Teória portfólia

Miriama Gardianová

Finanční matematika

Definícia

- **Portfólio** - súbor rôznych investícií (peňažná hotovosť, cenné papiere, nehnuteľnosti, atď.), ktoré investor vytvára so zámerom minimalizovať riziko spojené s investovaním a súčasne maximalizovať výnos z týchto investícií
- **Teória portfólia**
  - jedná sa o mikroekonomickú disciplínu, ktorá skúma, aké kombinácie aktív je vhodné držať, aby takto vytvorené portfólio malo dopredu určené vlastnosti
  - ako zbohatnúť pomocou rôznych finančných operácií typu: *„Lacno kúpiť a draho predať.“*

Základné pojmy

- portfólio = súbor aktív
- *delenie aktív*:
  - hmotné - hnuteľnosti
  - nehmotné – know-how, software
  - finančné – hotovosť, depozitá, CP
- *investícia* – aktívum, ktoré prináša majiteľovi dôchodkový tok (+,-)
- *ideálne aktívum* – max. výnosnosť, max. likvidita, min. riziko → neexistuje
- Výnosnosť, riziko a likvidita → *magický trojuholník investovania* : $V \uparrow\ R \uparrow L \downarrow$, teda investor nedosiahne všetkých cieľov naraz

Investícia ako náhodná veličina

- **Náhodná veličina** (NV)
  - veličina, ktorej hodnota je určená výsledkom daného pokusu
  - najdôležitejším rysom je premenlivosť jej hodnôt v priebehu opakovaní pokusu vplyvom náhodných činiteľov
- Výnosnosť investície – diskrétna NV
  - aj keď očakávame nejakú jej hodnotu, nikdy nemôžeme s istotou vedieť, že túto hodnotu dosiahne (okrem bezrizikovej investície)
  - určenie rozdelenia prsti je v mnohý prípadoch značne zložité, preto rozdelenie NV určíme približne pomocou číselných charakteristík: ***stredná hodnota, rozptyl, kovariancia, korelácia***

Charakteristika aktív

- **Očakávaná výnosnosť**
  - tiež výnosová miera, ktorá predstavuje odmenu investorovi za podstúpenie rizika pri danej investícii
  - *Ex ante → expertná metóda*
    - vychádza z odhadov a prognóz expertov, ktorí určia budúce hodnoty investície a psti, s akými tieto hodnoty nastanú

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot p_j$$

  - *Ex post → historická metóda*
    - opiera sa o historické dáta, ktoré udávajú, aký výnos aktívum poskytovalo v minulosti

$$r_j = \frac{P_t - P_{t-k} + D - T - C_0}{P_{t-k}}$$

    - ďalej budeme uvažovať len kapitálovú výnosnosť

Charakteristika aktív

- celkovú výnosovú mieru pre dané obdobie dostaneme ako aritmetický priemer daných výnosností

$$\overline{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

- **Riziko očakávanej výnosnosti**
  - neistota investora alebo nebezpečenstvo, že investor nedosiahne očakávanej výnosnosti
  - *Ex ante*

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (r_j - \overline{r}_i)^2 p_j}$$

  - *Ex post*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} (r_t - \overline{r})^2}{T}}$$

Charakteristika portfólia

- majme portfólio zložené z *n* akcií
- i-ta akcia má v portfóliu váhu (podiel) X_i a očakávanú výnosnosť $\overline{r_i}$
- **očakávaná výnosnosť**

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \cdot X_i = \overline{r_1} \cdot X_1 + \cdots + \overline{r_n} \cdot X_n$$

- predpokladáme, že investor investuje všetky prostriedky, teda pre súčet váh platí

