

# Dynamické a Bayesovské hry, zpětná indukce, opakované hry

Martin Reiss

# Dynamické hry

Hry, ve kterých se objevují situace, kdy jsou rozhodnutí činěna v různých časech s tím, že alespoň jedno z dřívějších rozhodnutí je všeobecně známé v době učinění pozdějších rozhodnutí.

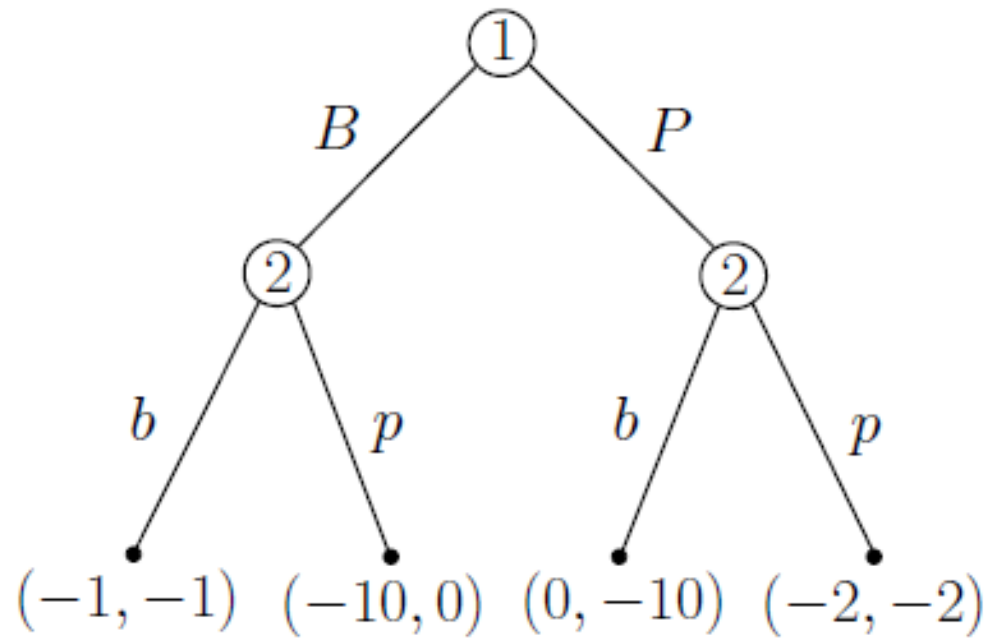
Dynamické hry jsou většinou reprezentovány v tzv. rozvětveném (extenzivním) tvaru.

V extenzivním tvaru hry se zadává:

- seznam hráčů ve hře
- kdy je který hráč na tahu, jaké má hráč možnosti v každé situaci kdy je na tahu a jaké má hráč informace v každé situaci kdy je na tahu
- výplata každého hráče při všech možných kombinacích tahů které mohli hráči zvolit

- Dynamické hry se obvykle znázorňují pomocí *herního stromu*.
- Jedná se o graf, který má jediný začátek a neobsahuje cykly.
- Strom se skládá se z větví a uzlů. Každému uzlu přímo předchází pouze jeden uzel. Uzly rozdělujeme na rozhodovací, koncové, předcházející, následující a jeden počáteční (kořen stromu).
- Každý rozhodovací uzel představuje rozhodovací bod jednoho z hráčů. Každý koncový uzel obsahuje výplaty hráčů.
- Jsou zde zachyceny všechny situace, které ve hře mohou nastat. Každé situaci odpovídá jeden uzel, z každého uzlu vychází určitý počet hran odpovídajících možným rozhodnutím daného hráče.

