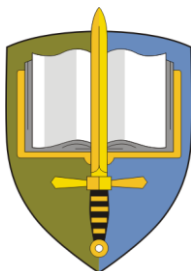


UNIVERZITA OBRANY

Fakulta vojenských technologií



Základy matematické kartografie

(Skripta)

Autor:
plukovník doc. Ing. Václav TALHOFER, CSc.

BRNO 2007

Oponenti: prof. Ing. Bohuslav VEVERKA, DrSc., katedra mapování a kartografie, Fakulta stavební, ČVUT Praha

Ing. Petr BUCHAR, CSc., katedra mapování a kartografie, Fakulta stavební, ČVUT Praha

Skripta byla schválena na zasedání katedry dne 12. října 2007

ISBN: 978-80-7231-297-9

Obsah

1. Referenční plochy a souřadnicové soustavy	8
1.1 Referenční plochy	8
1.1.1 Referenční elipsoid.....	8
1.1.2 Referenční koule.....	9
1.1.3 Referenční rovina	10
1.2 Souřadnicové soustavy.....	10
1.2.1 Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu	11
1.2.1.a Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku	12
1.2.1.b Izometrické souřadnice	14
1.2.2 Souřadnicové soustavy na referenční kouli	15
1.2.2.a Určení polohy kartografického pólu	18
1.2.3 Souřadnicové soustavy v zobrazovací rovině.....	20
2. Dělení a klasifikace zobrazení	21
2.1 Základní transformace mezi referenčními plochami a rovinnými souřadnicovými systémy.....	21
2.2 Základní vlastnosti jednoduchých zobrazení	22
2.3 Základní vlastnosti nepravých zobrazení.....	24
2.4 Základní charakteristiky obecných zobrazení.....	25
2.5 Klasifikace zobrazení podle zkreslení	25
3. Zákony zkreslení.....	27
3.1 Délkové zkreslení	27
3.1.1 Délkové zkreslení na referenční kouli	29
3.1.2 Extrémní délkové zkreslení.....	30
3.1.3 Extrémní délkové zkreslení na referenční kouli.....	32
3.2 Úhlové zkreslení.....	32
3.2.1 Úhlové zkreslení na referenční kouli.....	35
3.2.2 Extrémní úhlové zkreslení	35
3.3 Plošné zkreslení	37
3.4 Zákony zkreslení při užití polárních rovinných souřadnic.....	38
3.5 Vizualizace průběhu zkreslení	40
4. Teorie zobrazení	43
4.1 Ekvidistantní zobrazení.....	43
4.2 Ekvivalentní zobrazení.....	44
4.3 Konformní zobrazení	45
4.4 Konformní zobrazení geodetické čáry	47
4.4.1 Průběh obrazu geodetické čáry v rovině konformního zobrazení	47
4.4.2 Směrová korekce geodetické čáry	49
4.4.1 Délková korekce geodetické čáry.....	55
5. Zobrazení referenčního elipsoidu na kouli.....	57
5.1 Základní vztahy a vzorce.....	57
5.2 Zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi	58
5.3 Konformní zobrazení elipsoidu na kouli	59
6. Jednoduchá válcová zobrazení	61
6.1 Základní vztahy a vzorce.....	61
6.2 Ekvidistantní válcové zobrazení.....	63
6.3 Ekvivalentní válcové zobrazení.....	65
6.4 Konformní válcové zobrazení	66
6.5 Šikmá poloha válcového zobrazení.....	68
7. Jednoduchá kuželová zobrazení.....	68
7.1 Základní vztahy a vzorce.....	69
7.2 Ekvidistantní kuželové zobrazení	71
7.2.1 Ekvidistantní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou	72
7.2.2 Ekvidistantní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami	75
7.3 Ekvivalentní kuželové zobrazení	78
7.3.1 Ekvivalentní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou	79
7.3.2 Ekvivalentní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami	80
7.4 Konformní kuželové zobrazení.....	81

7.4.1	Konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou	82
7.4.2	Konformní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami	82
7.5	Šikmá poloha kuželového zobrazení	84
8.	Jednoduchá azimutální zobrazení	84
8.1	Základní vztahy a vzorce	85
8.2	Ekvidistantní azimutální zobrazení	86
8.3	Ekvivalentní azimutální zobrazení	88
8.4	Konformní azimutální zobrazení	90
8.5	Azimutální projekce	92
8.5.1	Gnomonická projekce	93
8.5.2	Stereografická projekce	94
8.5.3	Ortografická projekce	95
9.	Nepravá zobrazení	96
9.1	Nepravá válcová zobrazení	96
9.1.1	Nepravá válcová sinusoidální zobrazení	97
9.1.1.a	Mercator-Sansonovo (Flamsteedovo) zobrazení	97
9.1.1.b	Eckertovo sinusoidální zobrazení	100
9.1.2	Nepravá válcová eliptická zobrazení	101
9.1.2.a	Mollweidovo zobrazení	101
9.2	Nepravá kuželová zobrazení	103
9.2.1	Bonneovo nepravé kuželové zobrazení	105
9.3	Nepravá azimutální zobrazení	106
9.3.1	Werner-Stabovo nepravé azimutální zobrazení	107
9.3.2	Ginzburgovo zobrazení	108
9.3.3	Modifikovaná azimutální zobrazení	109
9.3.3.a	Aitovovo nepravé azimutální zobrazení	109
9.3.3.b	Hammerovo zobrazení	110
9.3.3.c	Wagnerovo zobrazení	111
9.4	Polykónická zobrazení	112
10.	Gaussovo zobrazení	115
10.1	Základní charakteristiky zobrazení	116
10.2	Zobrazovací rovnice	119
10.2.1	Zobrazovací rovnice UTM	122
10.3	Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím	122
10.3.1	Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím UTM	126
10.4	Meridiánová konvergence	126
10.4.1	Meridiánová konvergence v UTM	129
10.5	Zákony zkreslení	129
10.5.1	Zákony zkreslení v UTM	132
10.6	Směrová a délková korekce geodetické čáry	133
10.6.1	Směrová korekce v zobrazení UTM	136
10.7	Délková korekce geodetické čáry	136
10.8	Mezipásmové transformace	137
11.	Křovákovo zobrazení	137
11.1	Základní charakteristiky zobrazení	138
11.2	Zobrazovací rovnice	138
11.2.1	Zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli	138
11.2.2	Transformace zeměpisných souřadnic na referenční kouli na kartografické souřadnice	138
11.2.3	Transformace do zobrazovací roviny	140
11.2.4	Převod rovinných polárních souřadnic na pravouhlé	141
11.3	Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím	141
11.4	Meridiánová konvergence	142
11.5	Zákony zkreslení	143
12.	Používaná zobrazení v Armádě České republiky a v NATO	144
12.1	Zobrazení UTM	144
12.2	Zobrazení UPS	144
12.2.1	Zobrazovací rovnice zobrazení UPS	145
12.2.2	Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím	146
12.3	Lambertovo konformní kuželové zobrazení	148
13.	Transformace zobrazení	149
13.1	Prostorové transformace	151

13.1.1	<i>Prostorové pravoúhlé souřadnice</i>	151
13.1.2	<i>Tříprvková prostorová transformace</i>	153
13.1.3	<i>Sedmíprvková prostorová transformace</i>	154
13.1.4	<i>Moloděnského transformace</i>	154
13.1.5	<i>Zjednodušená Moloděnského transformace</i>	155
13.2	<i>Rovinné transformace</i>	155
13.2.1	<i>Shodnostní transformace</i>	155
13.2.2	<i>Podobnostní transformace</i>	156
13.2.3	<i>Afinní transformace</i>	156
13.2.4	<i>Interpolační metody</i>	157
14.	Aplikace zobrazení v nástrojích GIS	158
14.1	<i>Volba geodetického referenčního systému</i>	158
14.2	<i>Transformace mezi geodetickými referenčními systémy</i>	159
14.3	<i>Volba zobrazení</i>	160
14.4	<i>Vizualizace matematických prvků</i>	161

Úvod

Základním úkolem geoinformatiky je vytváření a správa modelů krajinné sféry, jejích objektů a jevů. Zabývá se vztahem skutečnosti a jejím modelem ve všech aspektech, které s touto činností souvisí a je zároveň chápána jako vědní obor i praktická činnost. Geoinformatika je široký obor, který vychází z řady vědních oborů a má na ně silné vazby.

Z hlediska *klasické kartografie* se geoinformatiky zabývá:

- *naukou o mapách*, která zahrnuje historii kartografie, tříděním a dokumentací map a atlasů, jejich povšechným studiem;
- *kartografickou vizualizací*, která řeší otázky kartografického jazyka a generalizace obsahu;
- *kartografickou tvorbou* – vlastním zpracováváním obsahu map;
- *kartografickou polygrafii a reprografii*, tedy způsoby rozmnožování map;
- *kartometrii a kartografickým výzkumem* – způsoby analýzy obsahu map a syntézy zjištěných výsledků.

Digitální geoinformatika vychází z obecné informatiky a zabývá se zejména:

- *definováním objektů a jevů* a jejich vztahů v geografické realitě;
- *aplikacemi databázových přístupů* k tvorbě digitálních geodatabází;
- *datovou analýzou*;
- *prezentací dat* a způsoby jejich zobrazování;

Klasická i digitální geoinformatika se zabývá i *řízením celého procesu modelováním* včetně zjišťování a objektivizací uživatelských potřeb na vytvářené modely.

Všechny modelované objekty a jevy je nutné mít *lokalizovány na povrchu Země* či v jejím blízkém okolí. Základní lokalizace je především otázkou topografického nebo tematického mapování zpravidla ve výchozím referenčním rámci, který je dán zvolených geodetickým referenčním systémem. Při jejich vizualizaci (zpravidla grafické trvalé nebo virtuální) je však nutné zvolit jeho rovinné zobrazení. Metodami zobrazování geodetických systémů do roviny se zabývá *matematická kartografie*.

Matematická kartografie je tedy částí kartografie a obecně geoinformatiky zabývající se matematickými a geometrickými základy kartografických děl v obecném slova smyslu. Matematická kartografie studuje proces transformace prostorových souřadnic objektů a jevů na referenčních plochách do roviny. Zkoumá jeho zákonitosti, zkreslení, která při transformacích vznikají, jejich prostorové závislosti a poskytuje i metodiku výběru vhodných transformací pro modelovaná území.

Matematická kartografie se zabývá i speciálními úkoly, jako je rovinné zobrazování bodů, čar a ploch, které se uplatňují například při zobrazování stran trigonometrických sítí, drah letadel, raket a kosmických těles, drah šíření elektromagnetických signálů radiotechnických prostředků apod.

Výsledkem matematické kartografie jsou *kartografická zobrazení* (krátce *zobrazení*) jako matematický aparát pro výše uvedené transformace. Součástí kartografických zobrazení jsou i *charakteristiky zkreslení*, které při transformaci prostorových souřadnic do roviny vznikají.

Tyto studijní texty jsou určeny ke studiu *základů matematické kartografie* studované v rámci předmětu *kartografie* v bakalářském *studijním programu vojenské technologie* v oboru *vojenská geografie a meteorologie*. Mohou být však využity i pro jiné obory, které se zabývají teorií a praxí kartografických zobrazení.

Texty jsou členěny do 14 kapitol včetně úvodní kapitoly. Ve první kapitole jsou souhrnně definovány používané referenční plochy a jsou zde definovány základní souřadnicové soustavy na těchto referenčních plochách a v zobrazovacích rovinách. Druhá kapitola je věnována základním vlastnostem jednotlivých zobrazení a klasifikaci těchto zobrazení. Tato kapitola je zde zařazena i z terminologických důvodů, protože v cizojazyčné literatuře se lze setkat i s jinými názvy uváděných zobrazení a projekcí.

Stěžejní kapitolou pro pochopení celé matematické kartografie je třetí kapitola, věnovaná zákonům zkreslení. Jsou zde vysvětleny příčiny zkreslení daných transformacemi prostorových těles (elipsoidu, koule) do roviny. Na tuto kapitolu navazuje kapitola vysvětlující princip odvozování zobrazovacích rovnic jednotlivých druhů a typů zobrazení.

V páté až deváté kapitole jsou uvedeny jednotlivé druhy zobrazení, které jsou používány především v praxi při tvorbě map menších měřítek, zpravidla nástěnných a atlasových, kdy se jako výchozí referenční plocha většinou používá koule.

Desátá a jedenáctá kapitola jsou věnovány zobrazením používaným při tvorbě státního mapového díla v České republice, závazných geoinformačních systémů (GIS) a v geodetické praxi. Jsou uváděny jak celosvětový systém WGS84 a jeho zobrazení UTM, tak i systém S-JTSK a Křovákovo zobrazení. Tyto kapitoly navazují na předmět geodézie. Dvanáctá kapitola je věnována používaným zobrazením v Armádě České republiky a v NATO.

Předposlední kapitola je zaměřena na transformaci zobrazení mezi sebou. Poslední kapitola se zabývá některými aplikacemi matematické kartografie v programových prostředcích geografických informačních systémech se zaměřením na systém ArcGIS[®] firmy ESRI.

Ve studijních textech nejsou vzhledem k jejich zaměření uvedeny podrobnější informace týkající se zejména zobrazování křivek a čar v konformních zobrazeních s aplikací na Gaussovo zobrazení a zobrazení UTM. Stejně tak řada použitých vzorců není plně odvozena. K jejich bližšímu studiu je možné využít některé materiály uvedené v seznamu literatury.

V textu jsou některé vybrané termíny uváděny i v anglické verzi (kurzívou v závorce za českým termínem). Důvodem bylo jak obecná znalost anglické terminologie z oblasti matematické kartografie, tak i jejich používání v programových nástrojích GIS.

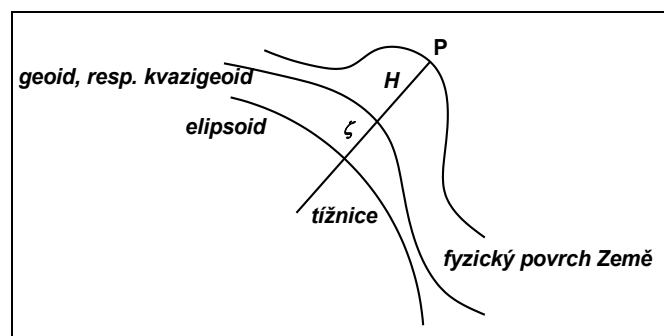
plk. doc. Ing. Václav Talhofer, CSc.

1. Referenční plochy a souřadnicové soustavy

Fyzický povrch zemského tělesa je velice složitý a členitý a v modelech krajinné sféry je těžko zobrazitelný. Proto je pro vytváření těchto modelů nahrazován *topografickou plochou*, která je spojitou plochou vyhlazující mikrostrukturu a ty terénní tvary, které jsou z hlediska rozlišovací úrovně modelu bezvýznamné. Topografická plocha je však stále poměrně složitá pro přímé zobrazování do map nebo pro definování digitálních modelů. Pro účely mapování a tvorby modelů terénu se tato plocha nahrazuje *referenčními plochami*, které jsou jednodušší a jsou matematicky nebo fyzikálně přesně definované. Tyto referenční plochy jsou potom součástí definovaného *geodetického referenčního systému* (*Datum, Geographic Coordinate System*).

1.1 Referenční plochy

Referenční plochou pro výšková měření je *geoid*. Geoid je definován jako plocha, na které všechny body mají stejný *geopotenciál* a která nejlépe odpovídá nerušené střední hladině světových moří, protažené i pod kontinenty. Tato plocha je ve všech bodech kolmá na směr tíže. Protože geoid je definován jako fyzikální těleso, jeho matematické vyjádření je značně složitě. Pro potřeby praktické geodézie, mapování, kartografie i celé geoinformatiky je proto nahrazován *referenčním elipsoidem* (*spheroid*), *referenční koulí* (*sphere*) nebo i *referenční rovinou*. Vztahy mezi fyzickým povrchem Země, geoidem, resp. kvazigeoidem a elipsoidem jsou znázorněny na následujícím obrázku (Obr. 1-1).



Obr. 1-1 Vztahy mezi fyzickým povrchem Země, geoidem, resp. kvazigeoidem a elipsoidem

1.1.1 Referenční elipsoid

Výchozí referenční plochou v matematické kartografii je rotační elipsoid. Parametry rotačního elipsoidu jsou voleny tak, aby v maximální míře nahrazoval geoid v zájmové části Země nebo aby nahrazoval celý geoid. Elipsoid je plně definován dvěma parametry, kterými mohou být:

- a, b – velikost hlavní a vedlejší poloosy (*semimajor axis, semiminor axis*),
- a, e – velikost hlavní poloosy a numerická výstřednost (*excentricita, eccentricity*),
- a, e' – velikost hlavní poloosy a druhá excentricita,
- a, f – velikost hlavní poloosy a zploštění (*flattening*).

Mezi jednotlivými parametry platí vztahy (1-1):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$f = \frac{a - b}{a}$$
(1-1)

Referenční elipsoidy jsou jako výchozí referenční plocha používány zejména tehdy, pokud je nutné definovat zobrazení s minimálními hodnotami zkreslení rovinného obrazu. Tento způsob se volí u kartografických zobrazení používaných při definici státních souřadnicových systémů nebo mezinárodních systémů. Současně se používá i při tvorbě státních mapových děl.

Do současné doby byla odvozena řada referenčních elipsoidů. Na území *České republiky* se používá pro *civilní státní mapová díla Besselův elipsoid*, pro *bývalé vojenské topografické mapy v souřadnicovém systému S-1942/83* (používané do roku 2005) *elipsoid Krasovského* a *pro současné vojenské mapové dílo a pro celosvětový systém WGS84 elipsoid WGS84..* Parametry uvedených elipsoidů jsou uvedeny v následující tabulce (Tabulka 1-1):

Tabulka 1-1 Parametry referenčních elipsoidů používaných na území České republiky

Elipsoid	Besselův	Krasovského	WGS84 (GRS80)
Velká poloosa a [m]	6 377 397,1550	6 378 245	6 378 137
Malá poloosa b [m]	6 356 078,9629	6 356 863,0188	6 356 752,3142
Druhá mocnina excentricity - e^2	0,006 674 372 2	0,006 693 421 6	0,006 694 380
Druhá mocnina druhé excentricity - e'^2	0,006 719 218 8	0,006 738 525 4	0,006 739 496 7
Reciproká hodnota zploštění $1/f$	299,152 812 853	298,300 003 2	298,257 223 6

Poznámka: Elipsoid GRS80 je součástí geodetického referenčního systému ETRS-89, který se též používá v rezortu Českého úřadu zeměměřického a katastrálního. Jeho parametry jsou v rámci v tabulce uváděné přesnosti prakticky shodné s elipsoidem WGS84.

1.1.2 Referenční koule

Není-li vyžadována vysoká přesnost prostorové lokalizace modelovaných objektů a jevů, je často používána jako *referenční plocha koule*. Uplatňuje se zejména při tvorbě map malých měřítek, při vizualizaci digitálních dat s menšími nároky na minimalizaci zkreslení a při řešení jednodušších navigačních úloh. Zvláštním případem je použití referenční koule při tzv. *dvojitém zobrazení*, kdy je referenční elipsoid nejprve zobrazen na kouli, která se poté zobrazuje do roviny. Tento postup je používán zejména při obecné poloze konstrukční osy zobrazení.

Poloměr referenční koule je možné volit na základě různých hledisek.