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

Charakteristika portfólia

- **riziko očakávanej výnosnosti**
  - pre výpočet použijeme rozptyl (resp. smerodajnú odchýlku)
  - vychádzame zo vzorca pre výpočet rozptylu

$$D(X) = E[X - E(X)]^2$$

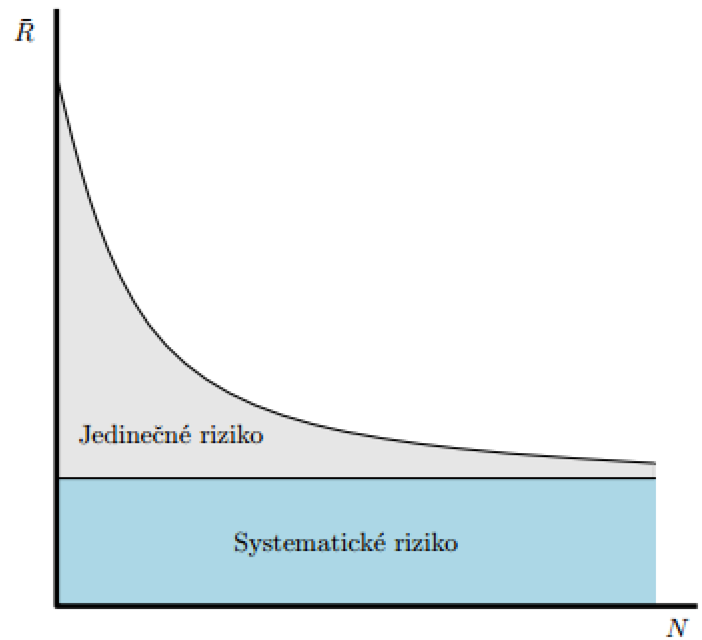
  - Po úprave a zovšeobecnení dostaneme vzťah

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

- celkové riziko môžeme rozdeliť na 2 časti:
  - *jedinečné riziko* (nesystematické)
  - *tržné riziko* (systematické)

Charakteristika portfólia

- pre počet aktív v portfóliu $n \to \infty$ sa celkové riziko portfólia blíži k systematickému riziku → vhodnou diverzifikáciou sa dá jedinečné riziko eliminovať



Markowitzov model

- H. Markowitz – zakladateľ modernej teórie portfólia
- predpokladá, že investor má v súčasnej dobe určité množstvo peňazí
- bude ich investovať na určité časové obdobie → *doba držania portfólia*
- na konci doby držby investor nakúpené a držané CP predá a zisk buď použije na vlastnú potrebu alebo ho opäť investuje
- na Markowitzov prístup môžeme pozerať ako prístup jedného obdobia: začiatok *t=0,* koniec *t=1*
- v *t=0* musí investor rozhodnúť, ktoré CP má → výber optimálneho portfólia z množiny možných portfólií nakúpiť a držať do *t=1* → *problém výberu portfólia*

Problém výberu portfólia

- investor pri hľadaní sleduje dva konfliktné ciele: maximalizácia očakávaného zisku a minimalizácia rizika
- investor by mal odhadnúť očakávanú výnosnosť a smerodajnú odchýlku každého portfólia a potom vybrať najlepšie na základe relatívnej veľkosti týchto dvoch parametrov
- rozhodnutie investora by sa malo opierať o jeho postoje k riziku a výnosnosti, ktoré sú vyjadrené pomocou *kriviek indiferencie*

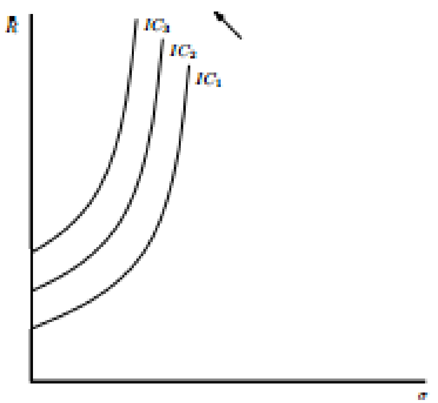
Krivky indiferencie (KI)

- reprezentujú preferencie rizika a výnosnosti daného investora
- Vlastnosti:
  - Všetky portfólia, ktoré ležia na danej KI sú pre investora rovnako žiaduce
  - Investor považuje za lepšie ľubovoľné portfólio ležiace na „vyššej“ KI než iné portfólio na „nižšej“ KI
  - KI sa nemôžu pretínať
  - Investor má nekonečne mnoho KI
- tvar KI ovplyvňujú dva predpoklady
  - nenasýtenosť →
  - odpor k riziku →

