Wienerův proces, spojité martingaly, filtrace

Anna Vymětalová

Seminář z finanční matematiky

Jaro 2013

Plán přednášky

1. Wienerův proces
2. Spojité martingaly
3. Filtrace

Plán přednášky

1. Wienerův proces
2. Spojité martingaly
3. Filtrace

Plán přednášky

1. Wienerův proces
2. Spojité martingaly
3. Filtrace

- nazýván také Brownův pohyb
- stochastický proces ve spojitém čase a spojitých hodnotách
- modifikace náhodné procházky s časovým krokem $\triangle t$ a prostorovým krokem $\triangle x$, lze konstruovat přímo jako limitu náhodné procházky
- modifikace se využívá k popisu chování kurzu akcie

Definice

Stochastický proces $X = \{X(t), t \in T\}$ *je soubor náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *kde* T *značí indexovou množinu a* $X(t)$ *je náhodná veličina.*

čas	hodnoty	příklad
diskrétní	diskrétní	standardní náhodná procházka
spojitý	spojité	Wienerův proces
spojitý	diskrétní	Poissonův proces
diskrétní	spojité	zobecněná náhodná procházka

$X(t, \omega)$ pak značí hodnotu procesu v čase t a ve "scénáři" ω. Pro pevné ω (víme, jaký scénář se realizoval) je $X(t)$ realizací procesu a nazývá se *trajektorie*.

Definice

Stochastický proces $W(t)$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá (standardní) ***Wienerův proces****, jestliže platí:*

1. *(začátek v nule)* $W(0) = 0$
2. *(spojitost trajektorií) S pravděpodobností* 1 *jsou trajektorie procesu spojité.*
3. *(nezávislost a normalita přírůstků) Přírůstky procesu* $W(t) - W(s)$ *mají rozdělení* $N(0, t-s)$. *Pro libovolné* $0 < t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq t_3 < \ldots \leq t_n < s_n$ *jsou přírůstky* $W(t_i) - W(s_i)$ *pro* $\forall i \in \langle 1, n \rangle$ *navzájem nezávislé náhodné veličiny.*

- Limita náhodné procházky:
  - zmenšování prostorového a časového kroku
  - využití centrální limitní věty pro normalitu přírůstků
- Lévyho konstrukce Wienerova procesu
- Ciesielskiho konstrukce:

Věta

Ciesielskiho konstrukce Wienerova procesu. *Nechť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Pak součet*

$$W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\, s_k(t)$$

*je **Wienerův proces**.s_k značí Schauderovy funkce (integrál z Haarovy funkce).*

trajektorie začínají v nule (neboť Schauderovy fce začínají v nule), spojitost trajektorií plyne ze stejnoměrné konvergence řady (Schauderovy fce spojité→součet zachová spojitost. Nezávislost a normalita přírůstků se dokazuje pomocí charakteristické fce.

- Limita náhodné procházky:
  - zmenšování prostorového a časového kroku
  - využití centrální limitní věty pro normalitu přírůstků
- Lévyho konstrukce Wienerova procesu
- Ciesielskiho konstrukce:

Věta

Ciesielskiho konstrukce Wienerova procesu. *Nechť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Pak součet*

$$W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\, s_k(t)$$

je ***Wienerův proces****.s_k značí Schauderovy funkce (integrál z Haarovy funkce).*

trajektorie začínají v nule (neboť Schauderovy fce začínají v nule), spojitost trajektorií plyne ze stejnoměrné konvergence řady (Schauderovy fce spojité→součet zachová spojitost. Nezávislost a normalita přírůstků se dokazuje pomocí charakteristické fce.

- Limita náhodné procházky:
  - zmenšování prostorového a časového kroku
  - využití centrální limitní věty pro normalitu přírůstků
- Lévyho konstrukce Wienerova procesu
- Ciesielskiho konstrukce:

Věta

Ciesielskiho konstrukce Wienerova procesu. *Nechť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Pak součet*

$$W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\, s_k(t)$$

*je **Wienerův proces**.s_k značí Schauderovy funkce (integrál z Haarovy funkce).*

trajektorie začínají v nule (neboť Schauderovy fce začínají v nule), spojitost trajektorií plyne ze stejnoměrné konvergence řady (Schauderovy fce spojité→součet zachová spojitost. Nezávislost a normalita přírůstků se dokazuje pomocí charakteristické fce.

