Generující funkce, diskrétní martingaly

Jana Štrosová

13. 3. 2013

Obsah

Úvod

Mějme posloupnost reálných čísel $a = \{a_i; i = 0, 1, 2, \ldots\}$.

- velké množství informace $\rightarrow$ "zakódujeme"do jediného objektu
- možnost použít operace (např. derivaci)

Definice

Generující funkce posloupnosti

Generující funkce posloupnosti a je funkce daná součtem mocninné řady

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i,$$

pro $s \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje.

Posloupnost a dostaneme z generující funkce G_a zpět vztahem

$$a_i = \frac{G_a^{(i)}(0)}{i!}.$$

Příklad

Vyjádřete generující funkci posloupnosti
$a = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots\}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
G_a(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \\
&= 0 \cdot s^0 + 1 \cdot s^1 + 0 \cdot s^2 - 1 \cdot s^3 + 0 \cdot s^4 + 1 \cdot s^5 + 0 \cdot s^6 + \dots \\
&= s^1 - s^3 + s^5 + \dots \\
&= \frac{s}{1+s^2}, |s| < 1
\end{aligned}
$$

Definice II

Generující funkce náhodné veličiny

Generující funkce náhodné veličiny X je definována jako generující funkce její pravděpodobnostní funkce, tedy

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)s^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i)s^i.$$

Platí zřejmě $G_X(s) = E(s^X)$.

Základní vlastnosti

1. $\exists R \geq 0$ (poloměr konvergence) takové, že $G(s)$ konverguje pro $|s| < R$ a diverguje pro $|s| > R$.
2. $G(s)$ můžeme derivovat nebo integrovat člen po členu, libovolně mnohokrát, pro $|s| < R$.
3. Jednoznačnost: Je-li $G_a(s) = G_b(s)$ pro $|s| < R'$, kde $0 < R' \leq R$, pak $a_n = b_n, \forall n$.

Příklady

Příklady

Vypočítejte generující funkce náhodných veličin:

1. Konstantní náhodná veličina. $P(X = c) = 1$, kde $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tedy $G_X(s) = s^c$.
2. Bernoulliho náhodná veličina. $P(X = 1) = p$ a $P(X = 0) = 1 - p$. Tedy $G_X(s) = 1 - p + ps$.
3. Geometrické rozdělení. $P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy $G_X(s) = \frac{sp}{1-s+sp}$.
4. Poissonovo rozdělení s parametrem λ. $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Tedy $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ s využitím $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Řešení.

1. $G_X(s) = 1 \cdot s^c = s^c$
2. $G_X(s) = (1-p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1 - p + ps$
3. $G_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \cdot s^i = ps \sum_{i=1}^{\infty} [(1-p)s]^{i-1} = \frac{sp}{1 - s + sp}$
4. $G_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot s^i = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{\lambda(s-1)}$

Věta

Nechť X je náhodná veličina s generující funkcí $G(s)$. Pak platí

$$E(X(X-1)\dots(X-k+1)) = G^{(k)}(1)$$

(tzv. k-tý faktoriální moment), speciálně

$$E(X) = G'_X(1)$$

a

$$D(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

Odvození rozptylu

$$\begin{aligned} DX &= EX^2 - (EX)^2 = E(X(X-1)+X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1)) + EX - (EX)^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2. \end{aligned}$$

Konvoluce

Definice

Nechť $a = a_i, i \geq 0$ a $b = b_i, i \geq 0$ jsou dvě posloupnosti, pak konvoluce $c = a \star b$ je posloupnost definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Věta

Generující funkce konvoluce dvou posloupností je součinem generujících funkcí těchto posloupností.

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \Big) s^n \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \Big) \Big(\sum_{n=i}^{\infty} b_{n-i} s^{n-i} \Big) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \Big) \\
&= G_a(s) G_b(s)
\end{aligned}
$$

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Důkaz. Z nezávislosti víme, že pro pravděpodobnostní funkci $X+Y$ platí $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$. Podle předchozí věty platí $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Sdružená pstní fce

Definice

Sdružená pravděpodobnostní generující funkce náhodných veličin, nabývajících hodnot v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je definovaná jako

$$G_{X_1,X_2}(s_1, s_2) = \sum P(X_1 = i \wedge X_2 = j) s_1^i s_2^j = E(s_1^{X_1} s_2^{X_2}).$$

Analogicky je možné definovat sdruženou pravděpodobnostní generující funkci pro více náhodných veličin.

Generující funkce a náhodná procházka

Uvažujme náhodnou procházku

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde $P(X_i = 1) = p$ a $P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Přitom X_i jsou nezávislé a $S_0 = 0$.

- Jak často se náhodná procházka vrací do počátku?
- Jaké je pravděpodobnostní rozdělení prvního návratu do počátku?

Návrat do počátku

Označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

a

$$f_0(n) = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0).$$

Uvažujme generující funkce těchto dvou posloupností

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n$$

a

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) s^n.$$

Lemma

Platí

$$P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Důkaz

- $S_n = 0 \iff$ počet kroků doprava = počet kroků doleva, tedy $r = \frac{n}{2} = l$
- počet takových cest je $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro n sudé a 0 pro n liché
- označme $k = \frac{n}{2}$, tj. $n = 2k$, máme

$$p_0(2k) = \binom{2k}{k} p^k q^k$$

a

$$P_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pqs^2)^k$$

- využijeme obecného binomického rozvoje

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^a$$

- dosadíme $a = -\frac{1}{2}$ a $x = -4pqs^2$ a porovnáme

Návrat do počátku II

Věta

Platí

$$P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$$

a

$$F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Označme A jev, že $S_n = 0$ a nechť B_k jsou jevy takové, že první návrat do počátku nastal v k-tém kroku.

Důkaz

- B_k jsou disjunktní a dávají rozklad, tedy

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) P(B_k)$$

- máme $P(B_k) = f_0(k)$ a $P(A \mid B_k) = p_0(n-k)$, tedy

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^{n} p_0(n-k) f_0(k)$$

- vynásobíme s^n a sečteme

$$LS : \sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) s^n = P_0 - 1$$

Pokračování důkazu

$$
\begin{aligned}
PS: \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_0(n-k) f_0(k) s^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_0(k) s^k\Big)\Big(\sum_{n=k}^{\infty} p_0(n-k) s^{n-k}\Big) \\
&= P_0(s) F_0(s)
\end{aligned}
$$

Dostáváme $P_0 - 1 = P_0 F_0$, tedy $P_0 = 1 + P_0 F_0$.

Strategie martingalu

- hráč disponuje neomezenými zdroji
- vsadí 1 Kč, když prohraje, tak vsadí 2 Kč, pokud prohraje v n-té hře, pak následující hru vsadí 2^n Kč
- nefunkčnost: omezené prostředky, horní hranice sázek

Diskrétní martingal

Definice

Posloupnost náhodných proměnných $S_n, 0 \le n < \infty$, která pro všechna $n \ge 1$ splňuje

$$E[S_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}] = S_{n-1}$$

(základní martingalová identita), nazýváme martingal vzhledem k posloupnosti náhodných proměnných $X_n, 1 \le n < \infty$.

Literatura

- skripta doc. Koláře ke Stochastickým procesům ve finanční matematice
- diplomová práce Lenky Křivánkové: Wienerův proces a jeho aplikace
- bakalářská práce Aleny Robotkové: Martingaly
- http://cs.wikipedia.org/wiki/Martingale (březen 2013)