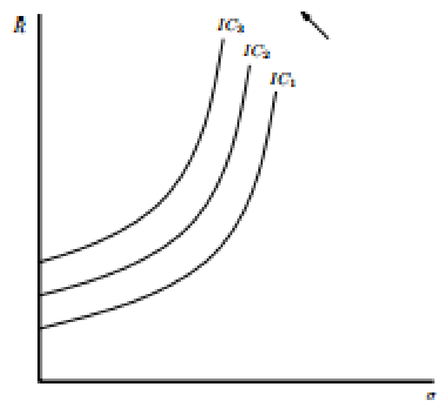
konvexné

Krivky indiferencie (KI)

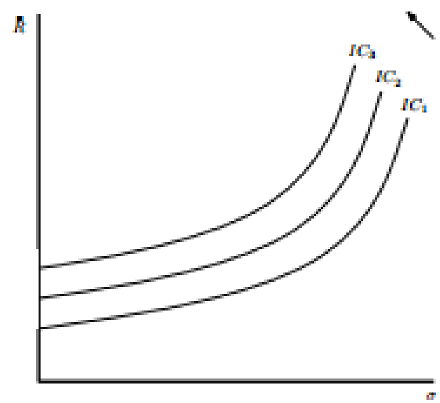
- približný tvar KI je pre každého investora rovnaký, čo je jedinečné je investorov odpor k riziku



(a) Silná averze k riziku



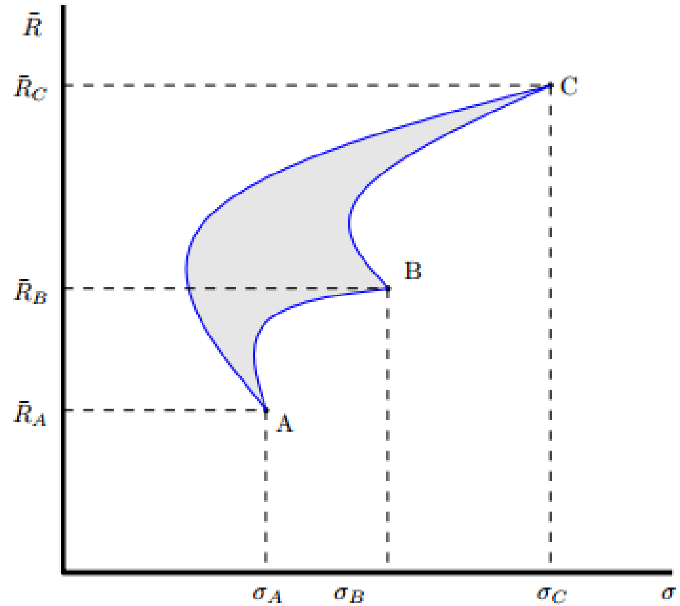
(b) Normální averze k riziku



(c) Malá averze k riziku

Efektívna množina

- z množiny *n* CP môže investor vytvoriť nekonečný počet portfólií – **prípustná množina**