Příklad vezňova dilema v rozvětveném tvaru



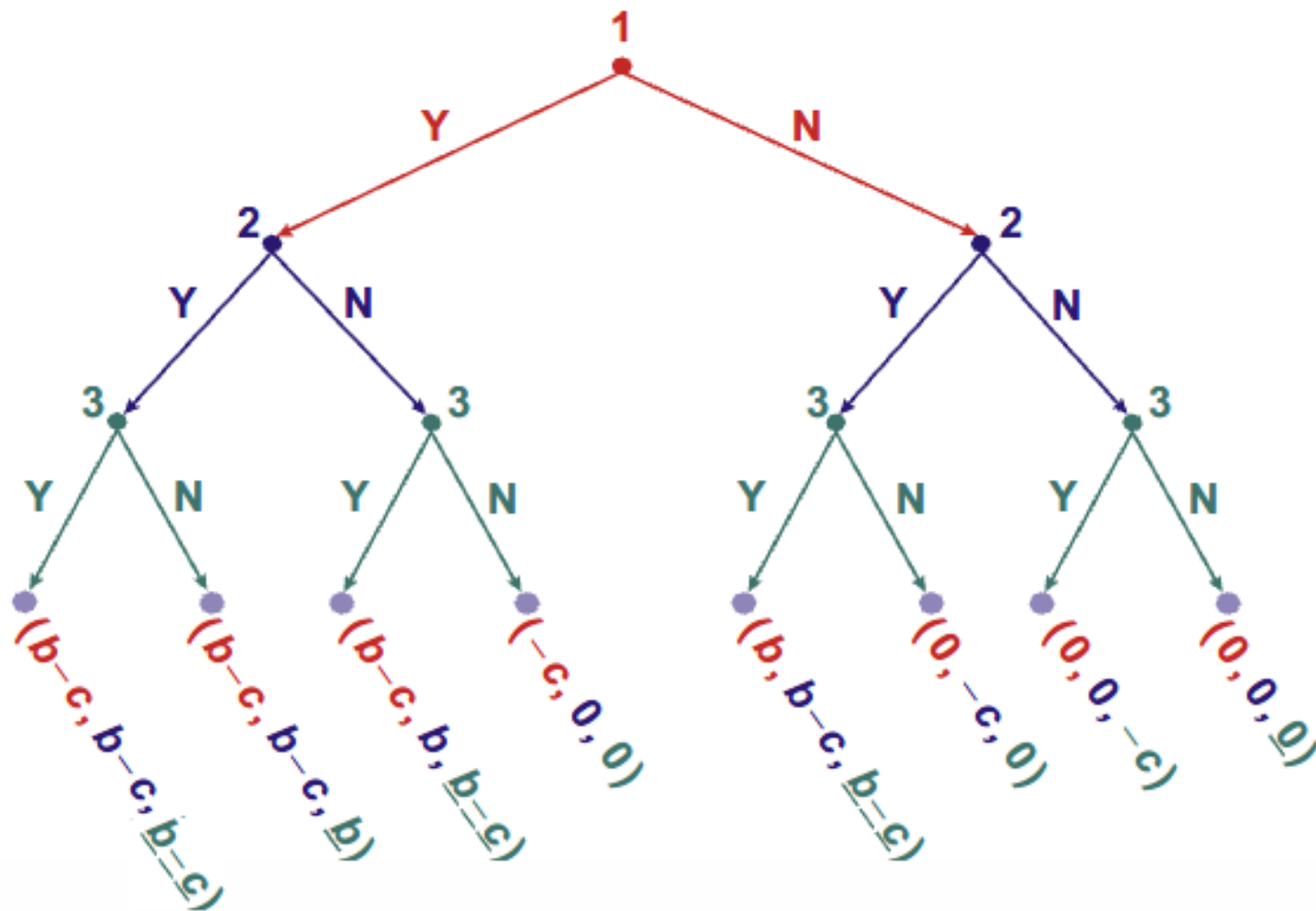
# Hry s opakováním

- Hráči hrají hru opakovaně.
- Má-li každý hráč přehled o tom, kdo a jak v minulých kolech z jeho protihráčů hrál  
mluvíme pak o hrách s dokonalou informací.
- Pokud jsou mezi hráči známy i strategie a hodnoty užitkových funkcí protihráčů,  
mluvíme o hrách s úplnou informací.

- Dva typy:
- Hra se opakuje s pevným počtem kol, tj. existuje nějaký bod, do kterého hra dospěje a ukončí se
- Hra se může opakovat do nekonečna, což může být interpretováno tak, že hráči hrají hru, ale neví kdy skončí.