Wienerův proces
Lineární variace

obecně variace popisuje míru proměnlivosti funkce. Nejprve pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ uvažujme nějaké dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, $D : \{a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b\}$. Lineární variaci funkce f příslušnou dělení D pak definujeme jako $LV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ (součet vzdáleností hodnot funkce ve dvou sousedících dělících bodech). Zjemněním dělení získáme samotnou lineární variaci.

Definice

Lineární variace *funkce je* $LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} LV(f, D)$, *kde* $\|D\| = \max |t_{j+1} - t_j|$ *je norma dělení.*

Příklady

Lineární variace funkce $f(x) = x^2$ *na intervalu* $\langle 0, 3\rangle$ *(ryze monotonní funkce) je*

$$\sum_{j=1}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)] = f(3) - f(0) = 9$$

Lineární variace po částech monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ *je* $\int_a^b |f'(x)| dx$

Trajektorie W.P. má $LV = \infty$, *proto definujeme kvadratickou variaci:*

obecně variace popisuje míru proměnlivosti funkce. Nejprve pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ uvažujme nějaké dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, $D : \{a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b\}$. Lineární variaci funkce f příslušnou dělení D pak definujeme jako $LV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ (součet vzdáleností hodnot funkce ve dvou sousedících dělících bodech). Zjemněním dělení získáme samotnou lineární variaci.

Definice

Lineární variace *funkce je* $LV(f) = \lim_{\|D\|\to 0} LV(f, D)$, *kde* $\|D\| = \max |t_{j+1} - t_j|$ *je norma dělení.*

Příklady

Lineární variace funkce $f(x) = x^2$ *na intervalu* $\langle 0, 3\rangle$ *(ryze monotonní funkce) je*

$$\sum_{j=1}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)] = f(3) - f(0) = 9$$

Lineární variace po částech monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ *je* $\int_a^b |f'(x)| dx$

Trajektorie W.P. má $LV = \infty$, *proto definujeme kvadratickou variaci:*

Wienerův proces

Lineární variace

obecně variace popisuje míru proměnlivosti funkce. Nejprve pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ uvažujme nějaké dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, $D : \{a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b\}$. Lineární variaci funkce f příslušnou dělení D pak definujeme jako $LV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ (součet vzdáleností hodnot funkce ve dvou sousedících dělících bodech). Zjemněním dělení získáme samotnou lineární variaci.

Definice

Lineární variace *funkce je* $LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} LV(f, D)$, *kde* $\|D\| = \max |t_{j+1} - t_j|$ *je norma dělení.*

Příklady

Lineární variace funkce $f(x) = x^2$ *na intervalu* $\langle 0, 3\rangle$ *(ryze monotonní funkce) je*

$$\sum_{j=1}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)] = f(3) - f(0) = 9$$

Lineární variace po částech monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ *je* $\int_a^b |f'(x)|dx$

Trajektorie W.P. má $LV = \infty$, *proto definujeme kvadratickou variaci:*

obecně variace popisuje míru proměnlivosti funkce. Nejprve pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ uvažujme nějaké dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, $D : \{a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b\}$. Lineární variaci funkce f příslušnou dělení D pak definujeme jako $LV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ (součet vzdáleností hodnot funkce ve dvou sousedících dělících bodech). Zjemněním dělení získáme samotnou lineární variaci.

Definice

Lineární variace *funkce je* $LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} LV(f, D)$, *kde* $\|D\| = \max |t_{j+1} - t_j|$ *je norma dělení.*

Příklady

Lineární variace funkce $f(x) = x^2$ *na intervalu* $\langle 0, 3\rangle$*(ryze monotonní funkce) je*
$$\sum_{j=1}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)] = f(3) - f(0) = 9$$

Lineární variace po částech monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ *je* $\int_a^b |f'(x)| dx$

Trajektorie W.P. má $LV = \infty$, *proto definujeme kvadratickou variaci:*

Definice

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a D dělení tohoto intervalu. Pak kvadratická variace této funkce na $\langle a, b\rangle$ příslušná dělení D je

$$KV\left(f, D\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(f\left(t_{j+1}\right) - f\left(t_j\right)\right)^2 .$$

Definice

Kvadratická variace funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je definována jako

$$KV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} KV\left(f, D\right).$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je její kvadratická variace na tomto intervalu rovna 0.