Je-li zobrazované území rozloženo podél rovnoběžky o zeměpisné šířce φ_0 , je vhodné zvolit poloměr koule rovný *příčnému poloměru křivosti elipsoidu* (1-2):

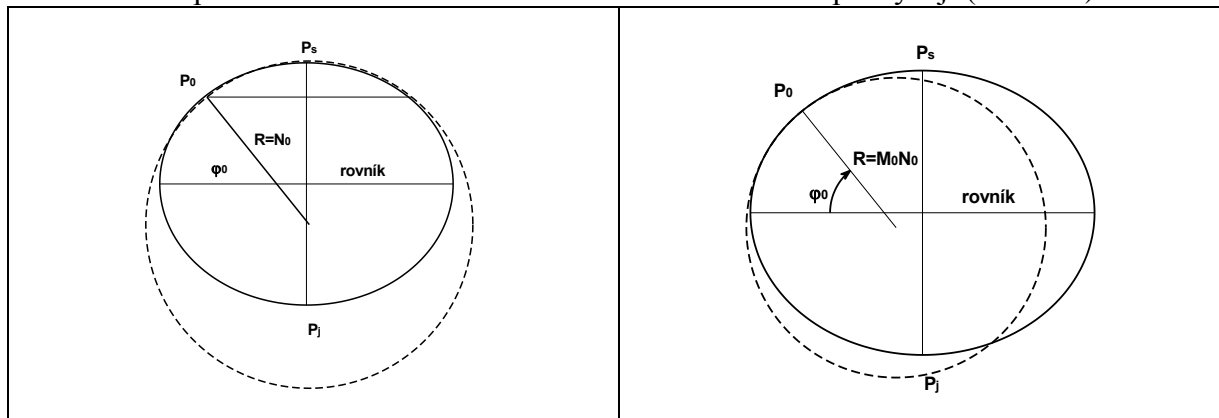
$$R = N_o$$
(1-2)

Při tomto řešení zůstává zachována původní délka rovnoběžky φ_0 na elipsoidu (Obr. 1-2).

Pro území kruhového tvaru se volí poloměr koule rovný *střednímu poloměru křivosti* rovnoběžky φ_0 procházející jeho těžištěm (1-3):

$$R = \sqrt{M_0 N_0} \quad (1-3)$$

Obě tělesa se poté v okolí těžiště velmi těsně ve všech směrech přimykají (Obr. 1-3).



Obr. 1-2 Náhradní koule s poloměrem $R=N_0$

Obr. 1-3 Náhradní koule s poloměrem $R^2=M_0N_0$

Poloměr koule pro mapy velmi malých měřítek zobrazujících rozsáhlé části Země či celou planetu nebo pro vizualizaci digitálních dat ve velmi malých měřítcích je možné odvodit z požadavku přibližné rovnosti objemu a povrchu elipsoidu koule. Tento poloměr potom je:

$$R = 6371 \text{ km.}$$

1.1.3 Referenční rovina

Při tvorbě map a plánů z velmi malého území o poloměru zhruba do 20 km je možné pro polohová data uvažovat zakřivený povrch Země jako rovinu a pro zobrazování používat *referenční rovinu*. V tomto případě vodorovné úhly ne zakřivené ploše jsou téměř stejné jako v rovině, stejně tak zkrácení délek, ploch a úhlů je minimální a zanedbatelné. Pro výšková měření je ale nutné zakřivení Země uvažovat.

1.2 Souřadnicové soustavy

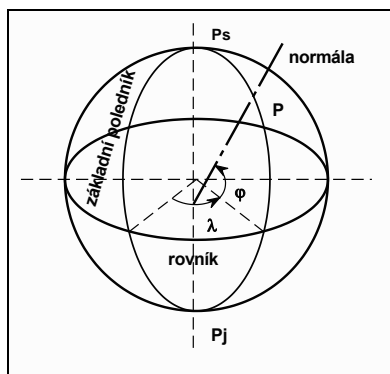
Všechny objekty a jevy na zemském povrchu modelované v modelech terénu je nutné lokalizovat. K tomu slouží souřadnicové soustavy, ve kterých je lokalizace uvedených objektů dána dvojicí nebo trojicí prostorových či rovinných souřadnic. Geodetická měření často jako výchozí prostorové souřadnice používá souřadnice *geocentrické*. *Geocentrický souřadnicový systém* (*geocentric coordinate system*) má počátek ve středu Země a souřadnicové osy X , Y , Z . Osa X leží v rovině rovníku a prochází *greenwichským poledníkem* (*prime meridian*), osa Y leží též v rovině rovníku a prochází poledníkem 90° východní zeměpisné délky a osa Z leží v ose rotace Země. Pro kartografické účely a pro lokalizaci objektů digitálních modelů jsou však i tyto souřadnice transformovány do prostorových souřadnic na daném elipsoidu. Proto v dalším textu bude pojednáváno pouze o souřadnicových soustavách, které mají vztah k matematické kartografii.

1.2.1 Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu

Základní souřadnicovou soustavou na referenčním elipsoidu jsou *zeměpisné souřadnice*, označované též *geodetické zeměpisné souřadnice* nebo pouze *geodetické souřadnice* (*geographic coordinate system*). Souřadnice tvoří *zeměpisná (geodetická) šířka* φ (*latitude*) a *zeměpisná (geodetická) délka* λ (*longitude*) (Obr. 1-4). Zeměpisná šířka dosahuje hodnot v rozsahu $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, často jsou tyto hodnoty označovány i jako *jižní zeměpisná šířka* (pro hodnoty $\langle -90^\circ, 0^\circ \rangle$) a *severní zeměpisná šířka* (pro hodnoty $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$). Zeměpisná délka používaná v běžném životě nabývá hodnot $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ s počátkem na základním poledníku s přírůstkem ve směru východním.

Čáry s konstantní hodnotou λ , resp. φ jsou nazývány *zeměpisné poledníky (meridian)*, resp. *zeměpisné rovnoběžky (parallel)*. Zeměpisné poledníky a rovnoběžky vytvářejí na povrchu referenčního elipsoidu *zeměpisnou síť (graticule)*, která je při klasické tvorbě map důležitým konstrukčním prvkem při zobrazování povrchu elipsoidu do roviny. Zeměpisná síť umožňuje základní orientaci v obsahu map.

Zvláštní význam mají *rovník (equator)*, tedy rovnoběžka s maximálním průměrem, a *základní (Greenwichský, nulový) poledník* procházející observatoří v Greenwich v Londýně. V některých státech je v praktické geodézii používán jako základní poledník i *poledník Ferra* (např. v ČR, SR, Německu a Rakousku). Zeměpisná délka tohoto poledníku je $17^\circ 40'$ západně Greenwiche. Při konstrukci map má specifický význam i *základní konstrukční poledník*, kterým zpravidla bývá poledník procházející těžištěm zobrazovaného nebo modelovaného území.



Obr. 1-4 Zeměpisné souřadnice na elipsoidu

Elementy poledníku ds_p a rovnoběžky ds_r se podle Obr. 1-5 a Obr. 1-6 vypočítají podle vztahů (1-4) a (1-5):

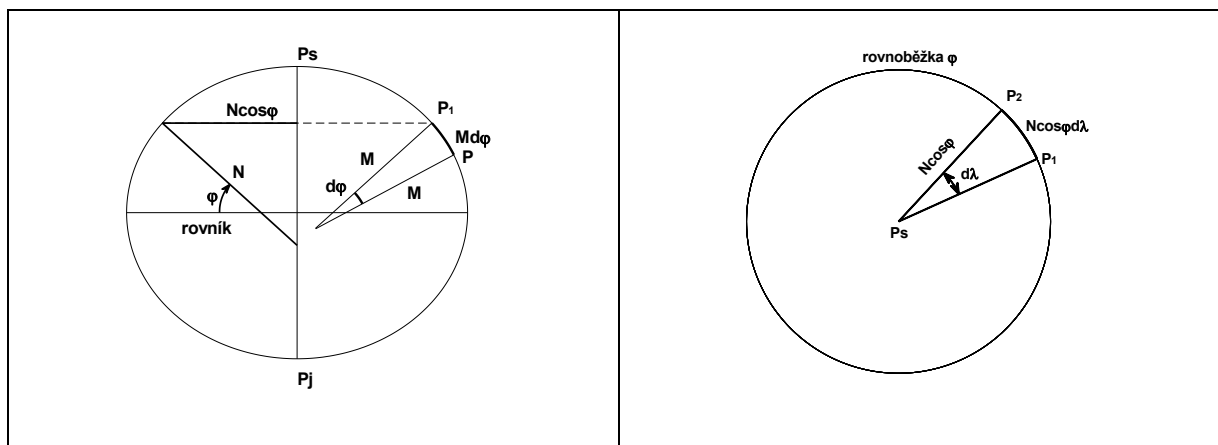
$$ds_p = M d\varphi \quad (1-4)$$

$$ds_r = N \cos \varphi d\lambda \quad (1-5)$$

M a N jsou *meridiánový* a *příčný poloměr křivosti* počítané pro zeměpisnou šířku φ podle vztahů (1-6) a (1-7):

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (1-6)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (1-7)$$



Obr. 1-5 Elementy poledníku na elipsoidu

Obr. 1-6 Elementy rovnoběžky na elipsoidu

1.2.1.a Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku

V některých aplikacích matematické kartografie je nutné znát *délku poledníkového oblouku* (například v Gaussovo zobrazení), případně i délku oblouku rovnoběžky.

Podle obrázku (Obr. 1-5) a s uvažováním rovnice (1-4) lze délku poledníkového oblouku s_p do bodu P o zeměpisné šířce φ vypočítat z rovnice:

$$s_p = \int_0^{\varphi} M d\varphi$$

kterou lze upravit:

$$s_p = a(1 - e^2) \int_0^{\varphi} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi \quad (1-8)$$

Výraz na pravé straně rovnice (1-8) je možné rozvinout v řadu podle binomické věty:

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 \varphi + \frac{35}{16}e^6 \sin^6 \varphi + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 \varphi + \dots$$

ze které se po úpravě získá rovnice:

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} = A - B \sin 2\varphi + C \sin 4\varphi - D \sin 6\varphi + E \sin 8\varphi - \dots \quad (1-9)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots \\ B &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \dots \\ C &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots \\ D &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \dots \end{aligned} \quad (1-10)$$

$$E = \frac{315}{16384} e^8 + \dots$$

Koeficienty A , B , C , D a E jsou funkcemi pouze excentricity e^2 a jsou tedy pro konkrétní elipsoid konstantní. Pokud se dosadí výraz (1-9) do rovnice (1-8), bude

$$s_p = a(1 - e^2) \int_0^\varphi (A - B \sin 2\varphi + C \sin 4\varphi - D \sin 6\varphi + E \sin 8\varphi - \dots) d\varphi$$

a po integraci:

$$s_p = a(1 - e^2) \left(A \frac{\varphi^\circ}{\rho^\circ} - \frac{B}{2} \sin 2\varphi + \frac{C}{4} \sin 4\varphi - \frac{D}{6} \sin 6\varphi + \frac{E}{8} \sin 8\varphi - \dots \right) \quad (1-11)$$

Pokud se označí

$$\begin{aligned} \frac{a(1 - e^2)A}{\rho^\circ} &= A^* \\ a(1 - e^2) \frac{B}{2} &= B^* \\ a(1 - e^2) \frac{C}{4} &= C^* \\ a(1 - e^2) \frac{D}{6} &= D^* \\ a(1 - e^2) \frac{E}{8} &= E^* \end{aligned} \quad (1-12)$$

je možné rovnici (1-11) psát ve tvaru:

$$s_p = A^* \varphi^\circ - B^* \sin 2\varphi + C^* \sin 4\varphi - D^* \sin 6\varphi + E^* \sin 8\varphi - \dots \quad (1-13)$$

V následující tabulce (Tabulka 1-2) jsou uvedeny hodnoty koeficientů pro používané elipsoidy v ČR:

Tabulka 1-2 Koeficienty pro výpočet délky poledníkových oblouků referenčních elipsoidů používaných v ČR

Elipsoid	A^* [m]	B^* [m]	C^* [m]	D^* [m]	E^* [m]
Besselův	111120,61960	15988,63853	16,72995	0,02178	$3,07731 \cdot 10^{-5}$
Krasovského	111134,86108	16036,48027	16,82807	0,02198	$3,11311 \cdot 10^{-5}$
WGS84	111132,95255	16038,50866	16,83261	0,02198	$3,11485 \cdot 10^{-5}$

Dosadí-li se do vzorce (1-13) zeměpisná šířka pólu ($\varphi = 90^\circ$), vypočítá se délka zemského kvadrantu. Ta bude pro:

- Besselův elipsoid 10 000 855,764 metrů,
- Krasovského elipsoid 10 002 137,497 metrů,
- elipsoid WGS84 10 001 965,729 metrů.

Poznámka: Pro určení délky metru jako desetimiliónté části zemského kvadrantu stanovil Delambre koncem 18. století rozměry elipsoidu, jehož délka kvadrantu byla 10 000 000 metrů.

Méně často je nutné stanovit i *délku oblouku rovnoběžky*. Poloměr rovnoběžky v zeměpisné šířce φ je $r = N \cos \varphi$. Délka jejího oblouku s_r mezi dvěma body o zeměpisné délce λ_1 a λ_2 (vyjádřené v radiánech) je:

$$s_r = N \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (1-14)$$

1.2.1.b Izometrické souřadnice

Pro účely definice některých zobrazení, zejména konformních, se na referenčním elipsoidu definuje další soustava souřadnic, tzv. *izometrických souřadnic*. Podle matematické definice jsou izometrické souřadnice takové, kde čtverec délkového elementu lze vyjádřit jako součet čtverců délkových elementů v jednotlivých souřadnicových osách, případně ještě vynásobený vhodnou funkcí obou souřadnic.

Zeměpisné souřadnice na referenčním elipsoidu symetrické nejsou, poněvadž pro délkový element ds platí vztah:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (1-15)$$

Při intervalu $d\varphi = d\lambda$ vznikne síť diferenciálních obdélníků, které se zužují s rostoucí zeměpisnou šířkou, což je dáno sbíhavostí poledníků. Vztah (1-15) lze upravit do tvaru:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{M^2 d\varphi}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right) \quad (1-16)$$

Je možné zavést novou souřadnici jako funkci zeměpisné šířky φ . Tato souřadnice se nazývá *izometrická šířka* q . Její diferenciál bude:

$$dq = \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi} \quad (1-17)$$

Rovnice (1-16) potom nabude tvaru

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2) \quad (1-18)$$

a souřadnice q, λ vytvoří na referenčním elipsoidu soustavu izometrických souřadnic. Bude-li $dq = d\lambda$, potom na povrchu referenčního elipsoidu vznikne síť diferenciálních čtverců, jejichž velikost se bude s rostoucí zeměpisnou šířkou zmenšovat v závislosti na výrazu $N^2 \cos^2 \varphi$.

Vzorec pro výpočet izometrické šířky se odvodí integrací výrazu (1-17):

$$q = \int_0^\varphi \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi} = \int_0^\varphi \frac{\left[\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] d\varphi}{\left[\frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right] \cos \varphi} = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} =$$

$$\int_0^\varphi \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi)d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)d\varphi - e^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}$$

První integrál bude:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right)$$

Druhý integrál lze vyjádřit:

$$e \int_0^{\varphi} \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = e \int_0^{\varphi} \frac{d(e \sin \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

a řešit substitucí pro výraz $x = e \sin \varphi$. K řešení se využije obecný vzorec:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Bude tedy:

$$e \int_0^{\varphi} \frac{d(e \sin \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}$$

Výsledný vzorec pro výpočet izometrické šířky je:

$$q = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}, \text{ případně také}$$

$$q = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \quad (1-19)$$

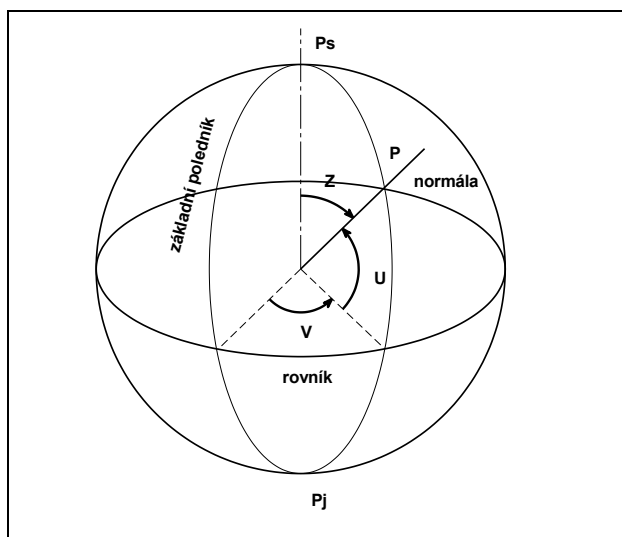
V následující tabulce (Tabulka 1-3) jsou pro porovnání uvedeny některé hodnoty zeměpisné a izometrické šířky pro elipsoid WGS84.

Tabulka 1-3 Porovnání hodnot zeměpisné a izometrické šířky pro elipsoid WGS84

φ°	q (rad)	q°
0	0,00000	0,00
10	0,17426	9,98
20	0,35409	20,29
30	0,54596	31,28
40	0,75860	43,46
50	1,00555	57,61
60	1,31115	75,12
70	1,72911	99,07
80	2,42964	139,21
90	∞	∞

1.2.2 Souřadnicové soustavy na referenční kouli

Na referenční kouli jsou též základní souřadnicovou soustavou zeměpisné souřadnice. Na rozdíl od souřadnic na elipsoidu jsou často nazývány *zeměpisnými souřadnicemi sférickými* nebo *kulovými* a jsou označovány *zeměpisná šířka U* (také označovaná jako „na kouli“, sférická, kulová) a *zeměpisná délka V* („na kouli“, sférická, kulová). Pokud se zobrazují oblasti blízké pólům, často se používá i *zenitový úhel Z* počítaný podle vztahu $Z = 90^\circ - U$ (Obr. 1-7). Rozsahy hodnot zeměpisných souřadnic na kouli a jejich použití v praxi je obdobné jako u zeměpisných souřadnic na elipsoidu.