- Základní metodou pro řešení her s pevným počtem kol je **zpětná indukce**.
- Při řešení postupujeme od konce hry. Jestliže se tam hra dostane, pak poslední hráč, který by mohl být na tahu bude volit takový závěrečný tah, který mu přinese maximální užitek.
- Hráč, jež je na tahu před ním se pochopitelně také snaží maximalizovat užitek, ale je si vědom toho, jak na každý jeho možný tah bude reagovat hráč po něm, proto svůj tah zvolí s ohledem na rozhodnutí následujícího hráče.
- Tímto způsobem postupujeme až ke kořenu hry

# Příklad: Hlasování o platech





# Vězňovo dilema

- Dva podezřelí jsou zatčeni a postaveni před následující problém: pokud by oba statečně zapírali, putovali by do vězení na tři roky. Pokud by se jeden z nich přiznal a udal zároveň toho druhého, dostal by jeden rok, zatímco druhý by byl odsouzen na 25 let. Pokud by se doznali oba, byli by posláni do vězení na 10 let.

		Hráč 1	
		Zapírat	Přiznat
Hráč 2	Zapírat	$(-3, -3)$	$(-25, -1)$
	Přiznat	$(-1, -25)$	$(-10, -10)$

# Opakované věžňovo dilema

- Uskuteční-li se hra jednou a není možné dopředu uzavřít skutečně závaznou dohodu, zvolí racionální hráč dominující strategii „přiznat se“.
- Ocitá-li se však daná dvojice hráčů ve stejné situaci opakovaně, v nekonečném či neurčitým časovém horizontu, může být již strategií více.

# Příklady strategií v opakovaném vězňově dilematu

- vždy spolupracuje
- vždy zradí
- nevraživec – spolupracuje, dokud jej protihráč nezradí, pak navždy zrazuje
- půjčka za oplátku – v prvním tahu spolupracuje, v dalších opakuje tah protihráče
- naivní pokušitel – jako půjčka za oplátku, ale občas zradí

# Bayesovské hry

= Hry s neúplnou informací

- Neúplná informace - informace, u které někteří hráči neznají hodnoty výplatních funkcí některých dalších hráčů.
- Většina reálných situací je s neúplnou informací

## Příklad 1.a:

- na trhu působí *Firma1*, která zvažuje otevření své další pobočky, a *Firma2*, která zvažuje vstoupení či nevstoupení na trh
- své strategie zvažují obě firmy současně
- *Firma2* si není jistá, jaké jsou náklady *Firmy1* na postavení závodu. Ví pouze, že budou buď vysoké, a to v hodnotě 3 milionů korun, nebo nízké - pro jednoduchost uvažme nejprve nulové
- hodnota výplatní funkce *Firmy2* nezávisí přímo na těchto nákladech, ale na skutečnosti, zda *Firma1* postaví nebo nepostaví nový závod

# Pro vysoké náklady

		Firma2	
		Vstoupit	Nevstoupit
Firma1	Otevřít	(0, -1)	(2, 0)
	Neotevřít	(2, 1)	(3, 0)

# Pro nízké náklady

		Firma2	
		Vstoupit	Nevstoupit
Firma1	Otevřít	(3, -1)	(5, 0)
	Neotevřít	(2, 1)	(3, 0)

➤ *Firma1* má soukromé informace o nákladech na otevření nové pobočky a je zřejmé, že závod postaví pouze v případě, když budou náklady nízké.

➤ Označme:

$p$ .....pravděpodobnost, kterou *Firma2* přiřadí situaci, kdy jsou náklady *Firmy1* vysoké

$1-p$ .....pravděpodobnost, kterou *Firma2* přiřadí situaci, kdy jsou náklady *Firmy1* nízké



*Firma2* je postavena před loterií:

- 1) S pravděpodobností  $p$  jsou výplatní funkce dány první dvojmaticí a *Firma2* na trh nevstoupí.
- 2) S pravděpodobností  $1-p$  jsou výplatní funkce dány druhou dvojmaticí a *Firma2* na trh vstoupí.