Definice

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ a D dělení tohoto intervalu. Pak kvadratická variace této funkce na $\langle a, b\rangle$ příslušná dělení D je

$$KV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(f(t_{j+1}) - f(t_j)\right)^2.$$

Definice

Kvadratická variace funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je definována jako

$$KV(f) = \lim_{\|D\|\to 0} KV(f, D).$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je její kvadratická variace na tomto intervalu rovna 0.

Věta

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $\langle 0, T\rangle$ a $D = \{0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\}$ dělení intervalu $\langle 0, T\rangle$. Pak

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2 \to T$$

v kvadratickém středu pro $\|D\| \to 0$, tedy pro $\|D\| \to 0$

$$E\left(\left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2 - T\right]^2\right) \to 0.$$

K důkazu se využije vztahů $E\left(W^2(t)\right) = t$ a $E\left(W^4(t)\right) = 3t^2$.

Tedy zatímco trajektorie Wienerova procesu jsou zcela náhodné a jejich lineární variace je nekonečná, jejich kvadratická variace je deterministická (pro všechny W.P. stejná) a rovná se délce intervalu. Platí tedy, že $\sum (\triangle W)^2 = T$, a proto tedy $(\triangle W)^2 = \triangle t$.

Věta

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $\langle 0, T\rangle$ a $D = \{0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\}$ dělení intervalu $\langle 0, T\rangle$. Pak

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2 \to T$$

v kvadratickém středu pro $\|D\| \to 0$, tedy pro $\|D\| \to 0$

$$E\left(\left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2 - T\right]^2\right) \to 0.$$

K důkazu se využije vztahů $E\left(W^2(t)\right) = t$ a $E\left(W^4(t)\right) = 3t^2$.

Tedy zatímco trajektorie Wienerova procesu jsou zcela náhodné a jejich lineární variace je nekonečná, jejich kvadratická variace je deterministická (pro všechny W.P. stejná) a rovná se délce intervalu. Platí tedy, že $\sum (\triangle W)^2 = T$, a proto tedy $(\triangle W)^2 = \triangle t$.

standardní Wienerův proces však není vhodný pro modelování ceny akcie, protože:

1. WP může nabývat i záporných hodnot
2. modeluje absolutní změnu ceny akcie $\triangle S$, ne relativní přírůstek $\frac{\triangle S}{S}$
3. vliv jednotek

Zobecněný Wienerův proces (přidáním driftu, respektive volatility):
$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$

Geometrický Wienerův proces (exponenciála ze zobecněného W.P.):
$Y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\mu t + \sigma W(t)}$, kde y_0 je počáteční hodnota procesu, kterou nemůžeme ovlivnit.

Bachelier modeloval cenu pomocí zobecněného W.P. : záporné hodnoty ceny akcií.

B-S model předpokládá, že se cena akcie vyvíjí podle geometrického W.P. se stochastickým diferenciálem $\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}W$.

standardní Wienerův proces však není vhodný pro modelování ceny akcie, protože:

1. WP může nabývat i záporných hodnot
2. modeluje absolutní změnu ceny akcie $\triangle S$, ne relativní přírůstek $\frac{\triangle S}{S}$
3. vliv jednotek

Zobecněný Wienerův proces (přidáním driftu, respektive volatility):
$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$

Geometrický Wienerův proces (exponenciála ze zobecněného W.P.):
$Y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\mu t + \sigma W(t)}$, kde y_0 je počáteční hodnota procesu, kterou nemůžeme ovlivnit.

Bachelier modeloval cenu pomocí zobecněného W.P. : záporné hodnoty ceny akcií.

B-S model předpokládá, že se cena akcie vyvíjí podle geometrického W.P. se stochastickým diferenciálem $\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}W$.

Filtrace

- umožňuje matematicky popsat vývoj informace na trhu pomocí σ-algeber
- σ-algebra (množina pozorovatelných jevů) zachycuje informaci, které jevy můžeme pozorovat a které ne
  - v čase roste informace→σ-algebra roste
  - uzavřená na sjednocení a doplňky

Příklad

Hod kostkou. Pravděpodobnostní prostor má 6 elementárních jevů $\Omega = \{1, 2, \ldots 6\}$.