Obr. 1-7 Zeměpisné souřadnice na kouli

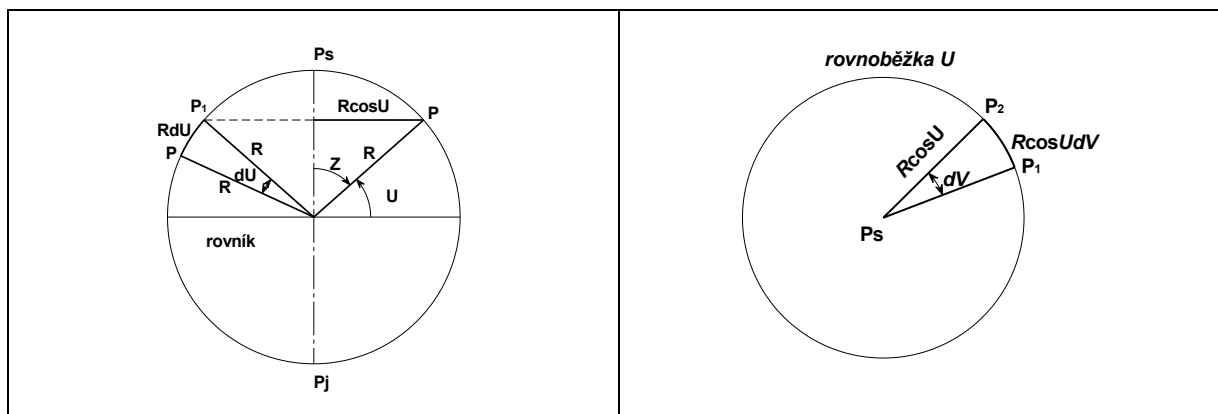
Elementy poledníků a rovnoběžek jsou počítány podle vztahů (1-20) a (1-21). Pokud se používá zenitová vzdálenost, potom podle vztahů (1-22):

$$ds_p = RdU \quad (1-20)$$

$$ds_r = R \cos U dV \quad (1-21)$$

$$ds_p = RdZ \quad (1-22)$$

$$ds_r = R \sin Z dV$$



Obr. 1-8 Elementy poledníku na kouli

Obr. 1-9 Elementy rovnoběžky na kouli

Obdobně jako na referenčním elipsoidu i na referenční kouli lze definovat soustavu izometrických souřadnic, zde označených jako Q , V . Izometrická šířka Q se počítá podle vzorce:

$$Q = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \quad (1-23)$$

odvozeného podobně jako u referenčního elipsoidu.

V následující tabulce (Tabulka 1-4) jsou pro porovnání uvedeny některé hodnoty zeměpisné a izometrické šířky pro referenční kouli.

Tabulka 1-4 Porovnání hodnot zeměpisné a izometrické šířky pro referenční kouli

U°	Q (rad)	Q°
0	0,00000	0,00
10	0,17543	10,05
20	0,35638	20,42
30	0,54931	31,47
40	0,76291	43,71
50	1,01068	57,91
60	1,31696	75,46
70	1,73542	99,43
80	2,43625	139,59
90	∞	∞

Na referenční kouli je možno definovat soustavu *kartografických souřadnic* vztaženou ke *kartografickému pólu* K . Kartografické souřadnice se zpravidla používají při *šikmém zobrazení* (*oblique projection*) a poloha kartografického pólu se volí podle specifiky konkrétního zobrazení referenční koule do roviny.

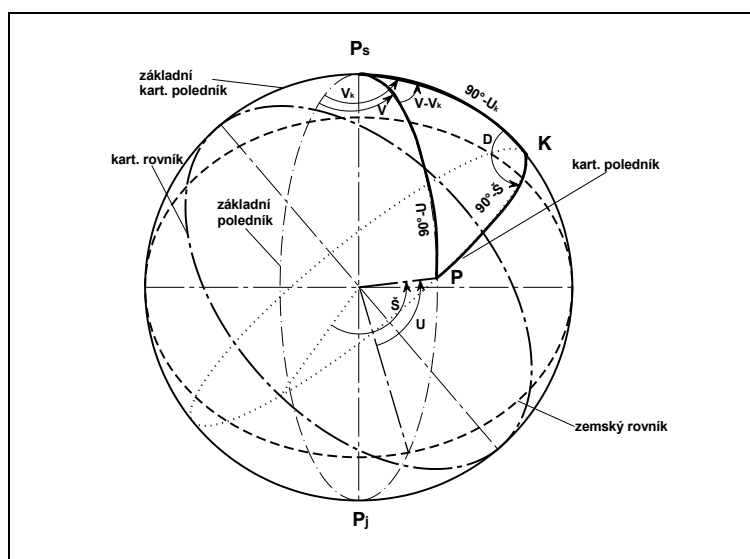
Kartografické souřadnice tvoří *kartografická šířka* \check{S} a *kartografická délka* D . Tyto souřadnice jsou ve vztahu ke kartografickému pólu definovány obdobně jako zeměpisné souřadnice ve vztahu k zemskému pólu. Rovněž kartografické poledníky a rovnoběžky mají obdobný průběh jako poledníky a rovnoběžky zeměpisné. Kartografické poledníky jsou tzv. *hlavní kružnice* (*ortodromy*) a jejich rovina vždy prochází středem referenční koule.

Zeměpisný poledník procházející kartografickým pólem je jediným poledníkem, který je současně i kartografickým. Zpravidla bývá používán jako *základní kartografický poledník* kartografické soustavy souřadnic.

Vzaty mezi zeměpisnými a kartografickými souřadnicemi obecného bodu P se odvozují ze sférické trigonometrie, používají se věty *kosinová pro strany* a *sinová*. Podle obrázku (Obr. 1-10) platí vztahy (1-24), (1-25) :

$$\sin \check{S} = \sin U \sin U_k + \cos U \cos U_k \cos(V - V_k) \quad (1-24)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k) \quad (1-25)$$

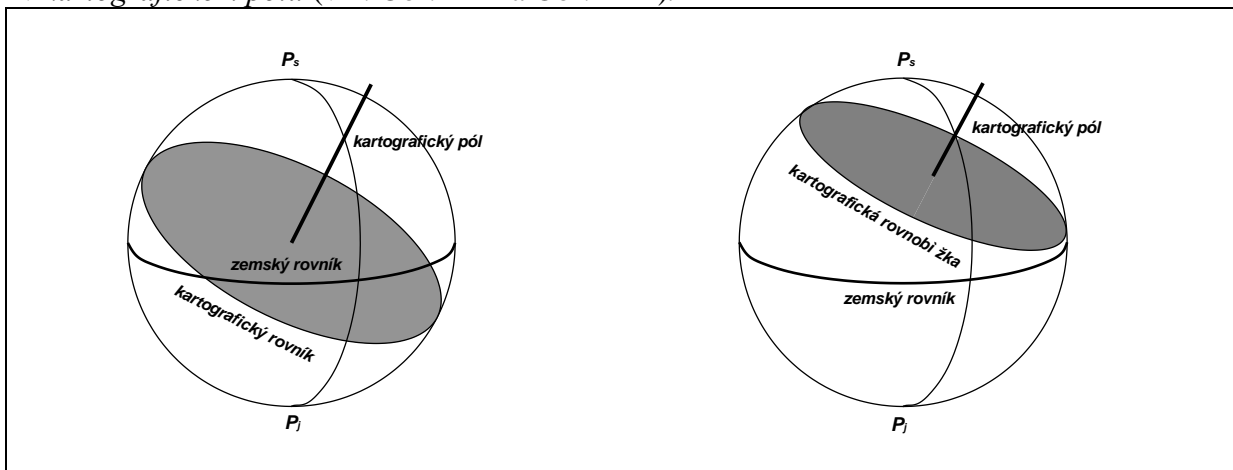


Obr. 1-10 Vztahy mezi zeměpisnými a kartografickými souřadnicemi na referenční kouli

Rovněž stejně jako u zeměpisné šířky na kouli i kartografickou šířku \check{S} je možné nahradit v oblastech kolem kartografického pólu zenitovým úhlem $Z = 90^\circ - \check{S}$.

1.2.2.a Určení polohy kartografického pólu

Polohu kartografického pólu je možné určit nejméně ze dvou bodů ležících na budoucím kartografickém rovníku (ortodromě procházející zpravidla osou zobrazovaného území) nebo nejméně ze tří bodů, pokud osa zobrazovaného území leží na budoucí kartografické rovnoběžce. Těmito body lze proložit rovinu, která protne povrch referenční koule v kružnici. V případě, že body leží na ortodromě, rovina prochází středem referenční koule. Pokud se vztýčí kolmice k dané rovině ve středu kružnice, tato kolmice protne povrch referenční koule v kartografickém pólu (viz. Obr. 1-11 a Obr. 1-12).



Obr. 1-11 Poloha kartografického pólu vůči ortodromě

Obr. 1-12 Poloha kartografického pólu vůči kartografické rovnoběžce

Polohu kartografického pólu je možné vypočítat s využitím řešení sférických trojúhelníků. Dále jsou uvedeny postupy výpočtu polohy kartografického pólu v obou uvedených případech.

Výpočet polohy kartografického pólu ze dvou bodů

Mějme dva body na ortodromě, jejichž zeměpisné souřadnice budou $P_1 (U_1, V_1)$ a $P_2 (U_2, V_2)$. Poloha kartografického pólu se potom vypočítá pomocí sinuscosinové věty ze dvou sférických trojúhelníků P_1, K, P_s a P_2, K, P_s (Obr. 1-13):

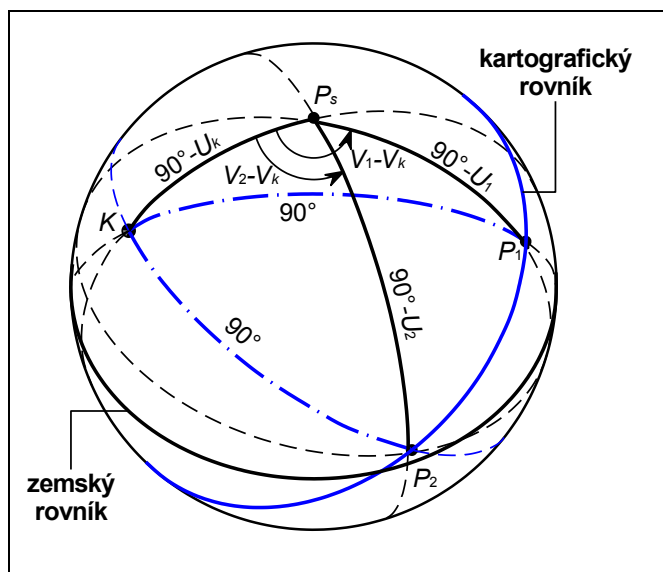
$$\cos 90^\circ = \sin U_1 \sin U_k + \cos U_1 \cos U_k \cos(V_1 - V_k)$$

$$\cos 90^\circ = \sin U_2 \sin U_k + \cos U_2 \cos U_k \cos(V_2 - V_k)$$

Řešení těchto rovnic se obdrží rovnice pro výpočet polohy kartografického pólu:

$$\operatorname{tg} V_k = \frac{\operatorname{tg} U_1 \cos V_2 - \operatorname{tg} U_2 \cos V_1}{\operatorname{tg} U_2 \sin V_1 - \operatorname{tg} U_1 \sin V_2} \quad (1-26)$$

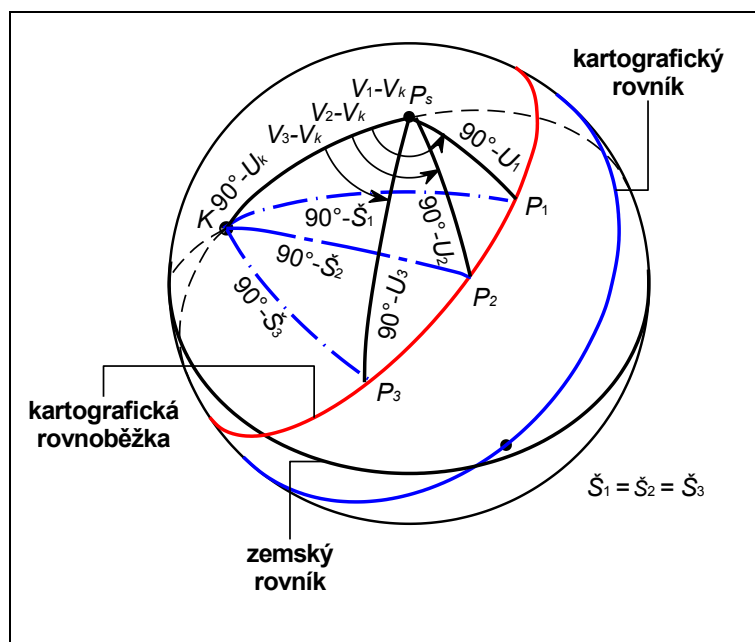
$$\cot g U_k = -\frac{\operatorname{tg} U_1}{\cos(V_1 - V_k)} = -\frac{\operatorname{tg} U_2}{\cos(V_2 - V_k)}$$



Obr. 1-13 Určení polohy kartografického pólu ze dvou bodů na kartografickém rovníku

Výpočet polohy kartografického pólu ze tří bodů

Mějme tři body na kartografické rovnoběžce, jejichž souřadnice budou $P_1 (U_1, V_1)$, $P_2 (U_2, V_2)$ a $P_3 (U_3, V_3)$. Poloha kartografického pólu se potom vypočítá pomocí sinuscosinové věty ze tří sférických trojúhelníků P_1, K, P_s , P_2, K, P_s a P_3, K, P_s (Obr. 1-14):



Obr. 1-14 Určení polohy kartografického pólu ze tří bodů na kartografické rovnoběžce

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} V_k &= \frac{(\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_3 \cos V_3)(\sin U_1 - \sin U_2) - (\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_2 \cos V_2)(\sin U_1 - \sin U_3)}{(\cos U_1 \sin V_1 - \cos U_2 \sin V_2)(\sin U_1 - \sin U_3) - (\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_3 \cos V_3)(\sin U_1 - \sin U_2)} \\
 \operatorname{tg} U_k &= \frac{\cos U_2 \cos(V_k - V_2) - \cos U_1 \cos(V_k - V_1)}{\sin U_1 - \sin U_2} = \frac{\cos U_3 \cos(V_k - V_3) - \cos U_1 \cos(V_k - V_1)}{\sin U_1 - \sin U_3}
 \end{aligned}
 \tag{1-27}$$

1.2.3 Souřadnicové soustavy v zobrazovací rovině

V zobrazovací rovině se převážně používá *pravoúhlá souřadnicová soustava* (*Cartesian coordinate system*) definovaná počátkem O a osami X a Y . V této soustavě mohou být řešeny i všechny úlohy praktické geodézie a kartografie za použití vzorců analytické geometrie v rovině.

Z charakteru některých zobrazení ale plyne, že při transformaci referenční plochy do roviny je výhodnější nejprve použít *polárních souřadnic* (*polar coordinates*) v rovině. Počátek polární soustavy se volí vždy na ose X soustavy pravoúhlé. V praxi se používají dvě základní řešení – s různými a totožnými počátky obou soustav (Obr. 1-15, Obr. 1-16).

V prvním případě budou pro transformaci polárních souřadnic do rovinných pravoúhlých platit vztahy (1-28):

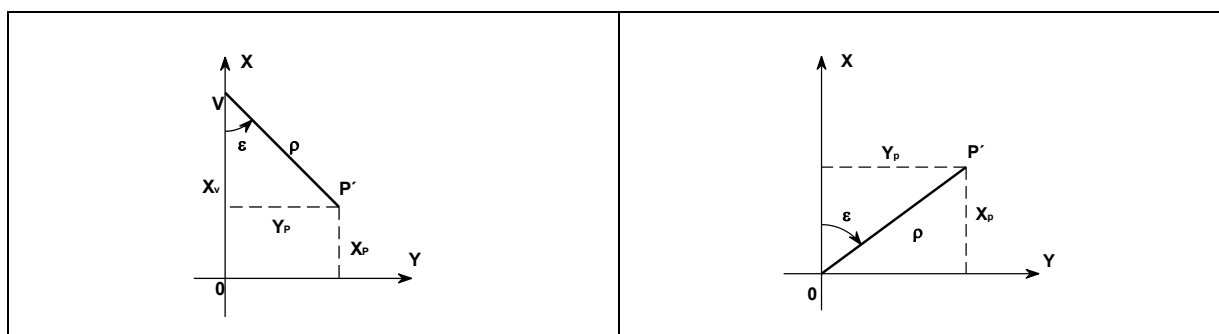
$$\begin{aligned}x &= x_v - \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (1-28)$$

kde: ρ je průvodič zobrazovaného bodu P' od počátku V ,
 ε je polární úhel měřený od záporného směru osy X .

Hodnoty ε bývají uvažovány v rozsahu $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, někdy i v rozsahu $\langle -180^\circ; 180^\circ \rangle$, tedy obdobně jako u zeměpisných délek. Poloha počátku V může být pevná nebo se může měnit v závislosti na hodnotě zeměpisné šířky.

Pokud se v některých zobrazeních ztotožňují počátky obou soustav (Obr. 1-16), potom je výhodnější měřit polární úhel ε od kladného směru osy X . Pro transformaci mezi soustavami poté platí vztahy (1-29)

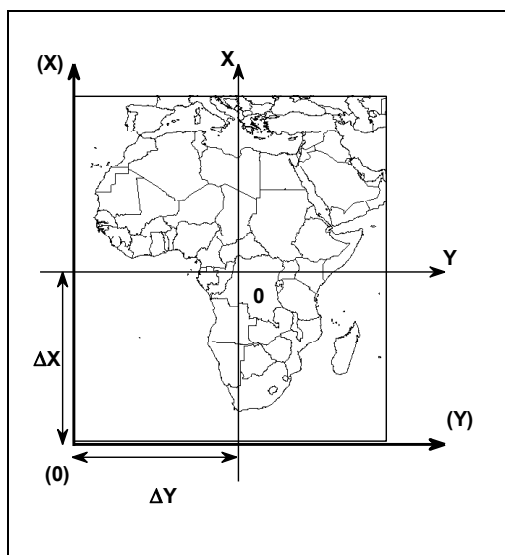
$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (1-29)$$



Obr. 1-15 Polární souřadnicová soustava s různým počátkem než pravoúhlá soustava

Obr. 1-16 Polární souřadnicová soustava s totožným počátkem jako pravoúhlá soustava

Počátek rovinných souřadnicových soustav se zpravidla volí uprostřed zobrazovaného území. Z hlediska konstrukce map, jejich používání nebo používání prostorových geoinformací je však výhodné, aby celé území leželo pouze v 1. kvadrantu. Proto se často k vypočteným souřadnicím přičítají vhodné konstanty Δx (*false northing*) a Δy (*false easting*) (Obr. 1-17).



Obr. 1-17 Posun počátku pravoúhlé souřadnicové soustavy mimo zobrazované území

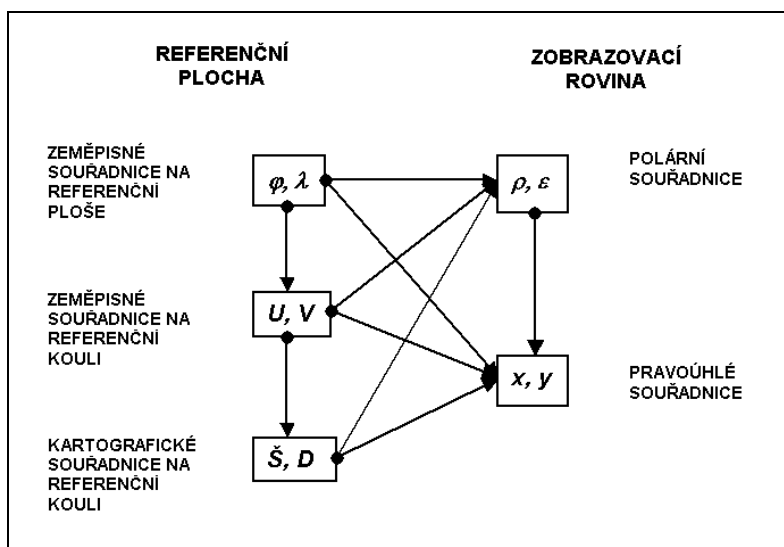
Poznámka: Orientace os X , Y nemusí být vždy stejná jako na předchozích obrázcích. Některé systémy, používané zejména pro státní mapy, mohou mít orientaci otočenou například o 180° (v ČR).