Jestliže *Firma2* na trh vstoupí, pak s pravděpodobností  $p$  bude její výplatní funkce 1 milion. S pravděpodobností  $1-p$  to bude -1 milion.

Očekávaná výplatní hodnota pro *Firmu2* je

$$1p + (-1)(1-p) = 2p - 1.$$

*Firmě2* se vyplatí vstoupit na trh, pokud bude výplatní hodnota kladná, tj.  $p > 0,5$ . Pokud *Firma2* na trh nevstoupí, pak bude její výplatní hodnota v každém případě nulová.

## Příklad 1.b:

Nyní předpokládejme, že nízké náklady nejsou nulové, ale 1,5 milionu. Pro tyto nízké náklady jsou potom hodnoty výplatních funkcí následující:

		Firma2	
		Vstoupit	Nevstoupit
Firma1	Otevřít	(1.5, -1)	(3.5, 0)
	Neotevřít	(2, 1)	(3, 0)

Optimální strategie *Firmy1* nyní závisí na odhadu, co bude dělat *Firma2*.

Označme:

$q$ .....pravděpodobnost, kterou *Firma1* přiřadí skutečnosti, že *Firma2* vstoupí na trh

$1-q$ .....pravděpodobnost, kterou *Firma1* přiřadí skutečnosti, že *Firma2* nevstoupí na trh

*Firmě1* se pak vyplatí otevřít pobočku, bude-li platit:

$$1,5q+3,5(1-q) > 2q+3(1-q)$$

tedy  $q < 0,5$

*Firma1* se tedy musí pokusit odhadnout chování *Firmy2*, aby mohla vybrat svoji vlastní strategii.

*Firma2* nemůže odhadnout strategii *Firmy1* jen z její znalosti výplatních funkcí.

# Shrňme dosavadní výsledky:

## *Firma1:*

- při vysokých nákladech nepostaví nový závod
- při nízkých nákladech
  - postaví nový závod, jestliže  $q < 0,5$
  - nepostaví nový závod, jestliže  $q > 0,5$

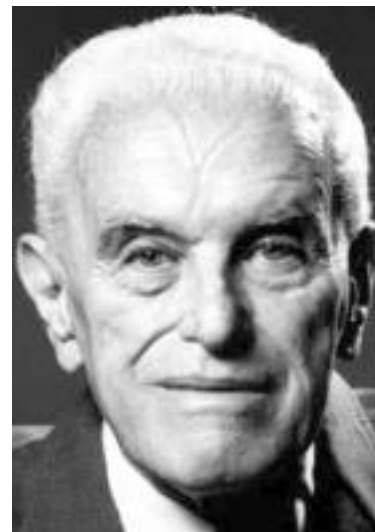
## *Firma2:*

- $q=1$  (vstoupí na trh), pokud  $p > 0,5$
- $q=0$  (nevstoupí na trh), pokud  $p < 0,5$
- $q$  náleží do  $(0,1)$ , pokud  $p=0,5$

Situace s neúplnou informací zvyšuje nutnost uvažování názoru hráče na preference ostatních hráčů, jeho názory, jeho názory na názory ostatních o jeho preferencích, jeho názory o jeho názorech o jeho názorech o jeho preferencích, atd. A takto se spustí cyklický systém názorů. Tento postup se zdá být neschůdný.

Způsob, jak modelovat a pochopit tuto situaci bez nekonečného cyklického systému názorů vyvinul v 60. letech 20. století držitel Nobelovy ceny za ekonomii profesor **John C. Harsanyi** (1920-2000).

Odstranil hlavní nedostatek konceptu Nashovy rovnováhy, spočívající v předpokladu, že jednotliví účastníci hry mají úplné informace o preferencích ostatních hráčů.



J. Harsanyi vyvinul metodu, jak transformovat hry s neúplnými informacemi (bayesiánské hry) na hry s úplnými informacemi, které pak mohou být analyzovány s pomocí standardních nástrojů.