1. $\mathcal{F}_0 = \exp \Omega$ *(všechny podmnožiny* Ω*)* $\rightarrow$ *pozorovatelné jsou všechny jevy, σ-algebra nese informaci: jaká hodnota na kostce padla*
2. $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \emptyset, \Omega\}$→*pozorovatelné jsou pouze 2 jevy (padlo sudé nebo padlo liché číslo). σ-algebra nese informaci: sudost nebo lichost hodnoty na kostce*

Filtrace

- umožňuje matematicky popsat vývoj informace na trhu pomocí σ-algeber
- σ-algebra (množina pozorovatelných jevů) zachycuje informaci, které jevy můžeme pozorovat a které ne
  - v čase roste informace→σ-algebra roste
  - uzavřená na sjednocení a doplňky

Příklad

Hod kostkou. Pravděpodobnostní prostor má 6 elementárních jevů $\Omega = \{1, 2, \ldots 6\}$.

1. $\mathcal{F}_0 = \exp \Omega$ *(všechny podmnožiny* Ω*)* $\rightarrow$ *pozorovatelné jsou všechny jevy, σ-algebra nese informaci: jaká hodnota na kostce padla*
2. $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \emptyset, \Omega\}$→*pozorovatelné jsou pouze 2 jevy (padlo sudé nebo padlo liché číslo). σ-algebra nese informaci: sudost nebo lichost hodnoty na kostce*

Definice

*Systém σ-algeber $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $T \subseteq \mathbb{R}$ je indexová množina, se nazývá **(informační) filtrace,** pokud platí pro $\forall s < t$ $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$ (informace se v čase neztrácejí), a pro každé $\mathcal{F}_t$, $t \in T$ platí $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.*

Příklad

Růst informace v čase. *Hod mincí 2x po sobě v čase $t = 1$ a $t = 2$. Množina všech možných výsledků $\Omega = \{\{H, H\}, \{O, O\}, \{H, O\}, \{O, H\}\}$. σ-algebry popisující výsledky v jednoltivých časech:*

- *$t = 0$: nemáme žádnou informaci o tom, co se stalo, tedy máme pouze nejmenší možnou σ-algebru (víme pouze, že se něco stane):$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*
- *$t = 1$: $\mathcal{F}_1$popisuje informaci v čase 1, tedy $\mathcal{F}_1 = \{\{\{H, H\}, \{H, O\}\}, \{\{O, O\}, \{O, H\}\}, \emptyset, \Omega\}$*
- *$t = 2$: všechny jevy jsou již určeny. $\mathcal{F}_2 = \exp \Omega$ (množina všech podmnožin Ω)*

Definice

Systém σ-algeber $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in T\}$na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $T \subseteq \mathbb{R}$ je indexová množina, se nazývá ***(informační) filtrace,*** *pokud platí pro $\forall s < t$ $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$ (informace se v čase neztrácejí), a pro každé $\mathcal{F}_t$, $t \in T$ platí $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.*

Příklad

Růst informace v čase. *Hod mincí 2x po sobě v čase $t = 1$ a $t = 2$. Množina všech možných výsledků $\Omega = \{\{H, H\}, \{O, O\}, \{H, O\}, \{O, H\}\}$. σ-algebry popisující výsledky v jednoltivých časech:*

- *$t = 0$: nemáme žádnou informaci o tom, co se stalo, tedy máme pouze nejmenší možnou σ-algebru (víme pouze, že se něco stane):$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*
- *$t = 1$: $\mathcal{F}_1$popisuje informaci v čase 1, tedy $\mathcal{F}_1 = \{\{\{H, H\}, \{H, O\}\}, \{\{O, O\}, \{O, H\}\}, \emptyset, \Omega\}$*
- *$t = 2$: všechny jevy jsou již určeny. $\mathcal{F}_2 = \exp \Omega$ (množina všech podmnožin Ω)*

Filtrace

Historie Wienerova procesu, $\mathcal{F}_t^W$ měřitelnost a neanticipativní proces

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces. Filtrace $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ se nazývá ***historie Wienerova procesu****, jestliže pro $\forall t > 0$ je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s,\omega)$ pro $\forall s \leq t$.*

- $\mathcal{F}^W$ popisuje růst informace o trajektorii Wienerova procesu v závislosti na čase
- $\mathcal{F}_t^W$ je informace o trajektorii v čase t

Definice

Funkce $h(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná $\Longleftrightarrow$ h je bodová limita součtu funkcí tvaru

$$g_1(W(t_1)), \ldots g_n(W(t_n)),$$

kde g_i $i = 1, \ldots k$ jsou libovolné omezené spojité funkce, $t_i \geq t$ pro $\forall i \leq n \in \mathbb{N}$.