2. Dělení a klasifikace zobrazení

Kartografické zobrazení (map projection, projection) je dáno matematickým vyjádřením závislosti mezi zeměpisnými souřadnicemi na referenční ploše a souřadnicemi v zobrazovací rovině. Při definici uvedené závislosti je možné využít několika způsobů.

2.1 Základní transformace mezi referenčními plochami a rovinnými souřadnicovými systémy

Obr. 2-1 ukazuje možné způsoby transformace zeměpisných souřadnic na referenčních plochách do rovinných souřadnic. Výchozími souřadnicemi jsou zpravidla zeměpisné souřadnice na referenčním elipsoidu φ , λ , v některých případech, zejména u maloměřítkových map, i zeměpisné souřadnice na referenční kouli U , V . Konečné souřadnice jsou vždy rovinné pravoúhlé souřadnice x , y .



Obr. 2-1 Způsoby transformace souřadnic mezi referenčními plochami a zobrazovací rovinou

V praxi se lze setkat se všemi kombinacemi transformace. Například zobrazení vojenských topografických map je přímou transformací mezi zeměpisnými souřadnicemi φ, λ na rovinnými pravoúhlými souřadnicemi x, y (resp. N, E). Zobrazení základních map České republiky je naopak postupnou transformací od zeměpisných souřadnic na referenčním elipsoidu, přes zeměpisné souřadnice na referenční kouli, kartografické souřadnice, polární souřadnice k výsledným rovinným pravoúhlým souřadnicím.

Výchozí referenční plochou při kartografickém zobrazování je referenční elipsoid nebo referenční koule. *Referenční elipsoid* je zpravidla používán tehdy, pokud je požadavek na minimalizaci zkreslení rovinného obrazu. Využívá se zejména při zobrazení státních mapových děl, vizualizaci objektů a jevů databází státních informačních systémů apod. *Referenční koule* se využívá jako výchozí plocha zejména při tvorbě map menších měřítek (v atlasech, nástěnných map apod.) či při vizualizaci digitálních dat s menší rozlišovací úrovní. Referenční koule se používá též při řešení jednodušších navigačních úloh. Je jí však možné využívat při zobrazení státních mapových děl s vysokými požadavky na minimalizaci zkreslení rovinného obrazu, potom ovšem ve variantě *dvojitého zobrazení* (například u Křovákova zobrazení, které je popsáno v kapitole 11).

Kartografické zobrazení může být definováno *geometrickou* nebo *matematickou cestou*.

Zobrazení definovaná *geometrickou cestou* se odvozují z matematického popisu *perspektivní projekce* referenčních těles (v podstatě však výhradně koule) na plochy rozvinutelné do roviny. Tato zobrazení jsou označována jako *projekce* a jsou v současné době používány poměrně zřídka. V podstatě všechna dnes používaná zobrazení jsou definována *matematickou cestou*.

Poznámka: V anglické terminologii jsou však pod pojmem *projekce* (*projection*) uvažovány jak projekce ve významu uvedeném v předchozím textu, tak i všechna ostatní zobrazení.

Zobrazení se třídí podle *různých hledisek*, z nichž nejvýznamnější jsou *vlastnosti zkreslení obrazu* a tvar zeměpisné sítě v rovině. Dalšími hledisky je i tvar zobrazovacích rovnic, poloha konstrukční osy, počet na sebe navazujících částí, na které je povrch zobrazován apod.

2.2 Základní vlastnosti jednoduchých zobrazení

Významnou třídou jsou zobrazení *jednoduchá*. Jejich charakter je možné přibližně vyjádřit pomocí *geometrické představy* promítání referenční plochy na plochy rozvinutelné do roviny, což se používá při rámcovém popisu zobrazení.

Poznámka: Projekce i jednoduchá zobrazení mají totožné *obecné* tvary zobrazovacích rovnic, proto jsou projekce často zahrnovány do třídy jednoduchých zobrazení.

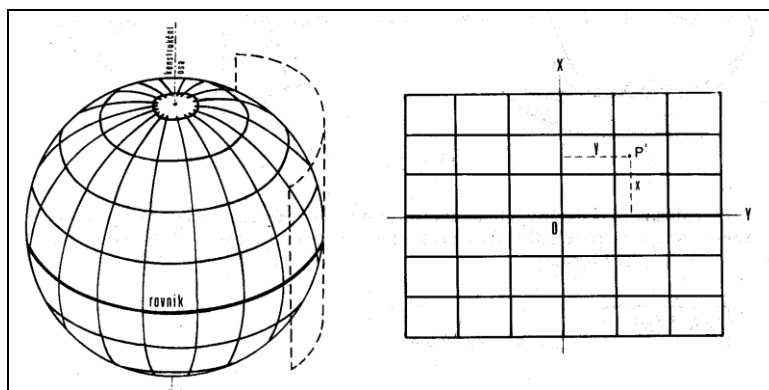
Pod pojmem *plochy rozvinutelné do roviny* se rozumí *plášť válce*, *kužele* nebo *rovina sama*. Jednoduchá zobrazení se podle druhu zobrazovací roviny dělí na *válcová* (*cylindrical*), *kuželová* (*conic*) a *azimutální* (*planar, azimuthal*).

Charakter zobrazení je výrazně ovlivněn vzájemnou polohou referenční plochy a *konstrukční osou zobrazovací plochy*. Konstrukční osa je u válcových zobrazení *osou válce*, u kuželových zobrazení *osou kužele* a u azimutálních zobrazení *normálou k tečné rovině* v tečném bodě (nebo ve středu zobrazovaného území). Je-li konstrukční osa totožná s osou rotace Země, je zobrazení označováno jako *pólové* (*normální, polar*), leží-li konstrukční osa v rovině rovníku, potom je zobrazení nazýváno *příčné* (*rovníkové, transversální, transversal*), při obecné poloze konstrukční osy se zobrazení nazývá *obecné* (*šikmé, oblique*).

Obrazem zeměpisné sítě jednoduchých válcových zobrazení v pólové poloze soustava vzájemně ortogonálních přímek (Obr. 2-2). Souřadnice bodů na referenční ploše se přímo transformují na rovinné pravoúhlé souřadnice. Obecné rovnice pro toto zobrazení lze vyjádřit pro referenční elipsoid vztahy (2-1), pro referenční kouli potom vztahy (2-2):

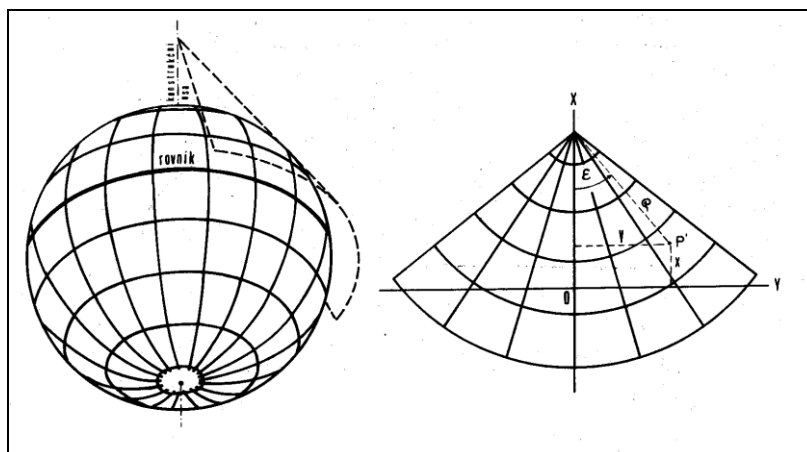
$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) \\ y &= f(\lambda) \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} x &= f(U) \\ y &= f(V) \end{aligned} \quad (2-2)$$



Obr. 2-2 Princip jednoduchého válcového zobrazení (převzato z [23])

Obraz zeměpisné sítě je u jednoduchým kuželových a azimutálních zobrazení v pólové poloze tvořen soustavou polopřímek vycházejících z jednoho bodu (poledníky) a oblouků soustředných kružnic (u kuželových zobrazení) nebo celých soustředných kružnic (u zobrazení azimutálních) s totožným středem (Obr. 2-3, Obr. 2-4). Obrazy poledníků a rovnoběžek jsou na sebe vzájemně kolmé.

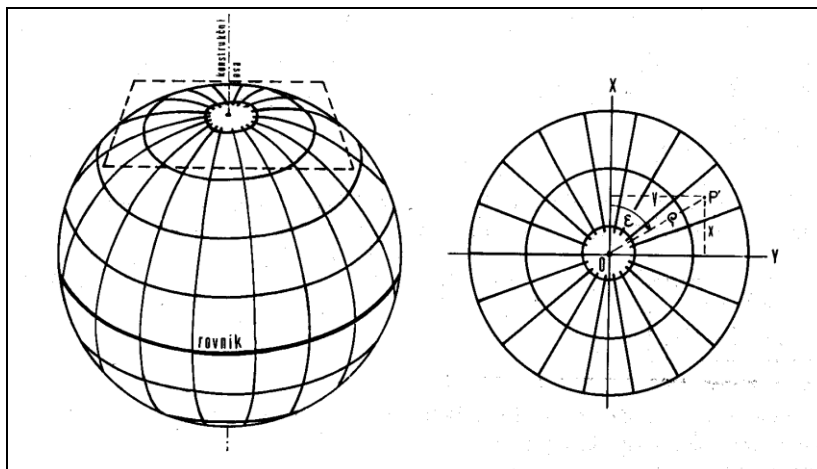


Obr. 2-3 Princip jednoduchého kuželového zobrazení (převzato z [23])

Zobrazovací rovnice u obou typů zobrazení mají podobný tvar a vycházejí nejprve z transformace souřadnic na referenční ploše na rovinné polární souřadnice podle obecných vztahů (2-3) pro referenční elipsoid a (2-4) pro referenční kouli:

$$\begin{aligned} \rho &= f(\varphi) \\ \varepsilon &= f(\lambda) \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned}\rho &= f(U) \\ \varepsilon &= f(V)\end{aligned}\quad (2-4)$$



Obr. 2-4 Princip jednoduchého azimutálního zobrazení (převzato z [23])

Při rovníkové a obecné poloze se v zobrazovacích rovnicích nahrazují souřadnice zeměpisné souřadnicemi kartografickými \check{S} , D . Tvary zobrazovacích rovnic potom jsou (2-5) pro zobrazení válcová a (2-6) pro zobrazení kuželová a azimutální:

$$\begin{aligned}x &= f(\check{S}) \\ y &= f(D)\end{aligned}\quad (2-5)$$

$$\begin{aligned}\rho &= f(\check{S}) \\ \varepsilon &= f(D)\end{aligned}\quad (2-6)$$

Pól K kartografické soustavy je umístěn v jednom z průsečíků konstrukční osy zobrazovací plochy s referenčním tělesem. Obraz kartografické sítě v rovině je stejný jako u zeměpisné sítě v pólové poloze, obraz zeměpisné sítě je však často tvořen složitými křivkami.

2.3 Základní vlastnosti nepravých zobrazení

Samostatnou skupinu zobrazení tvoří *nepravá zobrazení*, někdy nazývaná i *pseudozobrazení* (*pseudo projections*). U těchto zobrazení jedna z obou zobrazovacích rovnic funkcí obou souřadnic na referenční ploše. Základní referenční plochou je zde téměř výhradně používána referenční koule a zobrazení se definují zpravidla pouze v pólové poloze. Základní zobrazovací rovnice jsou dány vztahy (2-7) pro *nepravá válcová* (*pseudoválcová*) zobrazení a (2-8) pro *nepravá kuželové*, resp. *azimutální* (*pseudokónická*, resp. *pseudoazimutální*) zobrazení:

$$\begin{aligned}x &= f(U) \\ y &= f(U, V)\end{aligned}\quad (2-7)$$

$$\begin{aligned}\rho &= f(U) \\ \varepsilon &= f(U, V)\end{aligned}\quad (2-8)$$

Rovinná souřadnice x , resp. ρ je funkcí pouze jedné proměnné (zeměpisné šířky U), mají obrazy rovnoběžek stejný tvar jako u jednoduchých zobrazení. Tvary poledníků však bývají

složitější křivky (sinusoidy, části eliptických oblouků apod.). Poledníky a rovnoběžky nejsou obecně vzájemně ortogonální.

Do této třídy zobrazení se často zahrnují i zobrazení *polykónická*, což jsou v podstatě jednoduchá kuželová zobrazení s nekonečným počtem zobrazovacích kuželů.

Nepravá zobrazení se používají převážně pro mapy malých měřítek, zejména pro zobrazování celé Země na jednom mapovém listě.

2.4 Základní charakteristiky obecných zobrazení

U *obecných zobrazení* jsou obě zobrazovací rovnice funkcí obou souřadnic na referenční ploše. V pólové poloze zobrazovací rovnice mají v případě referenčního elipsoidu tvary (2-9) nebo (2-11), pro referenční kouli potom tvary (2-10) nebo (2-12)

$$x = f(\varphi, \lambda) \quad (2-9)$$

$$y = f(\varphi, \lambda)$$

$$x = f(U, V) \quad (2-10)$$

$$y = f(U, V)$$

$$\rho = f(\varphi, \lambda) \quad (2-11)$$

$$\varepsilon = f(\varphi, \lambda)$$

$$\rho = f(U, V) \quad (2-12)$$

$$\varepsilon = f(U, V)$$

Obecná zobrazení mají mnoho variant. V praktické kartografii a obecně v geoinformatice se používají pouze některé, které jsou z hlediska jejich vlastností vhodné pro tvorbu map či definování zobrazení v referenčních souřadnicových systémech.

2.5 Klasifikace zobrazení podle zkreslení

Rovinný obraz referenční plochy je vždy *zkreslen*, obecně *jsou deformovány* jak vzájemné *polohy bodů*, tak *tvary (křivosti) čar*. Zkreslení (*distortion*) roste se zvětšujícím se rozsahem zobrazovaného území, pokud je zobrazováno do roviny jako celek. Některé charakteristiky zkreslení jsou společné pro celou skupinu zobrazení, například u všech jednoduchých zobrazení v pólové poloze jsou vždy extrémně délkově zkreslené poledníky a rovnoběžky.

Při odvozování jednotlivých zobrazení se uvažují požadavky na průběh a celkový charakter zkreslení rovinného obrazu. Zobrazení potom mohou být koncipována jako *ekvidistantní (stejnodélná, equidistant)*, *ekvivalentní (stejnoplochá, equivalent)*, *konformní (stejnoúhlá, conformal)*.

Ekvidistantní zobrazení nezkreslují délky určité soustavy nebo určitou soustavu samotnou. Zpravidla touto soustavou bývají zeměpisné (kartografické) poledníky nebo rovnoběžky. Nelze definovat ekvidistantní zobrazení, které by nezkreslovalo žádné délky.

Ekvivalentní zobrazení nezkresluje plochy, zkreslení úhlů je však zde poměrně značné, což se projevuje zejména ve tvarech ploch.

Konformní zobrazení ponechává nezkreslené úhly, značně jsou však zde zkreslovány plochy.

Nepravá a obecná zobrazení lze definovat tak, že nezakreslují jak určitou soustavu čar, tak například plochy. Proto se některá z těchto zobrazení nazývají *kompenzační (vyrovnávací)*.

V současné praxi v oblasti kartografie a geoinformatiky se zobrazení ekvidistantní a ekvivalentní uplatňují především při tvorbě map nebo grafických dokumentů (vizualizovaného vybraného obsahu prostorových geodatabází) menších měřítek a jsou často odvozována přímo z referenční koule.

Konformní zobrazení se používají pro matematický základ státních mapových děl, vojenských topografických a speciálních map, map používaných především pro orientaci a navigaci a pro vizualizaci digitálních informací prostorových geodatabází používaných pro obdobné činnosti jako státní mapová díla. V zájmu dosažení minimálních hodnot zkreslení jsou tato zobrazení definována z referenčních elipsoidů a jsou často používána pouze pro relativně malé územní celky vymezené zpravidla rovnoběžkovými nebo poledníkovými pásy.

Nepravá a obecná zobrazení (s výjimkou zobrazení používaných jako konformní, viz předchozí odstavec) se používají především pro zobrazování rozsáhlých územních celků nebo celé Země.

3. Zákony zkreslení

Při transformaci mezi referenčními plochami a zobrazovací rovinou, případně i referenční kouli, dochází ke *zkreslování* délek, ploch a úhlů. Tato kapitola obecně řeší problematiku zkreslení, jejich principy, vztahy a závislosti. Podrobně budou odvozeny zákony zkreslení při obecném zobrazení z *referenčního elipsoidu do zobrazovací roviny vztahené k rovinné pravoúhlé soustavě souřadnic*. Všechny vztahy budou řešené pro pólovou polohu zobrazení.

Vztahy platné *pro referenční kouli* se získají úpravou proměnných ve výsledných vzorcích, při nichž jsou zeměpisné souřadnice na elipsoidu nahrazeny zeměpisnými souřadnicemi na kouli a meridiánový a příčný poloměr křivosti jsou nahrazeny poloměrem koule. Vztahy pro *rovníkovou a šikmou polohu* se získají náhradou zeměpisných souřadnic na kouli souřadnicemi kartografickými.

Vztahy *pro polární rovinné souřadnice* budou odvozeny zvlášť.

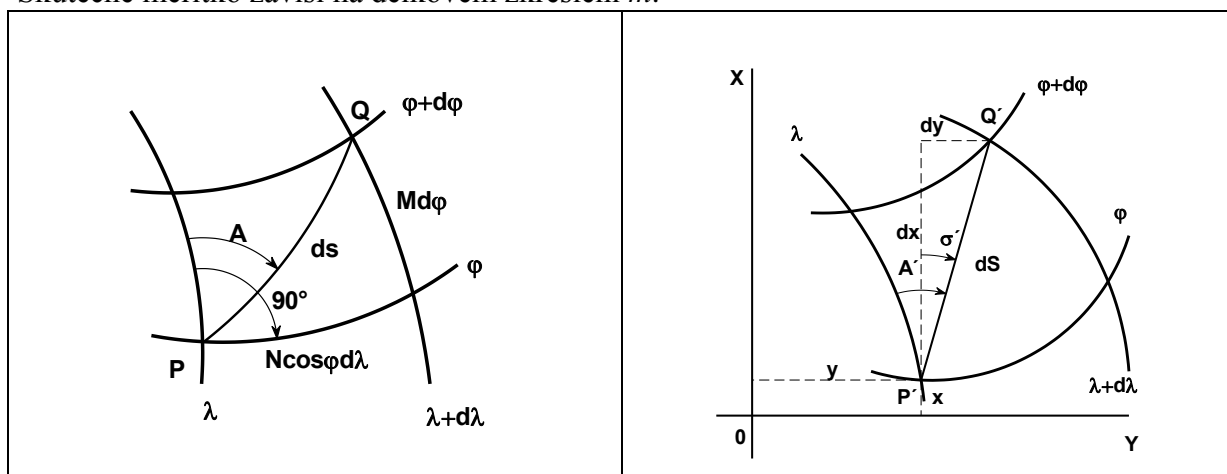
3.1 Délkové zkreslení

Základním posuzovaným zkreslením je *délkové zkreslení*, které je definováno vztahem:

$$m = \frac{dS}{ds} \quad (3-1)$$

kde ds je délkový element na referenční ploše,
 dS je délkový element v zobrazovací rovině.