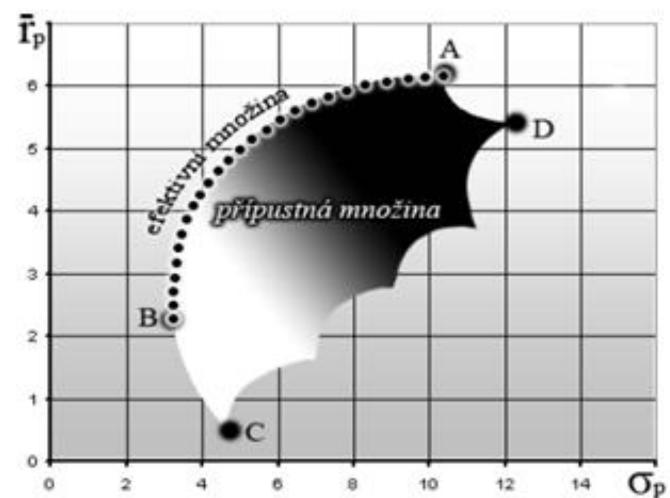


- investor nemusí vyhodnocovať všetky portfólia

Efektívna množina

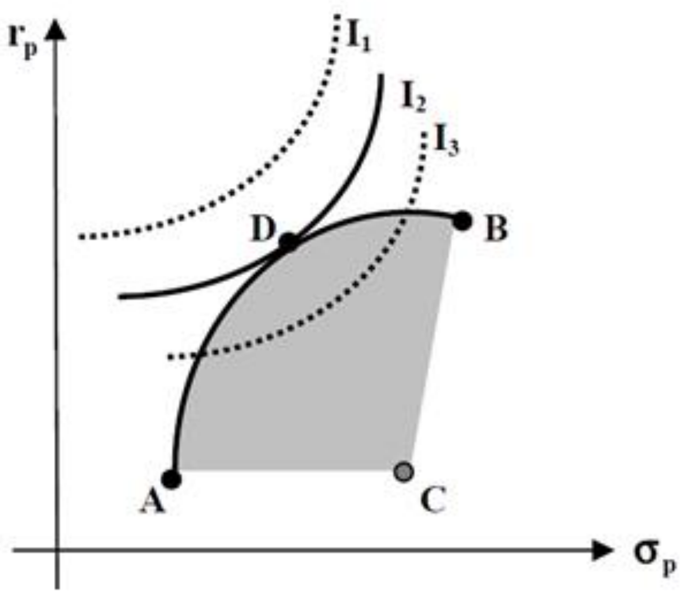
- riešením je *veta o efektívnej množine:*
  - na základe predpokladu nenasýtenosti a odporu k riziku:
    - investor si vyberie maximálnu očakávanú výnosnosť pri rôznych úrovniach rizika
    - investor si pri danej očakávanej výnosnosti vyberie portfólio s najnižším rizikom

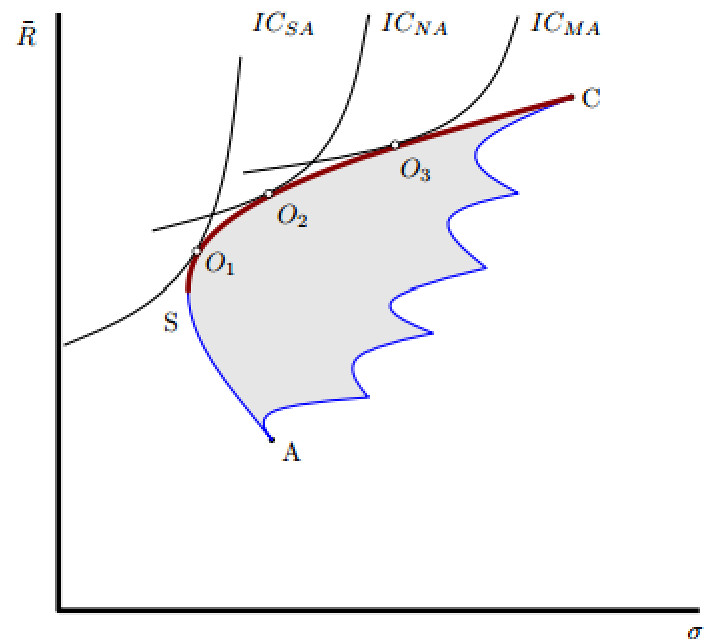
- množina portfólií, ktoré splňujú tieto dve podmienky sa nazýva **efektívna množina**



Výber optimálneho portfólia

- optimálne portfólio odpovedá bodu, kde sa krivka indiferencie dotýka efektívnej množiny
- z obr. naľavo optimálne portfólio predstavuje bod D





- obr. napravo zobrazuje optimálne portfólia pre investorov s odlišným odporom k riziku

Bezriziková investícia

- investícia, ktorej výnosnosť r_f je istá
- a teda investor nepodstupuje žiadne riziko $\sigma_f = 0$
- napr. štátne pokladničné poukážky
- investor môže časť svojich prostriedkov vložiť do bezrizikovej investície a časť do rizikového aktíva
- portfólio: investujeme časť *X* do rizikového aktíva *A* a časť *(1-X)* do bezrizikového aktíva *f*
- *Výnosnosť:* $\overline{r_p} = (1 - X) \cdot r_f + X \cdot r_A$
- *Riziko:* $\sigma_p = \sqrt{(1 - X)^2 \cdot \sigma_f^2 + X^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot X \cdot (1 - X) \cdot \sigma_{Af}}$