Filtrace

Historie Wienerova procesu, $\mathcal{F}_t^W$ měřitelnost a neanticipativní proces

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces. Filtrace $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ se nazývá ***historie Wienerova procesu****, jestliže pro $\forall t > 0$ je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s, \omega)$ pro $\forall s \leq t$.*

- $\mathcal{F}^W$ popisuje růst informace o trajektorii Wienerova procesu v závislosti na čase
- $\mathcal{F}_t^W$ je informace o trajektorii v čase t

Definice

Funkce $h(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná $\Longleftrightarrow h$ je bodová limita součtu funkcí tvaru

$$g_1(W(t_1)), \ldots g_n(W(t_n)),$$

kde g_i $i = 1, \ldots k$ jsou libovolné omezené spojité funkce, $t_i \geq t$ pro $\forall i \leq n \in \mathbb{N}$.

Filtrace

Historie Wienerova procesu, $\mathcal{F}_t^W$ měřitelnost a neanticipativní proces

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces. Filtrace $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ se nazývá ***historie Wienerova procesu****, jestliže pro $\forall t > 0$ je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s, \omega)$ pro $\forall s \leq t$.*

- $\mathcal{F}^W$ popisuje růst informace o trajektorii Wienerova procesu v závislosti na čase
- $\mathcal{F}_t^W$ je informace o trajektorii v čase t

Definice

Funkce $h(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná $\Longleftrightarrow$ h je bodová limita součtu funkcí tvaru

$$g_1(W(t_1)), \ldots g_n(W(t_n)),$$

kde g_i $i = 1, \ldots k$ jsou libovolné omezené spojité funkce, $t_i \geq t$ pro $\forall i \leq n \in \mathbb{N}$.

Spojité martingaly

Definice martingalu

Připomeňme: Diskrétní martingal je posloupnost náhodných veličin S_n, $n \in \langle 0, \infty)$ takových, že pro $\forall n$ $E\left(S_{n+1} | S_0, S_1, \ldots S_n\right) = S_0$ (očekávání budoucí hodnoty je rovno současné hodnotě).

Definice

*Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a informační filtrace $\mathcal{F}_t^W$ je historií W.P. Stochastický poces $\{G(t, \omega), t \in \langle 0, \infty)\}$ nazveme **neanticipativní** (adaptovaný filtraci $\mathcal{F}_t^W$), pokud pro $\forall t \geq 0$ je funkce $\omega \to G(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná (hodnota funkce závisí jen na hodnotách W.P. do času t).*

Definice

*Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F}_t^W$ je historie Wienerova procesu. Stochastický proces $M(t)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **martingal**, pokud*

1. *$M(t)$ je neaticipativní - hodnota $M(t)$ závisí na hodnotách Wienerova procesu jen do času t*
2. *$E(|M(t)|) < \infty$ pro $\forall t \geq 0$*
3. *$E\left(M(s) | \mathcal{F}_t^W\right) = M(t)$ martingalová podmínka pro $\forall s > t$ (očekávání budoucí hodnoty je současná hodnota).*

Připomeňme: Diskrétní martingal je posloupnost náhodných veličin S_n, $n \in \langle 0, \infty)$ takových, že pro $\forall n$ $E(S_{n+1} | S_0, S_1, \ldots S_n) = S_0$ (očekávání budoucí hodnoty je rovno současné hodnotě).

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a informační filtrace $\mathcal{F}_t^W$ je historií W.P. Stochastický poces $\{G(t, \omega), t \in \langle 0, \infty)\}$ nazveme ***neanticipativní*** *(adaptovaný filtraci $\mathcal{F}_t^W$), pokud pro $\forall t \geq 0$ je funkce $\omega \to G(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná (hodnota funkce závisí jen na hodnotách W.P. do času t).*

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F}_t^W$ je historie Wienerova procesu. Stochastický proces $M(t)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je ***martingal****, pokud*

1. *$M(t)$ je neaticipativní - hodnota $M(t)$ závisí na hodnotách Wienerova procesu jen do času t*
2. *$E(|M(t)|) < \infty$ pro $\forall t \geq 0$*
3. *$E\left(M(s) | \mathcal{F}_t^W\right) = M(t)$ martingalová podmínka pro $\forall s > t$ (očekávání budoucí hodnoty je současná hodnota).*

Připomeňme: Diskrétní martingal je posloupnost náhodných veličin S_n, $n \in \langle 0, \infty)$ takových, že pro $\forall n$ $E\left(S_{n+1}|S_0, S_1, \ldots S_n\right) = S_0$ (očekávání budoucí hodnoty je rovno současné hodnotě).