Délkové zkreslení úzce souvisí s *měřítkem zobrazeného území* na mapě nebo v grafickém dokumentu, které bývá uvedeno v mimorámových údajích. Obecně měřítko uvádí poměr délek na mapě a ve skutečnosti a je uváděno jako konstantní pro celou mapu. V podstatě se však jedná pouze o *hlavní měřítko*, které je vztaheno k určité poloze nebo k určitým směrům. Toto měřítko se ve skutečnosti mění v závislosti na poloze území na mapě nebo grafickém dokumentu a to tím více, čím je větší zobrazované území a čím je hlavní měřítko menší. Skutečné měřítko závisí na délkovém zkreslení m .



Obr. 3-1 Délkový element na referenčním elipsoidu

Obr. 3-2 Délkový element v zobrazovací rovině

Mějme na referenčním elipsoidu dva diferenciálně blízké body $P[\varphi, \lambda]$ a $Q[\varphi+d\varphi, \lambda+d\lambda]$ (Obr. 3-1). Jejich vzdálenost je délkový element ds a zeměpisný (geodetický) azimut tohoto elementu je A . Po zobrazení obou bodů do zobrazovací roviny pomocí vztahů (2-9):

$$x = f(\varphi, \lambda)$$

$$y = f(\varphi, \lambda)$$

budou mít tyto transformované body rovinné souřadnice $P[x, y]$ a $Q[x+dx, y+dy]$ (Obr. 3-2). Jejich vzdálenost v rovině bude opět délkovým elementem dS , jehož zeměpisný azimut v rovině bude A' a jeho směrník σ' .

Délkový element na referenční ploše lze vyjádřit podle obrázku (Obr. 3-1) rovnicí

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (3-2)$$

Tomuto elementu bude podle (Obr. 3-2) odpovídat délkový element v rovině:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

Hodnoty dx a dy se určí jako totální diferenciály z obecných zobrazovacích rovnic (2-9):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad (3-3)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad (3-4)$$

Hodnotu dS lze potom vyjádřit:

$$dS^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 \quad (3-5)$$

a po úpravě

$$dS^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2 + \left(\frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda} \right) 2d\varphi d\lambda + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 \quad (3-6)$$

Součty kvadrátů a součinů parciálních derivací se mohou označit *Gaussovými koeficienty*:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (3-7)$$

$$F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda} \quad (3-8)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (3-9)$$

a rovnice (3-6) získá tvar:

$$dS^2 = Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2 \quad (3-10)$$

Po dosazení výrazů (3-2) a (3-10) do rovnice (3-1) bude délkové zkreslení dáno vztahem:

$$m^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (3-11)$$

Na referenčním elipsoidu podle obrázku (Obr. 3-1) platí:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \frac{Md\varphi}{ds} \\ \cos(90^\circ - A) &= \frac{N \cos \varphi d\lambda}{ds} \end{aligned}$$

a lze tedy vyjádřit:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\cos A}{M} ds \\ d\lambda &= \frac{\sin A}{N \cos \varphi} ds \end{aligned} \quad (3-12)$$

S uvážením vztahů goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} 2 \sin A \cos A &= \sin 2A \\ \cos^2 A + \sin^2 A &= 1 \end{aligned} \quad (3-13)$$

dosazením vztahů (3-12) do výrazu (3-11) se po úpravě získá výsledný vztah pro výpočet délkového zkreslení:

$$m^2 = \frac{E}{M^2} \cos^2 A + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A + \frac{G}{N^2 \cos^2 \varphi} \sin^2 A \quad (3-14)$$

Rovnice (3-14) je obecnou rovnicí pro výpočet délkového zkreslení jakéhokoliv zobrazení. Z rovnice plyne, že délkové zkreslení je závislé na poloze bodu, pro které se zkreslení počítá, a dále na *azimutu* délkového elementu. Bude-li tento azimut A roven 0° nebo 180° (poledník), potom délkové zkreslení ve směru poledníku bude rovno:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{M} \quad (3-15)$$

Pro azimut A rovný 90° , resp. 270° (rovnoběžka) bude délkové zkreslení:

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi} \quad (3-16)$$

S využitím výrazů (3-15) a (3-16) lze rovnici (3-14) psát i ve tvaru:

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A \quad (3-17)$$

3.1.1 Délkové zkreslení na referenční kouli

Délkové zkreslení na referenční kouli je obdobné jako na referenčním elipsoidu. Při výchozích zobrazovacích rovnicích (2-10) nabudou rovnice (3-7), (3-8) a (3-9) tvaru:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)^2 \quad (3-18)$$

$$F = \frac{\partial x \partial x}{\partial U \partial V} + \frac{\partial y \partial y}{\partial U \partial V} \quad (3-19)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V} \right)^2 \quad (3-20)$$

Potom je možno vyjádřit rovnice zkreslení v polednicích, rovnoběžkách a v obecném azimutu:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} \quad (3-21)$$

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{R \cos U} \quad (3-22)$$

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{R^2 \cos U} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A \quad (3-23)$$

3.1.2 Extrémní délkové zkreslení

Při konstantní poloze bodu P bude mít rovnice (3-17) pouze jednu proměnnou – azimut délkového elementu A . Derivací této funkce a jejím položením rovné nule se zjistí extrémní délkové zkreslení, které budou v azimutech označených symboly A_a a A_b :

$$\frac{dm^2}{dA} = 2m \frac{dm}{dA} = -m_p^2 2 \sin A_a \cos A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} 2 \cos 2A_a + m_r^2 2 \sin A_a \cos A_a = 0$$

Odtud se s využitím vztahů (3-13) získá vztah:

$$\operatorname{tg} 2A_a = \frac{2F}{(m_p^2 - m_r^2) MN \cos \varphi} \quad (3-24)$$

Tangenta úhlu je v intervalu 360° dvojznačná (v I. a III. kvadrantu kladná a ve II. a IV. kvadrantu záporná). Proto rovnice (3-24) určuje dva azimuty:

- $2A_a$,
- $2A_b = 180^\circ - 2A_a$

tedy:

- A_a ,
- $A_b = 90^\circ - A_a$

Azimuty A_a , A_b jsou měřeny na referenčním elipsoidu. Po jejich zobrazení do zobrazovací roviny budou označeny A'_a , A'_b , přitom obecně platí:

$$A_a \neq A'_a, A_b \neq A'_b$$

Dosadí-li se hodnoty A_a , A_b do rovnice (3-14), získají se dvě rovnice pro extrémní délková zkreslení m_a a m_b , která jsou ve vzájemně kolmých směrech:

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a \quad (3-25)$$

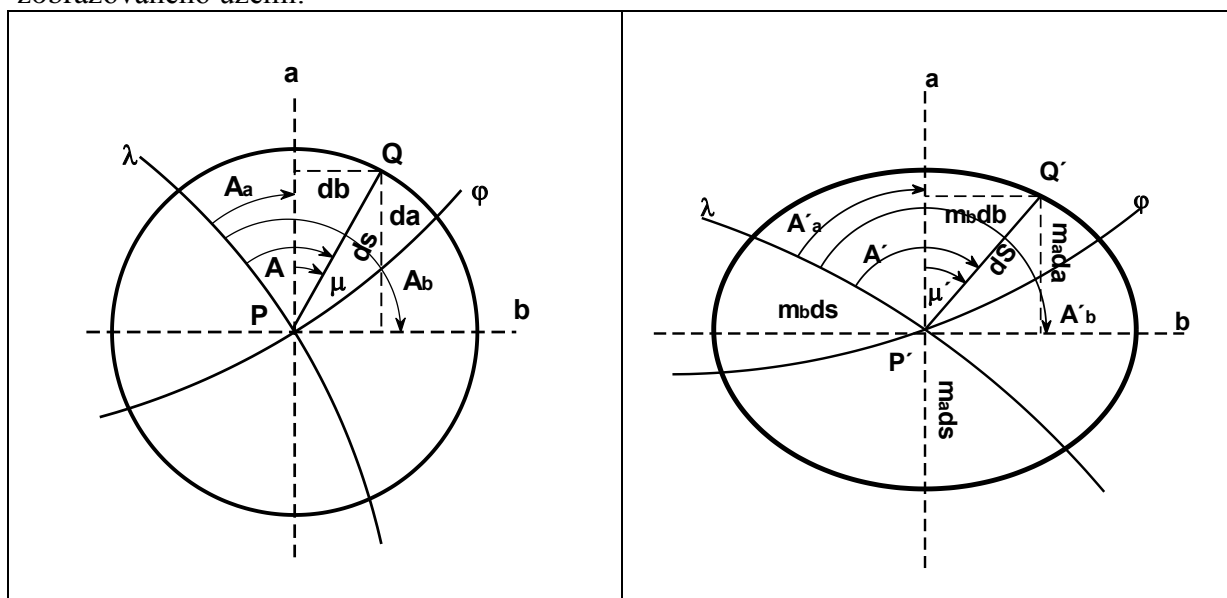
$$m_b^2 = m_p^2 \cos^2 A_b + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_b + m_r^2 \sin^2 A_b$$

S uvažáním, že $A_b = 90^\circ - A_a$ může mít druhá rovnice i tvar:

$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a \quad (3-26)$$

Směry a, b , ve kterých jsou extrémní délková zkreslení, se nazývají *hlavní paprsky zkreslení*. Hlavní paprsky zkreslení jako jediné ortogonální směry na referenční ploše zůstávají vzájemně kolmé i po zobrazení do roviny.

Na obrázku (Obr. 3-3) je kružnice na referenčním elipsoidu o poloměru ds . Po jejím zobrazení do roviny se kružnice změní na elipsu, jejíž poloosy leží ve směrech hlavních paprsků zkreslení (Obr. 3-4). Velikosti jejich poloos budou $a = m_a ds$ a $b = m_b ds$. Tato elipsa se nazývá *elipsa zkreslení*, též *Tissotova elipsa*, *Tissotova indikatrix*. Tvar elipsy a orientace jejích os umožňuje posuzovat hodnoty zkreslení a orientaci jeho extrémů v různých částech zobrazovaného území.



Obr. 3-3 Diferenciální kružnice na referenčním elipsoidu

Obr. 3-4 Obraz diferenciální kružnice v zobrazovací rovině

Uvažuje-li se elipsa zkreslení, lze obecný vzorec pro výpočet délkového zkreslení definovat i pomocí hodnot extrémů zkreslení a souřadnic definovaných v ortogonální soustavě hlavních paprsků zkreslení (Obr. 3-4):

$$dS^2 = m_a^2 da^2 + m_b^2 db^2$$

kde podle (Obr. 3-3) je:

$$da = ds \cos \mu$$

$$db = ds \sin \mu$$

Po dosazení do (3-1) se získá jednodušší vzorec pro výpočet délkového zkreslení:

$$m^2 = m_a^2 \cos^2 \mu + m_b^2 \sin^2 \mu \quad (3-27)$$

kde μ je směrnik uvažovaný od hlavního paprsku zkreslení a počítaný podle vztahu:

$$\mu = A - A_a$$

3.1.3 Extrémní délkové zkreslení na referenční kouli

Pokud se jako referenční těleso uvažuje referenční koule o poloměru R , potom rovnice (3-24), (3-25) a (3-26) budou mít tvar:

$$\operatorname{tg} 2A_a = \frac{2F}{(m_p^2 - m_r^2)R^2 \cos U} \quad (3-28)$$

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos U} \sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a \quad (3-29)$$

$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos U} \sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a \quad (3-30)$$

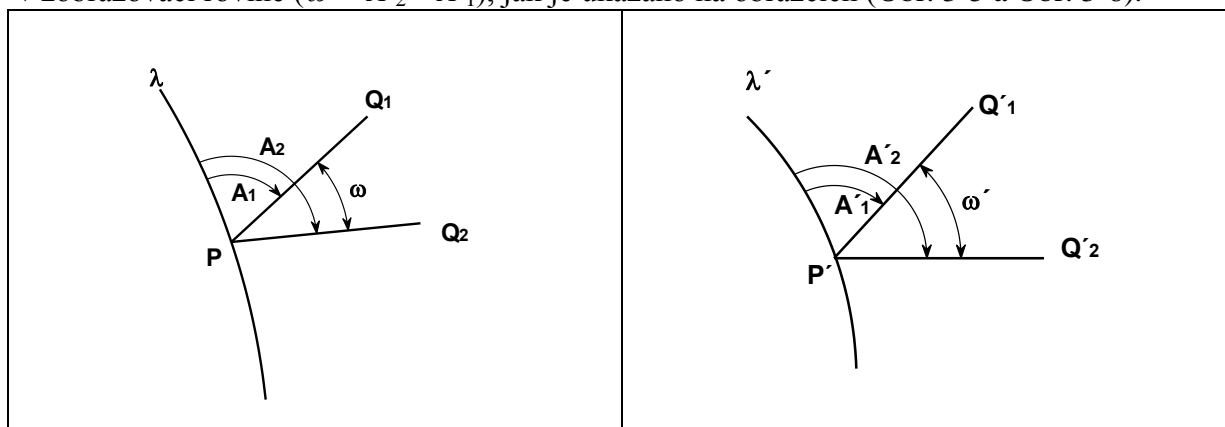
3.2 Úhlové zkreslení

Úhlové zkreslení $\Delta\omega$ je definováno vztahem (3-31):

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \quad (3-31)$$

kde ω je úhel na referenční ploše mezi dvěma směry PQ_1 a PQ_2 ,
 ω' je odpovídající úhel po zobrazení do zobrazovací roviny.

Úhel ω lze však vyjádřit i jako rozdíl dvou azimutů jak na referenční ploše ($\omega = A_2 - A_1$), tak i v zobrazovací rovině ($\omega' = A'_2 - A'_1$), jak je ukázáno na obrázcích (Obr. 3-5 a Obr. 3-6).



Obr. 3-5 Úhel jako rozdíl dvou azimutů na referenční ploše

Obr. 3-6 Úhel jako rozdíl dvou azimutů v zobrazovací rovině

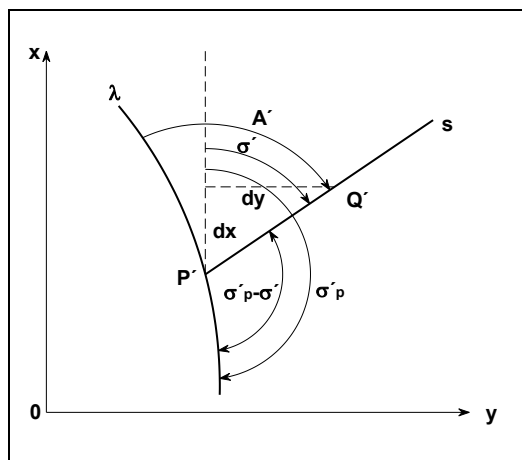
Zkreslení úhlu je potom možné vyjádřit jako:

$$\Delta\omega = (A'_2 - A'_1) - (A_2 - A_1) = (A'_2 - A_2) - (A'_1 - A_1) = \Delta A_2 - \Delta A_1$$

kde ΔA je zkreslení azimutu vyjádřené obecným vzorcem:

$$\Delta A = A' - A \quad (3-32)$$

Zkreslení azimutu je možné odvodit z obrázku (Obr. 3-7) zobrazující rovinný obraz zeměpisného poledníku λ a libovolného směru s , jehož azimut v zobrazovací rovině je A' a na němž diferenciálně blízku od výchozího bodu P' leží bod Q' . Podle obrázku platí:



Obr. 3-7 Azimut obecného směru v zobrazovací rovině

$$A' = 180^\circ - (\sigma'_p - \sigma')$$

Lze psát:

$$\operatorname{tg} A' = -\operatorname{tg}(\sigma'_p - \sigma')$$

Podle vzorce pro tangentu rozdílu dvou úhlů lze předchozí vzorec upravit:

$$\operatorname{tg} A' = -\frac{\operatorname{tg} \sigma'_p - \operatorname{tg} \sigma'}{1 + \operatorname{tg} \sigma'_p \operatorname{tg} \sigma'} = \frac{\operatorname{tg} \sigma' - \operatorname{tg} \sigma'_p}{1 + \operatorname{tg} \sigma'_p \operatorname{tg} \sigma'} \quad (3-33)$$

Pro určení azimutu A' je tedy nutné stanovit tangenty směrnic směru s a poledníku λ . Podle obrázku (Obr. 3-7) lze směrnic σ' vyjádřit jako

$$\operatorname{tg} \sigma' = \frac{dy}{dx}$$

kde dx a dy je možné vyjádřit vztahy (3-3) a (3-4). Potom bude:

$$\operatorname{tg} \sigma' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} \quad (3-34)$$

Dosadí-li se za diferenciály zeměpisných souřadnic tvary (3-12), rovnice (3-34) bude mít tvar:

$$\operatorname{tg} \sigma' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\cos A}{M} ds + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\sin A}{N \cos \varphi} ds}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\cos A}{M} ds + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\sin A}{N \cos \varphi} ds} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} N \cos \varphi \cos A + \frac{\partial y}{\partial \lambda} M \sin A}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} N \cos \varphi \cos A + \frac{\partial x}{\partial \lambda} M \sin A} \quad (3-35)$$

Uváží-li se, že azimut poledníku A_p je 0° , potom směrnic obrazu poledníku v zobrazovací rovině bude podle rovnice (3-35) roven:

$$\operatorname{tg} \sigma_p' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} \quad (3-36)$$

Dosazením výrazů (3-35) a (3-36) do vzorce (3-34) se po úpravách obdrží:

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \frac{M}{N} \cos \varphi \cot gA + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}} \quad (3-37)$$

Využijí-li se Gaussovy koeficienty (3-7) (3-8):

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda}$$

a zavede-li se čtvrtý Gaussov koeficient H

$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (3-38)$$

potom lze výraz (3-37) psát ve tvaru:

$$\operatorname{tg} A' = \frac{H}{E \frac{M}{N} \cos \varphi \cot gA + F} \quad (3-39)$$

Pomocí rovnice (3-39) je tedy možné vypočítat k azimutu A obecného směru s na referenční ploše azimut A' obrazu tohoto směru v zobrazovací rovině a tím lze vypočítat i zkreslení azimutu ΔA . Ze znalosti zkreslení azimutu lze vypočítat i zkreslení obecného úhlu $\Delta \omega$.

Zkreslení azimutu je možné vypočítat i z extrémních hodnot délkového zkreslení. Protože podle obrázků Obr. 3-3 a Obr. 3-4 platí:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{db}{da}$$

$$\operatorname{tg} \mu' = \frac{m_b db}{m_a da}$$

potom lze psát:

$$\operatorname{tg} \mu' = \frac{m_b}{m_a} \operatorname{tg} \mu \quad (3-40)$$

Pokud je $\mu = A - A_a$, lze tedy z něho vypočítat $\mu' = A' - A'_a$ a tím i zkreslení směrníku μ i azimutu A podle vztahů (3-41) a (3-42):

$$\Delta \mu = \mu' - \mu \quad (3-41)$$

$$\Delta A = A' - A = \Delta\mu + A'_a - A_a \quad (3-42)$$

3.2.1 Úhlové zkreslení na referenční kouli

Rovnice (3-38) a (3-39) budou mít na referenční kouli tvar:

$$H = \frac{\partial x}{\partial U} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial U} \quad (3-43)$$

$$\operatorname{tg} A' = \frac{H}{E \cos U \cot g A + F} \quad (3-44)$$

Ostatní odvozené vztahy jsou beze změny.

