 0$,
2. (spojitost) s pravděpodobností 1 jsou trajektorie procesu spojité,
3. (nezávislost přírůstků) pro libovolné $0 \leq t_1 < s_1 \leq t_2 < \cdots \leq t_n < s_n$ jsou přírůstky $W(s_1) - W(t_1), \ldots, W(s_n) - W(t_n)$ navzájem nezávislé náhodné veličiny,
4. (normalita přírůstků) $\forall s, t; s > t : W(s) - W(t) \sim N(0, s - t)$.

Ekvivalentní míry

Definice: Ekvivalentní míry

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, na němž jsou dány pravděpodobnostní míry P a Q. Řekneme, že P a Q jsou *ekvivalentní*, jestliže pro každý jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0.$$

Značíme $P \sim Q$.

- tj. množiny míry 0 jsou totožné pro obě míry

Definice: Radon-Nikodýmova derivace

Nechť P a Q jsou ekvivalentní míry na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Jestliže pro náhodnou veličinu Z platí

$$\mathsf{E}_Q(X) = \mathsf{E}_P(XZ)$$

pro libovolnou náhodnou veličinu X, pak Z nazýváme Radon-Nikodýmova derivace míry Q vůči míře P, značíme $Z = \dfrac{dQ}{dP}$.

- Tedy $\dfrac{dQ}{dP} : \Omega \to \mathbb{R}$, píšeme též $\dfrac{dQ}{dP}(\omega)$
- Rozepsáním vztahu z definice

$$\mathsf{E}_Q(X) = \int_\Omega X dQ = \int_\Omega X \frac{dQ}{dP} dP = \mathsf{E}_P\left(X \frac{dQ}{dP}\right) = \mathsf{E}_P(XZ)$$

Radon-Nikodýmova derivace - ilustrace

- Př.: $\Omega = \mathbb{R}^2$
  - jev A ... okolí bodu z_0
  - $P(A)$ ... pravděpodobnost jevu A vůči P
  - $Q(A)$ ... pravděpodobnost jevu A vůči Q
  - uvažujme podíl $\dfrac{Q(A)}{P(A)}$
  - pokud velikost okolí $\to 0$, pak $\dfrac{Q(A)}{P(A)} \to \dfrac{dQ}{dP}(z_0)$
- Pro Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ můžeme Ω ztotožnit s prostorem trajektorií
  - prostor spojitých funkcí na $[0, T]$ t.ž. $f(0) = 0$

Cameron-Martinova věta

- W_t ... standardní Wienerův proces
- $\widetilde{W_t} = W_t + \gamma t$ ... Wienerův proces s driftem

Cameron-Martinova věta

Nechť $\{W_t, t \in [0, T]\}$ je standardní Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a Q je míra, jejíž Radon-Nikodýmova derivace vůči míře P je

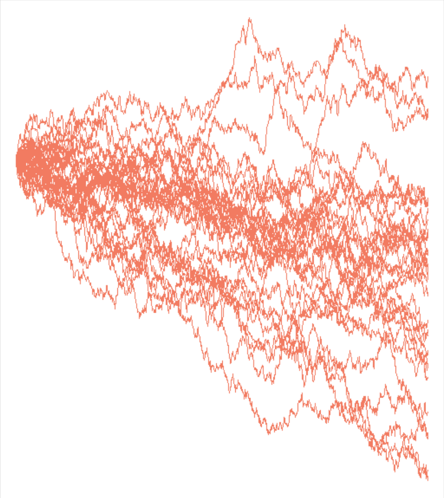
$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\gamma W(T,\omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 T}.$$

Pak $\widetilde{W_t} = W_t + \gamma t$ je standardní Wienerův proces (a tedy martingal) vzhledem ke Q.

Cameron-Martinova věta - vysvětlení

Transformace „pravděpodobnosti trajektorií“

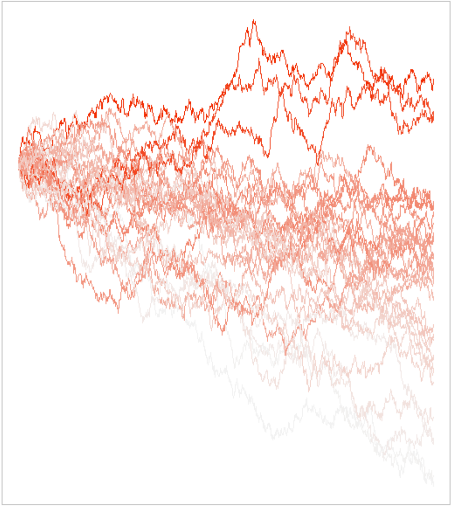
- uvažujme $\widetilde{W}_t = W_t + \gamma t$ pro $\gamma < 0$
- na obrázku vpravo je 30 realizací $\widetilde{W}_t$
- vůči P je $\widetilde{W}_t$ Wienerův proces se záporným driftem
    - každé trajektorii (přesněji jejímu okolí) přisuzuje míra P určitou pravděpodobnost
    - „čím blíže přímce γt, tím je trajektorie pravděpodobnější“