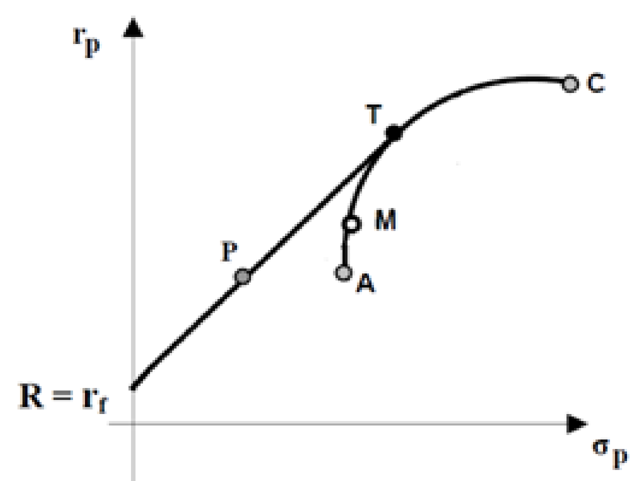
$$\sigma_p = X \cdot \sigma_A$$

Bezriziková investícia

- všetky kombinácie medzi bezrizikovým aktívom a rizikovým aktívom ležia na priamke v tvare

$$\overline{r_p} = r_f + \left(\frac{r_A - r_f}{\sigma_A} \right) \cdot \sigma_p$$

- efektívna množina sa rozšírila
- z ATC → na RTC



Hľadanie optimálneho portfólia

- vychádza sa z minimalizácie rizika nakoľko pri maximalizácií výnosnosti sa nedá vždy dôjsť k riešeniu

$$\sigma_p(X) \to \min \qquad X = (X_1, X_2, ..., X_n) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

- ďalšia podmienka – požadovaná výnosnosť

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \overline{r_i}$$

- alebo podmienka, ktorá zakazuje sell short

$$X_i \geq 0, i = 1, ..., n$$

- minimalizačnú úlohu riešime pomocou Lagrangeových multiplikátorov

Hľadanie optimálneho portfólia

- Lagrangeova funkcia je v tvare

$$L(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j\sigma_{ij}+\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-1\right)+\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{r_i}-\overline{r_p}\right)$$

- kde λ_1,λ_2 sú Lagrangoeve multiplikátory
- pre existenciu extrému musí platiť $\dfrac{\partial L(Y)}{\partial X_i}=0,\forall i$
- po úprave dostávame sústavu *n*+2 rovníc o *n*+2 neznámych

Hľadanie optimálneho portfólia

- maticovo to môžeme zapísať

$$
\begin{array}{cccccccc}
X_1 & X_2 & & X_n & \lambda_1 & \lambda_2 & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \cdots & 2\sigma_{1n} & | & 1 & \overline{r}_1 & | & 0 \\
2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2n} & | & 1 & \overline{r}_2 & | & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & | & \vdots \\
2\sigma_{1n} & 2\sigma_{2n} & \cdots & 2\sigma_n^2 & | & 1 & \overline{r}_n & | & 0 \\
-- & -- & -- & -- & | & -- & -- & | & -- \\
\overline{r}_1 & \overline{r}_2 & \cdots & \overline{r}_n & | & 0 & 0 & | & \overline{r}_p \\
1 & 1 & \cdots & 1 & | & 0 & 0 & | & 1
\end{pmatrix}
$$

- riešením tejto sústavy dostaneme vektor váh ***X***

Použitá literatúra

- ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2. přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 115 s. ISBN 978-802-1042-520
- VALENTA, Petr. Teorie portfolia a modely rovnováhy na kapitálových trzích [online]. 2012 [cit. 2012-11-29]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Ekonomicko-správní fakulta. Vedoucí práce Petr Červinek. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/175412/esf_m/
- ČERVINEK, Petr. učebné materiály k predmetu *MPF_TEPO Teorie portfolia*

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