3.2.2 Extrémní úhlové zkreslení

Z hlediska tvarů rovnic (3-39) a (3-40) v elipse zkreslení existují symetrické směry, ve kterých úhlové zkreslení dosahuje extrémů. Označí-li se tyto symetrické směry symbolem ε , potom jejich směrníky v ortogonální soustavě hlavních paprsků zkreslení budou μ_ε a μ'_ε a jim odpovídající azimuty A_ε a A'_ε . Velikost extrémního zkreslení směrníku bude $\Delta\mu_\varepsilon = \mu'_\varepsilon - \mu_\varepsilon$ a velikost extrémního zkreslení azimutu $\Delta A = A'_\varepsilon - A_\varepsilon$.

Podle pravidla pro hledání extrémů funkce platí:

$$d(\mu' - \mu) = 0$$

z toho

$$d\mu' = d\mu$$

Diferencováním rovnice (3-40) se získá:

$$\frac{1}{\cos^2 \mu'_\varepsilon} = \frac{m_b}{m_a} \frac{1}{\cos^2 \mu_\varepsilon} \quad (3-45)$$

Protože obecně platí, že

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

lze rovnici (3-45) upravit na tvar:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \mu'_\varepsilon = \frac{m_b}{m_a} (1 + \operatorname{tg}^2 \mu_\varepsilon) \quad (3-46)$$

a po dosazení za $\operatorname{tg}^2 \mu'_\varepsilon$ z rovnice (3-40) pro hodnotu μ'_ε se obdrží:

$$1 + \frac{m_b^2}{m_a^2} \operatorname{tg}^2 \mu_\varepsilon = \frac{m_b}{m_a} (1 + \operatorname{tg}^2 \mu_\varepsilon)$$

a odtud

$$\operatorname{tg}^2 \mu_\varepsilon \frac{m_b}{m_a} \left(\frac{m_b}{m_a} - 1 \right) = \frac{m_b}{m_a} - 1$$

Lze tedy vypočítat:

$$\operatorname{tg} \mu_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{m_a}{m_b}} \quad (3-47)$$

Pokud by se do výrazu (3-46) dosadila hodnota z výrazu (3-40) $\operatorname{tg} \mu$, potom se získá obdobný výraz jako (3-47):

$$\operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}' = \sqrt{\frac{m_b}{m_a}} \quad (3-48)$$

Vzorce (3-47) a (3-48) určují jak na referenčním elipsoidu, tak i v zobrazovací rovině čtyři symetrické směry ε dané dvojnásobností tangenty v intervalu 0° - 360° a kladnou a zápornou hodnotou výrazu m_a/m_b , resp. m_b/m_a po odmocnění. V těchto směrech dosahuje úhlové zkreslení svých extrémů.

Ze známých hodnot μ_{ε} a μ_{ε}' se vypočítá na základě vzorce (3-41) velikost extrémního zkreslení směrníku

$$\Delta \mu_{\varepsilon} = \mu_{\varepsilon}' - \mu_{\varepsilon}$$

Uvedený vzorec je možné dále upravovat

$$\operatorname{tg} \Delta \mu_{\varepsilon} = \operatorname{tg}(\mu_{\varepsilon}' - \mu_{\varepsilon}) = \frac{\operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}' - \operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}}{1 + \operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}' \operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}}$$

a po dosazení za $\operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}$ a $\operatorname{tg} \mu_{\varepsilon}'$ ze vzorců (3-47) a (3-48) se získá tvar:

$$\operatorname{tg} \Delta \mu_{\varepsilon} = \frac{m_b - m_a}{2\sqrt{m_a m_b}} \quad (3-49)$$

který je ještě možné upravit podle obecného vztahu

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

na tvar

$$\sin \Delta \mu_{\varepsilon} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} \quad (3-50)$$

Ze znalosti hodnoty $\Delta \mu_{\varepsilon}$ je možné vypočítat hodnotu extrémního zkreslení azimutu podle vztahu (3-42):

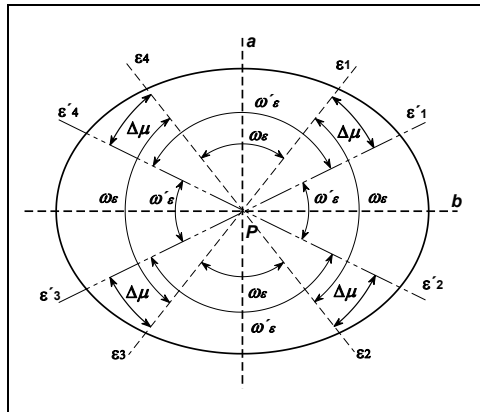
$$\Delta A_{\varepsilon} = \Delta \mu_{\varepsilon} + A'_a - A_a \quad (3-51)$$

Pomocí vyjádření extrémního zkreslení směrníku uvažovaného v ortogonální soustavě hlavních paprsků zkreslení je možné odvodit vzorec pro výpočet extrémního zkreslení obecného úhlu. K jeho odvození se využije elipsa zkreslení (Obr. 3-8), na níž jsou vyznačeny jak směry ε vymezené v zobrazovací rovině směrníky μ_{ε}' , tak i odpovídající směry na referenčním elipsoidu (zde označené vymezené ε'), které mají směrníky μ_{ε} . Všechny čtyři dvojice svírají stejný úhel $\Delta \mu_{\varepsilon}$. Z obrázku je patrné, že právě úhly sevřené jednotlivými směry ε budou nejvíce zkreslené a platí pro ně vztah:

$$\omega_{\varepsilon}' = \omega_{\varepsilon} \pm 2\Delta \mu_{\varepsilon}$$

a lze tedy vypočítat extrémní úhlové zkreslení

$$\Delta\omega_\varepsilon = \omega'_\varepsilon - \omega_\varepsilon = \pm 2\Delta\mu_\varepsilon \quad (3-52)$$



Obr. 3-8 Směry extrémů úhlového zkreslení

Při vyhodnocování extrémního úhlového zkreslení jeho znaménko nemá praktický význam a proto se většinou uvádí v absolutní hodnotě.

Dosadí-li se výraz (3-52) do výrazu (3-50), získá se po úpravě nejvíce používaný vztah pro výpočet extrémního zkreslení:

$$\sin \frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} \quad (3-53)$$

Poznámka: Při rozborech kartografických zobrazení se úhlové zkreslení vyhodnocuje pouze výjimečně a často se uvažují pouze jeho extrémní hodnoty. Proto se zpravidla vynechává znak extrému ε a symbolem $\Delta\omega$ se rozumí přímo extrémní úhlové zkreslení.

3.3 Plošné zkreslení

Plošné zkreslení je definováno výrazem:

$$m_{pl} = \frac{dP}{dp} \quad (3-54)$$

kde dp je diferenciální plocha na referenční ploše,
 dP je odpovídající diferenciální plocha v zobrazovací rovině.

Diferenciální plochu lze na referenční ploše vymežit diferenciálně blízkými poledníky a rovnoběžkami jako čtyřúhelník (Obr. 3-9). Tato plocha bude mít velikost:

$$dp = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

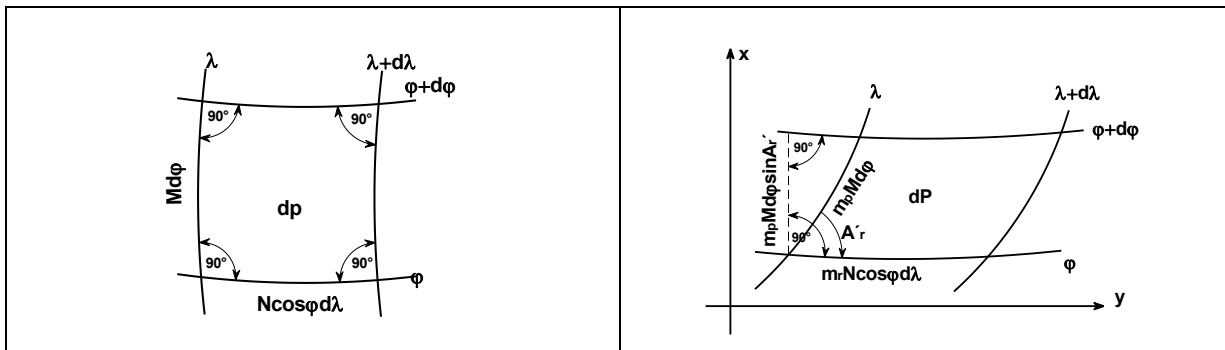
Po zobrazení uvedené diferenciální plochy do roviny bude mít obecně tvar rovnoběžníka, ve kterém bude úhel rovnoběžky a poledníku A_r . Z obrázku (Obr. 3-10) plyne

$$dP = m_p m_r MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \sin A_r$$

Dosadí-li se výše uvedené hodnoty do výrazu (3-54), obdrží se vzorec pro výpočet plošného zkreslení:

$$m_{pl} = \frac{m_p m_r MN \cos \varphi d\varphi d\lambda \sin A_r'}{MN \cos \varphi d\varphi d\lambda}$$

$$m_{pl} = m_p m_r \sin A_r' \quad (3-55)$$



Obr. 3-9 Diferenciální plocha na referenčním elipsoidu

Obr. 3-10 Obraz diferenciální plochy v zobrazovací rovině

Plošné zkreslení lze vypočítat i z poměru plochy diferenciální kružnice na referenční ploše a jejího obrazu v zobrazovací rovině – elipsy zkreslení. Plocha kruhu na obrázku (Obr. 3-3) je

$$dp = \pi ds^2$$

Plocha elipsy na obrázku (Obr. 3-4) potom je

$$dP = \pi m_a ds m_b ds$$

Po dosazení uvedených výrazů do vzorce (3-54) lze vypočítat plošné zkreslení i ze známých hodnot extrémů délkového zkreslení

$$m_{pl} = m_a m_b \quad (3-56)$$

3.4 Zákony zkreslení při užití polárních rovinných souřadnic

Ke zobrazení referenční plochy do roviny a k vyjádření zákonů zkreslení se v případě kuželových a azimutálních zobrazení využívají *polární rovinné souřadnice* ρ, ε , do nichž jsou transformovány *východí zeměpisné souřadnice* φ, λ . Polární rovinné souřadnice jsou teprve následně transformovány do pravoúhlé souřadnicové soustavy – do souřadnic x, y . Mezi jednotlivými souřadnicemi platí vztahy (viz odstavec 2.4 , vztahy (2-11) a odstavec 1.2.3 , vztahy (1-28)):

$$\rho = f(\varphi, \lambda) \quad (3-57)$$

$$\varepsilon = f(\varphi, \lambda)$$

$$x = x_v - \rho \cos \varepsilon \quad (3-58)$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

kde hodnota x_v může být také vyjádřena jako funkce zeměpisné šířky, tedy:

$$x_v = f(\varphi)$$

Pomocí rovnic (3-57) a (3-58) je možno vyjádřit zákony zkreslení. Je však nutné nejprve odvodit Gaussovy symboly E, F, G, H . Rovnice (3-57) a (3-58) jsou složitější než

zobrazovací obecné rovnice. Funkční závislosti mezi zeměpisnými a konečnými rovinnými pravoúhlými souřadnicemi je možné vyjádřit následujícím schématem:

$$\begin{array}{l} \bullet \quad x \rightarrow x_v \rightarrow \varphi \\ \quad \rightarrow \rho \rightarrow \varphi \\ \quad \quad \rightarrow \lambda \\ \quad \quad \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varphi \\ \quad \quad \quad \rightarrow \lambda \end{array} \quad \bullet \quad y \rightarrow \rho \rightarrow \varphi \\ \quad \quad \quad \rightarrow \lambda \\ \quad \quad \quad \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varphi \\ \quad \quad \quad \quad \rightarrow \lambda$$

Schéma je možné využít jako pomůcku pro parciální derivace rovnic (3-58):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (3-59)$$

Diferencováním rovnic (3-58) se získá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_v} &= 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} &= -\cos \varepsilon \\ \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} &= \rho \sin \varepsilon \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin \varepsilon \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} &= \rho \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (3-60)$$

Dosazením vztahů (3-60) do rovnic (3-59) se obdrží:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (3-61)$$

Výrazy (3-70) se dosadí do obecných vztahů pro výpočet Gaussových symbolů (viz. (3-7), (3-8), (3-9) a (3-43)) a získají se rovnice pro vyjádření těchto symbolů v polárních souřadnicích:

$$E = \left(\frac{\partial x_v}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (3-62)$$

$$F = \left(\rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \quad (3-63)$$

$$G = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (3-64)$$

$$H = \left(\sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x_v}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right) \rho \quad (3-65)$$

Parciální derivace zobrazovacích rovnice vyjádřených v polárních souřadnicích:

$$\frac{\partial x_v}{\partial \varphi}, \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}, \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda}$$

se odvodí z konkrétních zobrazovacích rovnic použitého zobrazení.

Pokud jsou známy Gaussovy symboly, je možné vypočítat všechna zkreslení podle příslušných vztahů uvedených v předcházejících kapitolách.

Pro zobrazovací rovnice z *referenční koule* vztahy pro výpočet Gaussových symbolů budou mít tvar:

$$E = \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \right)^2 + \left(\rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 \frac{\partial x_v}{\partial U} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2 \quad (3-66)$$

$$F = \left(\rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} - \cos \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial V} \right) \frac{\partial x_v}{\partial U} + \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \rho}{\partial V} + \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \quad (3-67)$$

$$G = \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)^2 \quad (3-68)$$

$$H = \left(\sin \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial V} + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right) \frac{\partial x_v}{\partial U} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} - \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right) \rho \quad (3-69)$$

3.5 Vizualizace průběhu zkreslení

Představu o rozložení a charakteru průběhu zkreslení je možné vyjádřit pomocí *čar stejných hodnot zkreslení*, tzv. *ekvideformát*. Ekvideformáty mohou být konstruovány pro průběh všech druhů zkreslení. Vzhledem ke skutečnosti, že plošné a úhlové zkreslení je možné vyjádřit i pomocí délkového zkreslení, jsou nejčastěji zobrazovány ekvideformáty délkových zkreslení (nazývané též jako *izometrické čáry*).

Délkové zkreslení je, jak bylo uvedeno v předcházejícím textu, závislé nejen na poloze bodu, ale i na směru délkového elementu. Proto se zpravidla pro délkové ekvideformáty volí směry poledníků nebo rovnoběžek (zeměpisných či kartografických).

Ekvideformáty jsou popisovány příslušnými hodnotami zkreslení. Často je však volen popis *poměrovými formami*. Například délkové zkreslení je vyjádřeno ve formě:

$$v_m = m - 1 \quad (3-70)$$

což po dosazení za m lze také psát ve tvaru:

$$v_m = \frac{dS - ds}{ds}$$

Hodnota ds se často volí 1 km, což je dostatečně malá hodnota vzhledem k rozměrům Země, a rozdíl $dS - ds$ se uvádí v metrech s příslušným znaménkem. Například pro hodnotu $m = 0,9996$ bude:

$$v_m = \frac{0,9996 - 1}{1}$$

čili $v_m = 0,4 \text{ m.km}^{-1}$.

Poměrová forma plošného zkreslení bude mít procentuální vyjádření ve tvaru:

$$v_{pl} \% = (m_{pl} - 1)100\% \quad (3-71)$$

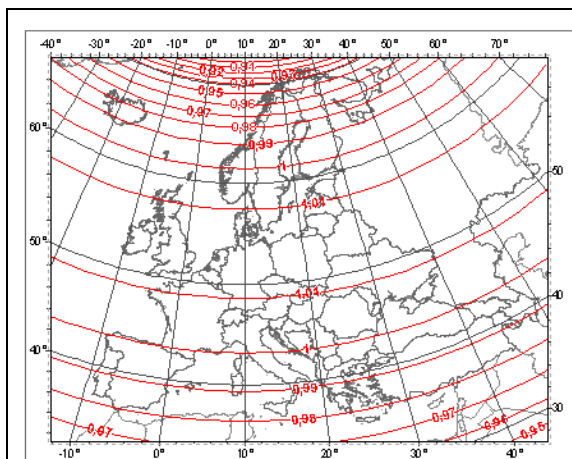
Za předpokladu, že pro zobrazení ekvideformát je volen konstantní interval přírůstku zkreslení, změna zkreslení je ilustrována změnou jejich hustoty (stejně jako u jiných izochar, například vrstevnic, izobar apod.). Zkreslení se nejvíce mění v kolmém směru na směr ekvideformát.

Ekvideformáty lze konstruovat různými způsoby s využitím zobrazovacích rovnic daného zobrazení a rovnic jeho zkreslení.

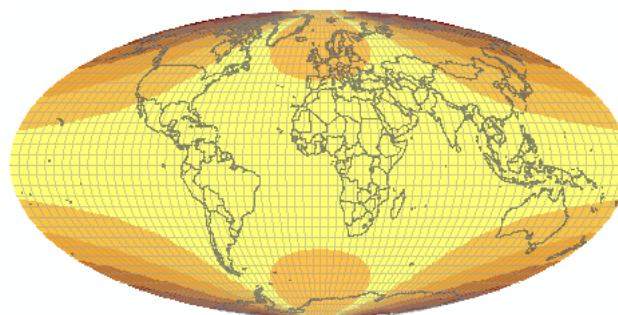
U jednoduchých zobrazení jsou ekvideformáty totožné s obrazem rovnoběžek (zeměpisných nebo kartografických – pro rovníkovou nebo šikmou polohu). Jednoduchá válcová zobrazení budou mít tedy ekvideformáty ve tvaru rovnoběžek s obrazem rovníku, kuželová a azimutální zobrazení potom soustředné kružnice se středem v počátku polární souřadnicové soustavy v rovině. Ve všech případech sestavení ekvideformát je tudíž poměrně snadné.

U nepravých a obecných zobrazení je tvar ekvideformát zpravidla složitější. V některých případech ekvideformáty mohou tvořit v zobrazované oblasti i uzavřené křivky. Postup jejich konstrukce je proto někdy obtížnější. V zásadě lze využít následující dvě cesty:

- nejprve se určí hodnoty zkreslení, které se bude zobrazovat. Z rovnic zkreslení se potom vypočítají příslušné hodnoty zeměpisných souřadnic a z nich se vypočítají rovinné souřadnice bodů o požadovaném zkreslení. Z těchto bodů se potom interpolují jednotlivé ekvideformáty. Variantou je využití grafu příslušného zkreslení, ze kterého se souřadnice požadovaných bodů odečtou;
- na více, zpravidla pravidelně rozmístěných bodech, se vypočítají hodnoty příslušného zkreslení a z nich se v rovině vyinterpolují příslušné ekvideformáty. Tuto variantu lze řešit i s využitím výpočetních prostředků a programového vybavení pro práci s počítačovou grafickou nebo přímo s geoinformačním systémem. Body s vypočteným zkreslením mohou definovat hladkou plochu, na které je možné pomocí interpolačních funkcí interpolovat izolinie s daným krokem. Ukázka tohoto postupu je na následujícím obrázku (Obr. 3-11).