John Harsanyi tvrdí, že i ty hry, kde účastníkům chybějí znalosti o strategii soupeřů, mohou být analyzovány takřka stejně jako hry normální. Výhody samozřejmě získává ten hráč, který na rozdíl od svých rivalů disponuje potřebnými informacemi.

Navrhl zavést tah fiktivního hráče nazvaného Příroda, který určuje tzv. **typ** každého hráče. V našem příkladě to byly náklady na postavení závodu (vysoké, nízké). Každý hráč zná svůj typ a všechny možné typy ostatních hráčů (spolu s příslušnými pravděpodobnostmi), což znamená, že hra je nyní hrou s úplnou, ale nejistou, informací. Všichni hráči znají všechny možné výplatní hodnoty všech typů všech hráčů, ale ne všichni zjistí tah fiktivního hráče nazvaného Příroda.

*Standardním předpokladem je skutečnost, kdy všichni hráči mají stejné názory na pravděpodobnostní rozdělení tahu Přírody. Dostáváme tedy Hru s úplnou, ale nejistou informací, na kterou může být použita koncepce Nashovy rovnováhy.*

# Definice:

Bayesovská hra  $H$  je určena:

1. Množinou hráčů:  $\{1, 2, \dots, N\}$

2. Množinou prostorů strategií:  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$

Zde  $X_i$  označuje prostor strategií  $i$ -tého hráče. Konkrétní strategie budeme dále značit  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

3. Množinami prostorů typů hráčů:  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ .

Typ  $t_i$  náležící do  $T_i$  odpovídá určité výplatní funkci, kterou může mít hráč  $i$ . Hráč  $i$  zná svůj typ, ale nezná typy ostatních hráčů.

4. Množinou názorů hráčů:  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ .

$p_i$  představuje názor hráče  $i$ , který má o typech dalších hráčů

5. Množinou výplatních funkcí všech hráčů:

$$\{f_1(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N), \dots, f_N(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N)\}.$$



Abychom mohli použít Harsanyiovu koncepci, budeme reformulovat hru s neúplnou informací následovně:

- budeme považovat každý typ každého hráče za samotného hráče
- budeme předpokládat, že Příroda náhodně vybere ty hráče, kteří budou hru skutečně hrát
- každý typ každého hráče musí vybrat svoji strategii dříve než udělá svůj první tah Příroda

# Definice:

Rozšířená Bayesovská hra  $H^*$  je určena:

1. Množinou hráčů:  $\{1, 2, \dots, M\}$

kde  $M = \sum |T_i|$

hráč  $j=(i,t_i)$

2. Množinou prostorů strategií:  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_M\}$

3. Množinou výplatních funkcí všech hráčů:

$\{g_1(y_1, \dots, y_M), \dots, g_M(y_1, \dots, y_M)\}$

## Definice: (Bayesova-Nashova rovnováha)

Bayesova-Nashova rovnováha ve hře s neúplnou informací  $H$  je Nashova rovnováha ve hře s nejistou informací  $H^*$ , která je reprezentací původní hry  $H$ .

## Věta:

Každá konečná hra s neúplnou informací má alespoň jedno Bayesovo-Nashovo rovnovážné řešení.

## **Pokračování příkladu 1.b:**

Označme:

VN.....vysoké náklady

NN.....nízké náklady

OT.....otevřít novou pobočku

NEOT.....neotevřít novou pobočku

VST.....vstoupit na trh

NEVST.....nevstoupit na trh

Z.....zvažovat vstup

H:

H\*:

**Hráči a typy:**

$\{1, 2\}, T_1 = \{VN, NN\}, T_2 = \{Z\}$

$\{1, 2, 3\} = \{(1, VN), (1, NN), (2, Z)\}$

**Strategie:**

$X_1 = \{OT, NEOT\}, X_2 = \{VST, NEVST\}$

$Y_1 = Y_2 = X_1 = \{OT, NEOT\},$   
 $Y_3 = X_2 = \{VST, NEVST\}$

**Názory a výplatní funkce:**

$p(VN) = p, p(NN) = 1 - p$   
 $f_i(x_1, x_2, VN), f_i(x_1, x_2, NN)$

$g_1(y_1, y_2, y_3) = f_1(x_1, x_2, VN)$   
 $g_2(y_1, y_2, y_3) = f_1(x_1, x_2, NN)$   
 $g_3(y_1, y_2, y_3) = pf_2(x_1, x_2, VN) + (1 - p)f_2(x_1, x_2, NN)$