Zdroj: `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/Girsanov.png`

Cameron-Martinova věta - vysvětlení

- C.-M. věta říká, jak vypadá míra Q, vůči níž je $\widetilde{W}_t$ standardní Wienerův proces, a to prostřednictvím $\frac{dQ}{dP}$
  - $\frac{dQ}{dP}$ transformuje pst každé trajektorie (jejího okolí) vůči P na její pst vůči Q
  - transformované pravděpodobnosti jsou znázorněny na obr. vpravo (sytější barva - vyšší pst)
  - „drift je kompenzován pravděpodobností“ - trajektorie s vyššími hodnotami $W(T)$ mají vyšší pravděpodobnost vůči Q, čímž je drift „odstraněn“



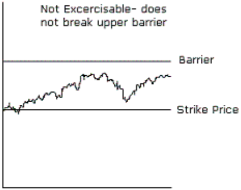
Zdroj: `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/Girsanov.png`

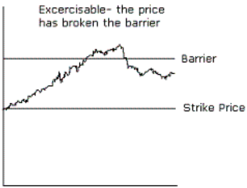
Cameron-Martinova věta - aplikace

- oceňování složitějších typů opcí závislých na cestě
- binární bariérové opce
  - opce začne/přestane platit až po proražení bariéry H
  - výplatní funkce up&in

$$V_T = 1\left\{\max_{t\in[0,T]} S_t \geq H\right\} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \max_{t\in[0,T]} S_t \geq H, \\ 0, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

  - pomocí Cameron-Martinovy věty převedeme na Wienerův proces bez driftu
  - s využitím principu reflexe vypočteme $P(\max_{t\in[0,T]} W_t \geq A)$





Zdroj: `http://www.investopedia.com/terms/u/up-and-inoption.asp`

Důkaz Cameron-Martinovy věty

- *Moment generující funkce* náhodné veličiny X je definován:

$$\psi(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f(x) dx$$

- Lemma: $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \psi(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$
- Chceme dokázat, že $\widetilde{W_t} = W_t + \gamma t$ je standardní Wienerův proces vůči Q, tedy dle definice W.P.:
  - $\widetilde{W_0} = 0$ $\leftarrow \widetilde{W_0} = W_0 + \gamma \cdot 0 = W_0 = 0$
  - spojitost trajektorií $\leftarrow$ plyne ze spojitosti W_t a fce γt
  - nezávislost přírůstků $\leftarrow$ plyne z nezávislosti přírůstků W_t
  - normalita přírůstků: $\leftarrow$ viz následující slide

Důkaz Cameron-Martinovy věty - pokračování

- chceme dokázat: $\widetilde{W}(t+s) - \widetilde{W}(s) \sim N(0,t)$ vůči Q pro $t > 0$
- spočítáme moment generující funkce náhodné veličiny $\widetilde{W}(t+s) - \widetilde{W}(s)$, tj.

$$\psi(\theta) = \mathsf{E}_Q\left(e^{\theta(\widetilde{W}(t+s)-\widetilde{W}(s))}\right)$$

- využijeme definici Radon-Nikodýmovy derivace

$$\psi(\theta) = \mathsf{E}_Q\left(e^{\theta(\widetilde{W}(t+s)-\widetilde{W}(s))}\right) = \mathsf{E}_P\left(\frac{dQ}{dP}e^{\theta(\widetilde{W}(t+s)-\widetilde{W}(s))}\right)$$

- dosadíme za $\frac{dQ}{dP}$ výraz z předpokladu věty, po úpravách (využívajících uvedené lemma) dostaneme

$$\psi(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t},$$

což je moment generující funkce $N(0,t)$

Girsanovova věta

- zobecnění Cameron-Martinovy věty
- stochastický drift

Girsanovova věta

Nechť W_t je standardní Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\gamma(t, \omega)$ je neanticipativní proces takový, že

$$\mathsf{E}_P\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma(t)dt}\right) < \infty.$$

Pak existuje pravděpodobnostní míra Q, pro kterou platí:

1. $P \sim Q$,
2. $\dfrac{dQ}{dP}(\omega) = e^{-\int_0^T \gamma(t,\omega)dW - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(t,\omega)dt}$
3. $\widetilde{W}(t, \omega) = W(t, \omega) + \int_0^t \gamma(s, \omega)ds$ je standardní Wienerův proces vůči míře Q.

Obrácená Girsanovova věta

Obrácená Girsanovova věta

Nechť W_t je standardní Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť $Q \sim P$. Pak existuje neanticipativní proces $\gamma(t, \omega)$ takový, že

$$\widetilde{W}(t, \omega) = W(t, \omega) + \int_0^t \gamma(s, \omega) ds$$

je standardní Wienerův proces vůči míře Q. Navíc platí

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = e^{-\int_0^T \gamma(t,\omega) dW - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(t,\omega) dt}.$$

Literatura

- KOLÁŘ Martin. *Stochastická analýza.*
- *Girsanov theorem.*
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Girsanov_theorem`

Děkuji za pozornost.