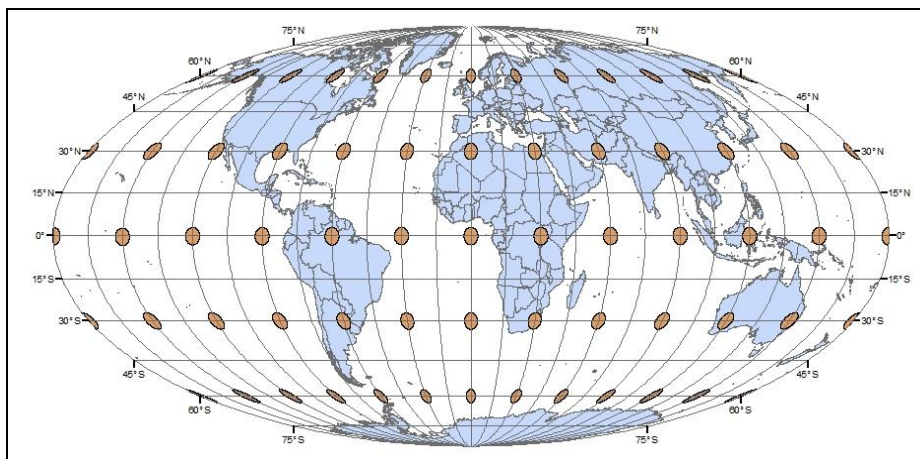


Obr. 3-11 Ukázka použití interpolačního programu pro konstrukci ekvideformát délkového zkreslení v polednicích (použito Albersovo ekvivalentní kuželové zobrazení, převzato z [24])

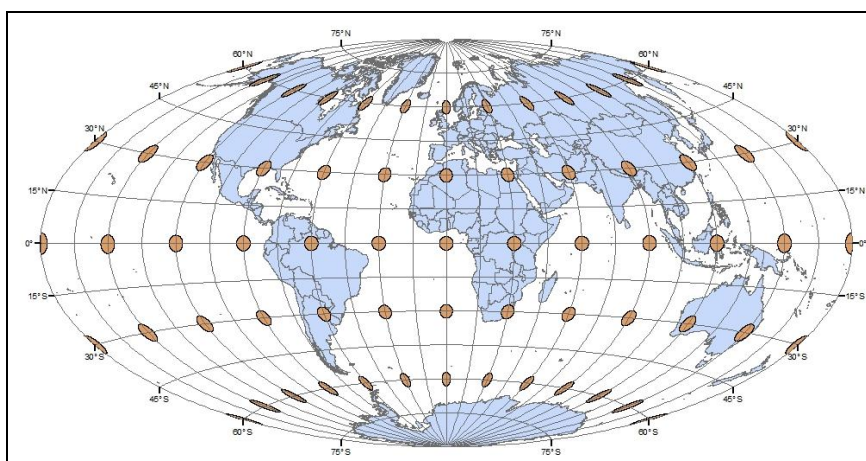


Obr. 3-12 Vizualizace průběhu délkového zkreslení v polednicích - povrch byl interpolovaný metodou kriging (použito Mollweidovo zobrazení, převzato z [24])

K vizualizaci délkového zkreslení je též možno využít elipsy zkreslení zobrazené například v uzlových bodech zeměpisné sítě. Výhodou tohoto postupu je zobrazení nejen velikosti délkového zkreslení, ale i orientace hlavních paprsků zkreslení vůči obrazu poledníků a rovnoběžek a plošné zkreslení. Příklad uvedeného postupu je uveden na následujícím obrázku (viz. Obr. 3-13):



Obr. 3-13 Ukázka vizualizace zkreslení Mollweidova zobrazení pomocí Tissotových elips



3-14 Ukázka vizualizace zkreslení Aitovova zobrazení pomocí Tissotových elips

Pozn.: Místo ekvideformát je možné použít pro vizualizaci průběhu zkreslení přímo odvozenou hladkou plochu (Obr. 3-12)

4. Teorie zobrazení

Ze závěrů obecné teorie zkreslení je možné matematicky definovat jednotlivé druhy zobrazení – *ekvidistantní, ekvivalentní a konformní*. V této kapitole budou postupně podány základní východiska pro definici těchto zobrazení. Opět se bude vycházet z pólové polohy obecných zobrazení z elipsoidu do zobrazovací roviny. Vztahy platné pro zobrazení koule budou uvedeny na konci jednotlivých částí. Větší pozornost bude věnována konformním zobrazením vzhledem k jejich významu při tvorbě státních mapových děl a při jejich využívání ve spojení vizualizovaných digitálních geografických dat s navigačními systémy, zejména družicovými.

4.1 Ekvidistantní zobrazení

Jak bylo již dříve konstatováno, ekvidistantní zobrazení délkově nezkrsluje některou soustavu čar. Tuto podmínku je možné definovat matematicky.

Nejčastějším požadavkem je, aby se délkově nezkrslovaly buďto poledníky nebo rovnoběžky. Pokud je požadavek na nezkrslování jiné soustavy čar, je zpravidla možné použít rovníkovou nebo šikmou polohu zobrazení definovanou tak, aby požadovaná soustava byla kartografickými poledníky nebo rovnoběžkami. Proto další text bude omezen pouze na pólovou polohu zobrazení. V případě rovníkové a šikmé polohy je možné použít stejné, dále odvozené vztahy, v nichž se pouze nahradí zeměpisné souřadnice souřadnicemi kartografickými.

Základní vztah pro definici ekvidistantního zobrazení vychází z obecné definice délkového zkreslení daného vztahem:

$$m = \frac{dS}{ds}$$

potom musí pro *ekvidistantní zobrazení v polednicích* platit:

$$m_p = 1 \quad (4-1)$$

Pokud se za délkový element zeměpisného poledníku použijí vztahy definované na referenčním elipsoidu nebo referenční kouli, lze pro *referenční elipsoid* předcházející vztah vyjádřit rovnicí:

$$\frac{dS_p}{Md\varphi} = 1 \quad (4-2)$$

a pro *referenční kouli*:

$$\frac{dS_p}{RdU} = 1 \quad (4-3)$$

Obdobně lze definovat obecné vztahy pro *ekvidistantní zobrazení v rovnoběžkách* z podmínky:

$$m_r = 1$$

Pro *referenční elipsoid* lze potom psát:

$$\frac{dS_r}{N \cos \varphi d\lambda} = 1 \quad (4-4)$$

a pro *referenční kouli*:

$$\frac{dS_r}{R \cos U dV} = 1 \quad (4-5)$$

Vzorce (4-2) až (4-5) lze s výhodou použít při odvozování zobrazovacích rovnic ekvidistantního zobrazení nebo při jeho rozpoznávání v případě, že je možné jednoduše vyjádřit v rovině v pravoúhlých nebo polárních souřadnicích délkové elementy poledníku, resp. rovnoběžky. Tohoto postupu se využívá zejména u jednoduchých zobrazení, částečně i u zobrazení nepravých.

Ekvidistantní zobrazení lze definovat i s využitím vztahů využívající Gaussovy koeficienty. Pomocí nich lze podmínku (4-1) psát v případě *ekvidistantního zobrazení v polednicích pro referenční elipsoid*:

$$\frac{\sqrt{E}}{M} = 1 \Rightarrow E = M^2 \quad (4-6)$$

Pro *referenční kouli* vztah (4-6) platí obdobně:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} = 1 \Rightarrow E = R^2 \quad (4-7)$$

Ekvidistantní zobrazení v rovnoběžkách pro referenční elipsoid bude mít následující obecnou podmínku:

$$\frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi} = 1 \Rightarrow G = N^2 \cos^2 \varphi \quad (4-8)$$

Pro *referenční kouli* vztah (4-8) platí obdobně:

$$\frac{\sqrt{G}}{R \cos U} = 1 \Rightarrow G = R^2 \cos^2 U \quad (4-9)$$

Hodnoty Gaussových koeficientů E , G budou mít tvary dané parametry konkrétní referenční plochy a konkrétními zobrazovacími rovnicemi použitého zobrazení.

4.2 Ekvivalentní zobrazení

Základní vlastností *ekvivalentního zobrazení* je, že se při jeho použití nezkrslují plochy zobrazovaných objektů a jevů, případně jsou tyto plochy konstantně zkreslené v celém zobrazovaném území. Tato varianta je však pouze modifikací (měřítkovou změnou) základního ekvivalentního zobrazení a proto ji není nutno uvažovat jako zvláštní případ.

Podmínku zachování velikosti ploch je možné vyjádřit z obecné rovnice plošného zkreslení (viz (3-55)):

$$m_{pl} = 1 \quad (4-10)$$

kterou lze psát ve tvaru:

$$m_p m_r \sin A'_r = 1 \quad (4-11)$$

Vzorec (4-11) se výhodně používá i pro rozpoznávání ekvivalentních zobrazení, a to zejména pro jednoduchá. U těchto zobrazení platí $A'_r = 90^\circ$; výše uvedený vzorec potom nabývá tvaru:

$$m_p m_r = 1 \quad (4-12)$$

Jiné vyjádření podmínky ekvivalentního zobrazení vychází ze vztahů pro plošné zkreslení využívající Gaussovy koeficienty. Pro *ekvivalentní zobrazení z referenčního elipsoidu* lze psát:

$$\frac{H}{MN \cos \varphi} = 1 \Rightarrow H = MN \cos \varphi \quad (4-13)$$

Pro *ekvivalentní zobrazení z referenční koule* bude mít podmínka tvar:

$$\frac{H}{R^2 \cos U} = 1 \Rightarrow H = R^2 \cos U \quad (4-14)$$

Hodnota koeficientu H je vyjádřena podle druhu referenční plochy a typu zobrazení. Uvedená podmínka se využívá zejména u nepravých nebo obecných zobrazení.

4.3 Konformní zobrazení

Vlastností konformního zobrazení je, že nezkrsluje úhly. Tuto vlastnost je možné vyjádřit vztahem:

$$\Delta\omega = 0 \quad (4-15)$$

Úhlové zkreslení je obecně dáno vzorcem ((3-53), viz. odstavec 3.2):

$$\sin \frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a} \quad (4-16)$$

Vzhledem ke vzorci (3-53) bude podmínka (4-15) splněna pouze za předpokladu, že:

$$m_a = m_b \quad (4-17)$$

Hodnoty m_a a m_b jsou extrémními hodnotami délkového zkreslení. Pokud se mají tyto dvě hodnoty rovnat, potom je délkové zkreslení konstantní a nezávislé na směru azimutu délkového elementu. Elipsa zkreslení se tudíž zobrazuje jako kružnice.

Z obecné rovnice délkového zkreslení dané vztahem (3-23) (viz odstavec 3.1):

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + \frac{F}{MN \cos \varphi} \sin 2A + m_r^2 \sin^2 A$$

je zřejmé, že konstantní délkové zkreslení bude pouze v případě platnosti podmínek:

1. $m_p = m_r$
2. $F = 0$

První podmínku lze vyjádřit i pomocí Gaussových symbolů. Pro *referenční elipsoid* lze psát:

$$\frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi} \Rightarrow \frac{E}{G} = \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \quad (4-18)$$

Pro referenční kouli lze psát obdobně:

$$\frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{\sqrt{G}}{R \cos U} \Rightarrow \frac{E}{G} = \frac{1}{\cos^2 U} \quad (4-19)$$

Hodnoty Gaussových koeficientů budou vyjádřeny opět podle druhu a charakteru daného zobrazení.

Konformní zobrazení lze definovat i pomocí *izometrických souřadnic*. V kapitole Referenční plochy a souřadnicové soustavy byly odvozeny vztahy pro výpočet *izometrické šířky* na referenčním elipsoidu a na referenční kouli.

Vyjde-li se z obecné rovnice délkového zkreslení ve tvaru:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$$

a dosadí-li se za diferenciály délek jejich tvary vyjádřené v diferenciálech izometrických souřadnic (viz kapitola 1), lze psát:

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)} \quad (4-20)$$

V konformním zobrazení nesmí být zkreslení délkového elementu závislé na jeho azimutu. Bude uváženo, kdy bude rovnice (4-20) vyhovovat této podmínce. Azimut délkového elementu na referenční ploše lze vyjádřit:

$$\operatorname{tg} A = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{M d\varphi}$$

neboli:

$$\operatorname{tg} A = \frac{d\lambda}{dq}$$

Směrník v zobrazovací rovině se vyjádří vztahem:

$$\operatorname{tg} \sigma' = \frac{dy}{dx}$$

Je tedy zřejmé, že závislost délkového zkreslení na směru délkového elementu vyjadřují poměry diferenciálů zeměpisných (izometrických) a rovinných souřadnic. Aby zobrazení bylo konformní, nesmí se ve výrazu (4-20) uvedené diferenciály vyskytovat. To bude splněné pouze za předpokladu využití obecných zobrazovacích rovnic ve tvaru:

$$x + iy = f(q + i\lambda) \quad (4-21)$$

$$x - iy = f(q - i\lambda) \quad (4-22)$$

Přitom pro praktické použití stačí uvažovat pouze jednu z uvedených funkcí.

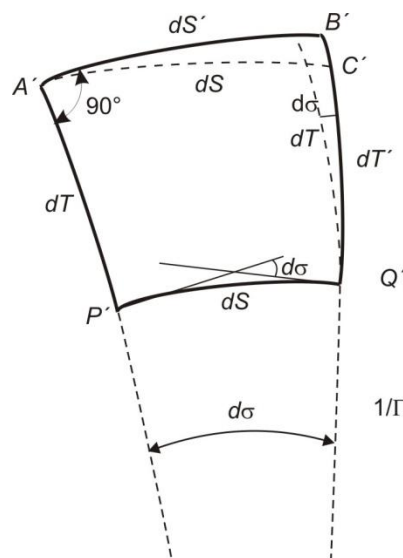
4.4 Konformní zobrazení geodetické čáry

Většina úloh praktické geodézie je řešena v rovině konformního zobrazení. Při jejich řešení je nutné znát průběh rovinného obrazu geodetických čar, kterými jsou poledníky, rovník a všechny ostatní nejkratší spojnice dvou bodů na referenčním elipsoidu, tedy i strany trigonometrických sítí. Změny průběhu uvedených geodetických čar, které jsou výsledkem jejich zobrazení do roviny konformního zobrazení, se projevují v tzv. *korekcích ze zobrazení*, tedy jako *směrová* a *délková korekce* geodetické čáry [14].

4.4.1 Průběh obrazu geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

Podle [22] lze prostorové čáru definovat *geodetickou křivost* γ jako *křivost pravoúhlého průmětu této čáry do tečné roviny* v daném bodě, pro který je křivost počítána. Dále lze definovat *geodetickou čáru* (*geodetickou křivku*) jako čáru, jejíž geodetická křivost γ je v každém jejím bodě rovna 0.

Protože konformní zobrazení není ortogonální, geodetické čáry se v rovině tohoto zobrazení obecně zobrazují jako křivky, jejichž křivost se v každém bodě mění. Definici změny křivosti je nutné vyjít ze situace ilustrované na obrázku (viz Obr. 4-1)



Obr. 4-1 Průběh geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

Mějme na referenčním elipsoidu diferenciální pravoúhlý čtyřúhelník $PQBA$ omezený stranami ds a dt , které jsou částí geodetických čar. Po jeho zobrazení do roviny konformního zobrazení se sice zachovávají pravé úhly u vrcholů čtyřúhelníka, avšak každá strana bude jinak zakřivena a bude délkově zkreslena. Po zobrazení budou tyto strany označeny dS , dS' , dT a dT' . Na základě obrázku (Obr. 4-1) lze zkoumat křivost Γ elementu dS v bodě P' . Z obrázku je zřejmé, že:

$$dS = \frac{1}{\Gamma} d\sigma . \quad (4-23)$$

Pokud se zanedbá minimální rozdíl mezi délkami křivek $A'B'$ a $A'C'$, potom lze psát:

$$dS' = dS + d\alpha dT . \quad (4-24)$$

Po dosazení za $d\sigma$ z (4-23) do (4-24) se získá vztah:

$$dS' = dS(1 + \Gamma dT). \quad (4-25)$$

Pokud se vydělí obě strany rovnice (4-33) hodnotou ds , potom bude:

$$\frac{dS'}{ds} = \frac{dS}{ds}(1 + \Gamma dT). \quad (4-26)$$

Výraz dS/ds je výrazem pro délkové zkreslení m v bodě P' a výraz dS'/ds vyjadřuje délkové zkreslení v bodě A' , jehož hodnota je proti hodnotě délkového zkreslení v bodě P' změněna o dm . Tuto změnu je možné vyjádřit jako:

$$\frac{dS'}{ds} = m + dm. \quad (4-27)$$

$$m + dm = m(1 + \Gamma dT) \quad (4-28)$$

Po dosazení výrazů pro délkové zkreslení a jeho změnu do (4-26) se získá výraz:

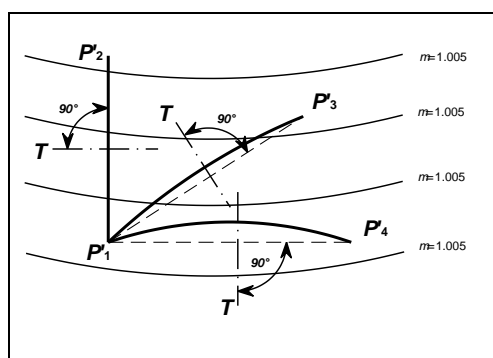
a z něho po úpravě:

$$\Gamma = \frac{1}{m} \frac{dm}{dT} \quad (4-29)$$

kde m je tedy délkové zkreslení a dm/dT je změna zkreslení ve směru kolmém ke geodetické čáře.

Poznámky:

1. Délkové zkreslení m je počítáno pro délková element ds mezi body P a Q , který má azimut A . Změnu tohoto zkreslení ve směru kolmém na element ds lze vypočítat pomocí stejného výrazu, pokud se změní hodnota azimutu a 90° v příslušném směru.
2. Je-li geodetická čára vedena kolmo k ekvideformátám, potom $dm/dT = 0$ a proto její obraz bude přímka. Pokud je geodetická čára ve směru ekvideformát, potom změna zkreslení v kolmém směru bude maximální a tedy bude i její obraz maximálně zakřiven (viz obrázek Obr. 4-2).



Obr. 4-2 Průběh geodetické čáry vzhledem k ekvideformátám

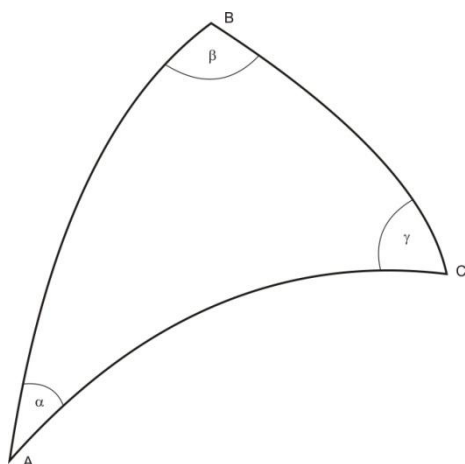
Délkové zkreslení se mění v závislosti na poloze konkrétního bodu na dané geodetické čáře. Pro výpočty zejména v geodetické praxi je ale nutné znát především tvar geodetické čáry na jejím počátečním a koncovém bodě a délku jejího obrazu. Tyto vlastnosti lze určit pomocí výpočtů tzv. *směrové a délkové korekce geodetické čáry*.