## Označme:

$p_{ot}$ .....pravděpodobnost, že hráč (1, NN) otevře novou pobočku

$1-p_{ot}$ ....pravděpodobnost, že hráč (1, NN) neotevře novou pobočku

$q$ .....pravděpodobnost, že hráč (2, Z) vstoupí na trh

$1-q$ .....pravděpodobnost, že hráč (2, Z) nevstoupí na trh

**Přístupme nyní k samotnému hledání Nashovy rovnováhy této hry s nejistou informací:**

**(1, VN):**

		<b>(2, Z)</b>	
		<b>VST (q)</b>	<b>NEVST (1 - q)</b>
<b>(1, VN)</b>	<b>Strategie</b>		
	<b>OT (<math>p_{ot}</math>)</b>	<b>(0, -1)</b>	<b>(2, 0)</b>
	<b>NEOT (<math>1 - p_{ot}</math>)</b>	<b>(2, 1)</b>	<b>(3, 0)</b>

Je jasně vidět, že hráč (1, VN) má dominantní strategii NEOT, tedy *Firma1* nebude při vysokých nákladech pobočku otvírat.

(1, NN):

		(2, Z)	
		VST (q)	NEVST (1 - q)
(1, NN)	Strategie		
	OT ( $p_{ot}$ )	(1.5, -1)	(3.5, 0)
	NEOT ( $1 - p_{ot}$ )	(2, 1)	(3, 0)

$p_{ot} = 1$ ..... očekávaná výhra:  $1.5q + 3.5(1-q) = 3.5 - 2q$

$p_{ot} = 0$ ..... očekávaná výhra:  $2q + 3(1-q) = 3 - q$

$$3.5 - 2q = 3 - q$$

$$q = 0.5$$



**Tedy nejlepší odezva pro hráče (1, NN) je:**

$$p_{ot} = \begin{array}{ll} 1 & \text{pro } q < 0.5 \\ 0 & \text{pro } q > 0.5 \\ (0,1) & \text{pro } q = 0.5 \end{array}$$

(2, Z):

		(2, Z)	
		VST (q)	NEVST (1 - q)
(1, NN)	Strategie		
	POST ( $p_{ot}$ )	(1.5, -1)	(3.5, 0)
	NEPOST ( $1 - p_{ot}$ )	(2, 1)	(3, 0)

očekávaná výhra pro VST:

$$1 \cdot p + (1-p) [p_{ot}(-1) + 1(1-p_{ot})] = 1 - 2p_{ot}(1-p)$$

očekávaná výhra pro NEVST:

$$0 \cdot p + (1-p) [p_{ot}0 + (1-p_{ot})0] = 0$$

$$1 - 2p_{ot}(1-p) = 0$$

$$p_{ot} = 1 / [2(1-p)]$$

**Tedy nejlepší odezva pro hráče (2, Z) je:**

$$q = \begin{array}{ll} 1 & \text{pro } p_{ot} < 1 / [2(1-p)] \\ 0 & \text{pro } p_{ot} > 1 / [2(1-p)] \\ (0,1) & \text{pro } p_{ot} = 1 / [2(1-p)] \end{array}$$

# Rovnovážné strategie:

Rovnovážné strategie zapíšeme ve tvaru vektoru:

*(Strategie pro Firmu 1 s VN, Strategie pro Firmu 1 s NN, Strategie pro Firmu 2)*

1) Pro  $p < \frac{1}{2}$  dostáváme:

(NEOT, NEOT, VST);

(NEOT, OT, NEVST);

(NEOT, OT s  $p_{ot} = 1 / [2(1-p)]$ , VST s  $q = \frac{1}{2}$ )

2) Pro  $p > \frac{1}{2}$  dostáváme:

(NEOT, NEOT, VST)

Děkuji za pozornost