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a informační filtrace $\mathcal{F}_t^W$ je historií W.P. Stochastický poces $\{G(t, \omega), t \in \langle 0, \infty)\}$ nazveme ***neanticipativní*** *(adaptovaný filtraci $\mathcal{F}_t^W$), pokud pro $\forall t \geq 0$ je funkce $\omega \rightarrow G(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t^W$-měřitelná (hodnota funkce závisí jen na hodnotách W.P. do času t).*

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F}_t^W$ je historie Wienerova procesu. Stochastický proces $M(t)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je ***martingal****, pokud*

1. *$M(t)$ je neaticipativní - hodnota $M(t)$ závisí na hodnotách Wienerova procesu jen do času t*
2. *$E(|M(t)|) < \infty$ pro $\forall t \geq 0$*
3. *$E\left(M(s)|\mathcal{F}_t^W\right) = M(t)$ martingalová podmínka pro $\forall s > t$ (očekávání budoucí hodnoty je současná hodnota).*

Věta

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F}_t^W$ historie W.P. Pak $W(t)$ je martingal vůči filtraci $\mathcal{F}_t^W$.

1. $W(t)$ je neanticipativní
2. $E(|W(t)|) < \infty$ plyne z normálního rozložení přírůstku W.P. a sudosti hustoty normálního rozložení, tedy
$E(|W(t)|) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} e^{s} \mathrm{d}s = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}}$
3. $E\left(W(s)\,|\mathcal{F}_t^W\right) = E\left(W(t) + (W(s) - W(t))\,|\mathcal{F}_t^W\right) = E\left(W(t)\,|\mathcal{F}_t^W\right) + E\left(W(s) - W(t)\,|\mathcal{F}_t^W\right) = W(t)$ (protože očekávání přírůstků W.P. je rovno 0)

Věta

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F}_t^W$ historie W.P. Pak $W(t)$ je martingal vůči filtraci $\mathcal{F}_t^W$.

1. $W(t)$ je neanticipativní
2. $E(|W(t)|) < \infty$ plyne z normálního rozložení přírůstku W.P. a sudosti hustoty normálního rozložení, tedy
$$E(|W(t)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2\int_0^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} e^s ds = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}}$$
3. $E\left(W(s) | \mathcal{F}_t^W\right) = E\left(W(t) + (W(s) - W(t)) | \mathcal{F}_t^W\right) = E\left(W(t) | \mathcal{F}_t^W\right) + E\left(W(s) - W(t) | \mathcal{F}_t^W\right) = W(t)$ (protože očekávání přírůstků W.P. je rovno 0)

Martingaly

Věta

Itôův integrál je martingal.

V diskrétním případě je martingalová transformace martingal, Itôův integrál je tedy analogií martingalové transformace ve spojitém čase. Víme, že střední hodnota Itôova integrálu (bez ohledu na jeho meze) je nulová.

Věta

Itôův proces $M(t) = M(0) + \int_0^t a(\tau,\omega)\,d\tau + \int_0^t b(\tau,\omega)\,dW$ *je martingal, pokud* $a = 0$.

Tedy Itôův proces je martingal $\Longleftrightarrow a = 0$, tedy Itôův proces je redukován jen na Itôův integrál (plus počáteční hodnotu procesu).

Martingaly

Věta

Itôův integrál je martingal.

V diskrétním případě je martingalová transformace martingal, Itôův integrál je tedy analogií martingalové transformace ve spojitém čase. Víme, že střední hodnota Itôova integrálu (bez ohledu na jeho meze) je nulová.

Věta

Itôův proces $M(t) = M(0) + \int_0^t a(\tau, \omega)\, d\tau + \int_0^t b(\tau, \omega)\, dW$ *je martingal, pokud* $a = 0$.

Tedy Itôův proces je martingal $\iff a = 0$, tedy Itôův proces je redukován jen na Itôův integrál (plus počáteční hodnotu procesu).

Použitá literatura

KOLÁŘ, Martin. *Učební text ze Stochastické analýzy MF002*. Jaro 2012.

KŘIVÁNKOVÁ, Lenka. *Wienerův proces a jeho aplikace.* 2009, 63 l.