4.4.2 Směrová korekce geodetické čáry

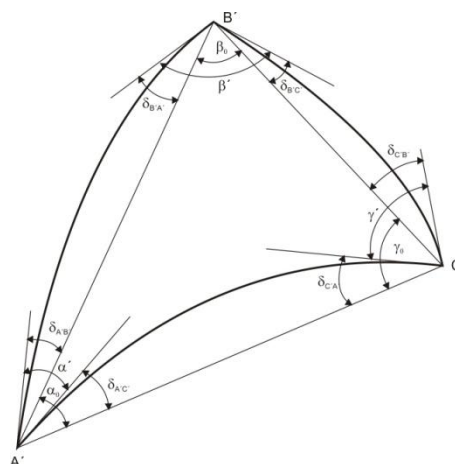
Strany trojúhelníků trigonometrických sítí jsou geodetickými čarami. Na kouli jsou tyto čáry součástí hlavních kružnic, na referenčním elipsoidu jsou částmi zmíněných geodetických čar. K pochopení principu výpočtu *směrové korekce* v jakémkoliv zobrazení (tedy nejen v konformním) je možné využít jeden sférický trojúhelník ABC na kouli, jehož vrcholové úhly jsou α, β, γ (Obr. 4-3) (podle [15]). Při zobrazení tohoto trojúhelníka do roviny některou ze zobrazovacích metod, budou všechny úhly zkresleny a nabudou hodnot α', β', γ' (Obr. 4-4). Zkreslení těchto úhlů je možné vyjádřit rovnicemi:

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha, \Delta\beta = \beta' - \beta, \Delta\gamma = \gamma' - \gamma \quad (4-30)$$

S výjimkou gnómonické projekce se části oblouků hlavních kružnic zobrazí jako křivky.



Obr. 4-3 Sférický trojúhelník ABC na kouli



Obr. 4-4 Obraz sférického trojúhelníka $A'B'C'$ v zobrazovací rovině

Ve sférickém trojúhelníku platí pro součet jeho vrcholových úhlů vztah:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon,$$

kde ε je sférický exces.

Pokud se řeší vztahy v trojúhelníku v rovině, což je typické pro všechny úlohy praktické geodézie, nepočítá se s křivkami, ale s přímými spojnicemi vrcholů $A'B', A'C', B'C'$. Součet vrcholových úhlů, které jsou mezi uvedenými přímými spojnicemi, potom bude:

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 180^\circ$$

Přímé spojnice vrcholů trojúhelníka $A'B'C'$ svírají s tečnami ke křivkám (obrazům hlavních kružnic) v bodech A', B', C' malé úhly δ , které se nazývají *směrové korekce*. Aby bylo možné trojúhelník řešit v rovině, je nutné směrníky příslušných trigonometrických stran opravit o příslušnou směrovou korekci, pomocí které se převede křivka na přímku. Podle obrázku (viz Obr. 4-4) budou využity následující směrové korekce:

- v bodě A' : $\delta_{A'B'}, \delta_{A'C'}$,
- v bodě B' : $\delta_{B'A'}, \delta_{B'C'}$,
- v bodě C' : $\delta_{C'A'}, \delta_{C'B'}$.

Potom lze vypočítat vrcholové úhly v rovinném trojúhelníku $A'B'C'$ pomocí následujících vztahů:

$$\alpha_0 = \alpha' \pm \delta_{A'B'} \pm \delta_{A'C'} \quad (4-31)$$

$$\beta_0 = \beta \pm \delta_{B'A'} \pm \delta_{B'C'}$$

$$\gamma_0 = \gamma \pm \delta_{C'A'} \pm \delta_{C'B'}$$

Vztahy (4-31) jsou platné pro všechny zobrazení s výjimkou gnómonické projekce.

U konformních zobrazení se úhly nezkreslují, proto všechny rozdíly úhlů počítané podle (4-30) jsou nulové a potom lze tedy psát:

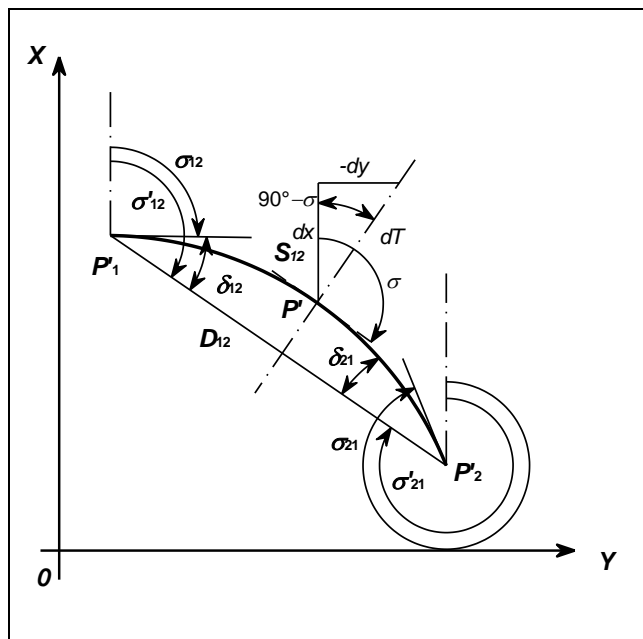
$$\alpha_0 = \alpha \pm \delta_{A'B'} \pm \delta_{A'C'}$$

$$\beta_0 = \beta \pm \delta_{B'A'} \pm \delta_{B'C'} \quad (4-32)$$

$$\gamma_0 = \gamma \pm \delta_{C'A'} \pm \delta_{C'B'}$$

Vrcholové úhly se počítají z naměřených hodnot úhlů v terénu, s nichž se získávají směrníky geodetických čar σ . Příslušný vrcholový úhel je tedy získán z rozdílů směrníků jednotlivých stran daného trojúhelníku.

V další části je tedy uvedený pouze postup odvození výpočtu směrové korekce jedné strany trojúhelníka. Vzhledem k obvyklé délce stran trojúhelníků v trigonometrické síti nebo velikosti měřených délek je možné použít výše uvedené závěry i pro plochu referenčního elipsoidu. Výchozí situace je na obrázku (viz Obr. 4-5),



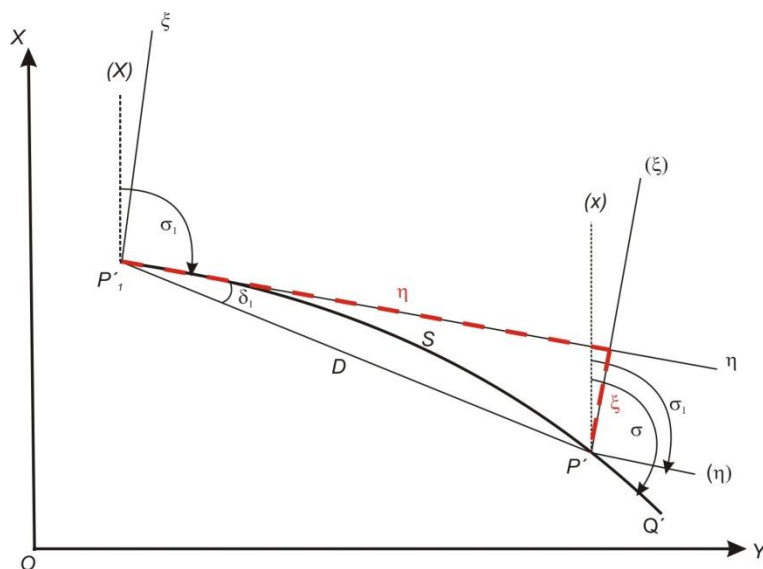
Obr. 4-5 Směrová korekce geodetické čáry

- kde: δ_{12}, δ_{21} jsou směrové korekce geodetické čáry,
 σ_{12}, σ_{21} jsou směrníky geodetické čáry na referenční ploše, které se při konformním zobrazení nezkreslují. Směrníky je zpravidla vypočítány z měření úhlů v terénu na orientační směry;
 $\sigma'_{12}, \sigma'_{21}$ jsou směrníky přímé spojnice koncových bodů geodetické čáry v zobrazovací rovině;
 D_{12} je délka přímé spojnice;
 S_{12} je délka geodetické čáry v zobrazovací rovině.

Podle obrázku (4-3) lze obecně psát:

$$\delta = \sigma' - \sigma \quad (4-33)$$

K výpočtu je nutné znát směrnik σ , resp. křivost geodetické čáry Γ v obecném bodě této čáry o souřadnicích (x, y) . Všechny potřebné parametry lze vyvodit z pomoci obrázku (viz Obr. 4-6), na kterém je rovinný obraz geodetické čáry s počátkem v bodě P'_1 , jehož rovinné souřadnice jsou x_1 a y_1 , a procházející obecným bodem P' . Délka obrazu této geodetické čáry je S a její směrnik je σ_1 .



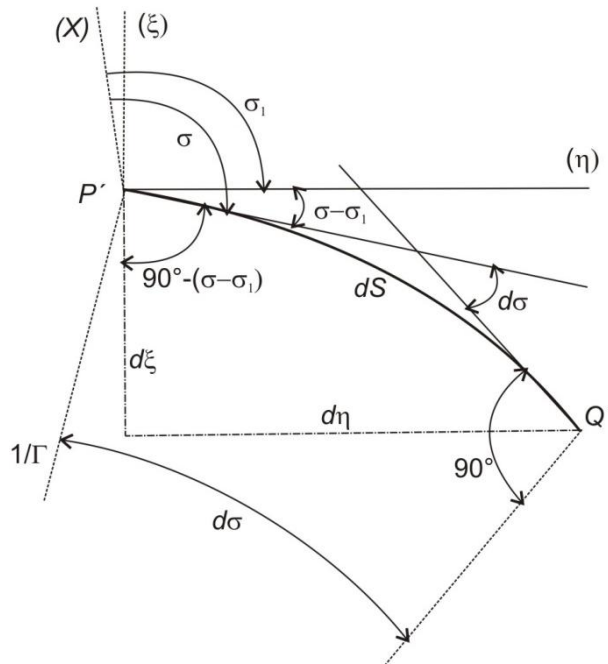
Obr. 4-6 Rovinný obraz geodetické čáry v rovině konformního zobrazení

Praktický postup výpočtu odvodil Laborde, který aplikoval konformní válcové zobrazení pro území Madagaskaru¹. Aby bylo možné snadněji odvodit průběh této čáry, je definována pomocná soustava pravoúhlých souřadnic ξ, η . Počátek této souřadnicové soustavy je v bodě P'_1 , osa η je ve směru tečny k obrazu geodetické čáry a osa ξ je na ni kolmá. V pomocném souřadnicovém systému lze vyjádřit směrovou korekci geodetické čáry v bodě P'_1 :

$$\sin \delta_1 = \frac{-\xi}{D} \quad (4-34)$$

S využitím obrázku (viz Obr. 4-1) lze studovat změny souřadnic ξ, η na dalších částech obrazu geodetické čáry (Obr. 4-7).

¹ Laborde byl kapitán dělostřelectva Francouzské armády a uvedený postup publikoval v roce 1928 v práci „La nouvelle projection du service géographique de Madagascar“



Obr. 4-7 Detail průběhu obrazu geodetické čáry

Podle tohoto obrázku platí:

$$\begin{aligned} -d\xi &= \sin(\sigma - \sigma_1)dS, \\ d\eta &= \cos(\sigma - \sigma_1)dS. \end{aligned} \quad (4-35)$$

Obě goniometrické funkce je možné rozvést v řadu. Vzhledem k velmi malé hodnotě rozdílů směrniců $(\sigma - \sigma_1)$ je možné uvažovat rozvoj pouze do druhé mocniny. Lze tedy psát:

$$\begin{aligned} d\xi &= -(\sigma - \sigma_1)dS, \\ d\eta &= \left[1 - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_1)^2\right]dS. \end{aligned} \quad (4-36)$$

Z rovnice (4-23) lze určit:

$$d\sigma = \Gamma dS. \quad (4-37)$$

Křivost obrazu geodetické čáry Γ se mění se změnou polohy bodu na této čáře, pro který je křivost počítána. Lze tedy říci, že je funkcí délky oblouku S . Tuto funkci je možné vyjádřit MacLaurinovou řadou jako:

$$\Gamma = f(S) = f(0) + f'(0)S + f''(0)\frac{S^2}{2!} + \dots \quad (4-38)$$

S využitím rovnice (4-29) a se zanedbáním členů s druhou a vyšší mocninou, což nemá vliv na požadovanou přesnost výpočtů, je možné vypočítat křivost obrazu geodetické čáry v libovolném bodě jako funkci křivosti této čáry v počátečním bodě P_1' . Bude tedy:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_1' S. \quad (4-39)$$

Pokud se dosadí výraz (4-39) do (4-37), potom je možné psát:

$$d\sigma = (\Gamma_1 + \Gamma_1' S)dS. \quad (4-40)$$

Výraz (4-40) je možné integrovat:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma} d\sigma = \int_0^S (\Gamma_1 + \Gamma'_1 S) dS \quad (4-41)$$

a tím získat vztah:

$$\sigma - \sigma_1 = \Gamma_1 S + \Gamma'_1 \frac{S^2}{2}. \quad (4-42)$$

Tímto vztahem je možno vypočítat směrnik obrazu geodetické čáry v libovolném bodě této čáry. Jeho souřadnice v souřadnicovém systému ξ, η se vypočítají z rovnic (4-36). Se zanedbáním vyšší mocniny ne 3. lze psát:

$$(\sigma - \sigma_1)^2 = \Gamma_1^2 S^2 + \Gamma_1 \Gamma'_1 S^3 \quad (4-43)$$

a po dosazení se získají diferenciály souřadnic:

$$d\xi = \left(-\Gamma_1 S - \Gamma'_1 \frac{S^2}{2} \right) dS \quad (4-44)$$

$$d\eta = \left(1 - \Gamma_1^2 \frac{S^2}{2} - \Gamma_1 \Gamma'_1 \frac{S^3}{2} \right) dS$$

Rovnice lze řešit integrací:

$$\int_0^{\xi} d\xi = \int_0^S \left(-\Gamma_1 S - \Gamma'_1 \frac{S^2}{2} \right) dS, \quad (4-45)$$

$$\int_0^{\eta} d\eta = \int_0^S \left(1 - \Gamma_1^2 \frac{S^2}{2} - \Gamma_1 \Gamma'_1 \frac{S^3}{2} \right) dS,$$

jejímž výsledkem jsou souřadnice obecného bodu geodetické čáry ve vzdálenosti S od jejího počátku v bodě P_1 .

$$\xi = -\Gamma_1 \frac{S^2}{2} - \Gamma'_1 \frac{S^3}{6}, \quad (4-46)$$

$$\eta = S - \Gamma_1^2 \frac{S^3}{6} - \Gamma_1 \Gamma'_1 \frac{S^4}{8}.$$

Z těchto pomocných souřadnic je možné shodnostní transformací vypočítat souřadnice obecného bodu v souřadnicovém systému daného konformního zobrazení podle vztahu (4-47

), ve kterém je úhel $\varepsilon = \sigma_1 - \pi/2$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

Aby bylo možné určit hodnotu směrové korekce podle vztahu (4-34), je nutné vypočítat délku přímé spojnice počátečního a obecného bodu:

$$D = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (4-48)$$

a dosadit do vztahu proměnné získané z rovnic (4-46). vzhledem k tomu, že reálné hodnoty členů na pravé straně rovnic (4-46) mají výrazně klesající tendenci, je možné po jejich umocnění zanedbat členy s vyšší mocninou S než pátou. Potom bude:

$$\xi^2 = -\Gamma_1^2 \frac{S^4}{4} - \Gamma_1 \Gamma_1' \frac{S^5}{6}, \quad (4-49)$$

$$\eta^2 = S^2 - \Gamma_1^2 \frac{S^4}{3} - \Gamma_1 \Gamma_1' \frac{S^5}{4}.$$

Výrazy (4-48) se dosadí do (4-49) a po úpravách (odmocnění, ponechání členů s mocninou S maximálně do čtvrté), je možné počítat délku přímé spojnice rovnicí:

$$D = S - \Gamma_1^2 \frac{S^3}{24} - \Gamma_1 \Gamma_1' \frac{S^4}{24}, \quad (4-50)$$

Rovnicí (4-50) se získá hodnota jmenovatele pro výpočet směrové korekce podle vzorce (4-34). Uvedenou rovnicí je však možné využít i pro výpočet rozdílů délek mezi přímou spojnicí a koncových bodů a délkou obrazu geodetické čáry. Tento výraz bude mít tvar:

$$S - D = \frac{1}{24} (\Gamma_1^2 S^3 + \Gamma_1 \Gamma_1' S^4). \quad (4-51)$$

V některých případech je snazší výpočet křivosti obrazu geodetické čáry v jejím počátečním a koncovém bodě. Pokud jsou tyto hodnoty známy, je možné použít pro výpočet délky přímé spojnice jiný vzorec. Podle (4-39) platí i pro koncový bod čáry vztah:

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 + \Gamma_1' S \quad (4-52)$$

Pokud výraz se (4-52) umocní a zanedbá se člen s S^2 , potom se získá vztah:

$$\Gamma^2 = \Gamma_1^2 + 2\Gamma_1 \Gamma_1' S$$

a odtud:

$$\Gamma_1' = \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{2\Gamma_1 S}.$$

Po dosazení do (4-51) se získá vztah:

$$S - D = \frac{1}{48} (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) S^3 \quad (4-53)$$

Protože křivost obrazu geodetické čáry není zpravidla nijak veliká, je možné ve všech uvedených výrazech nahradit délku S délkou přímé spojnice D . Výsledek se prakticky nezmění.

Z rovnic (4-51) nebo (4-53) se vypočítá délka D a z první rovnice (4-49) hodnota souřadnice ξ . Z těchto hodnot je již možné počítat vlastní směrovou korekci podle vztahu (4-34). Po úpravě podílu dvou mnohočlenů se zanedbání mocnin vyšších řádů ne 2 se získá dostatečně přesný vztah:

$$\sin \delta_1 = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \Gamma_1' \frac{S^2}{6}.$$

Protože směrová korekce nabývá reálně hodnot ve vteřinách nebo desítkách vteřin, lze psát:

$$\sin \delta_1 = \delta_1,$$

z čehož poté plyne obecný vztah pro její výpočet:

$$\delta_1 = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \Gamma_1' \frac{S^2}{6}. \quad (4-54)$$

Výraz lze ještě upravovat podle toho, v jakých bodech jsou křivosti obrazu geodetické čáry známé. Obvyklými úpravami jsou vzorce pro výpočet směrové korekce ze znalosti křivosti v koncovém bodě geodetické čáry, resp. v její jedné třetině. Uvedené výrazy jsou uvedené dále.

V případě situace zobrazené na obrázku (viz Obr. 4-5), je možno směrovou korekci v bodě P'_1 vypočítat následovně:

$$\delta_{12} = \Gamma_1 \frac{S_{12}}{2} + \Gamma_1' \frac{S_{12}^2}{6} \quad (4-55)$$

$$\delta_{12} = (2\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{S_{12}}{6} \quad (4-56)$$

$$\delta_{12} = \Gamma_{1/3} \frac{S_{12}}{2} \quad (4-57)$$

kde: Γ_1 je křivost obrazu geodetické čáry na počátečním bodě,

Γ_2 je křivost obrazu geodetické čáry na koncovém bodě,

$\Gamma_{1/3}$ je křivost obrazu geodetické čáry v její první třetině.

Všechny tři vzorce plně svojí přesností vyhovují požadavkům na výpočet směrové korekce pro běžné geodetické práce.

4.4.1 Délková korekce geodetické čáry

Délková korekce geodetické čáry δ_s v rovině konformního zobrazení je rozdíl mezi délkou jejího obrazu v zobrazovací rovině S a její délkou na referenčním elipsoidu s (4-58).

$$\delta_s = S - s \quad (4-58)$$

Hodnota délkové korekce geodetické čáry je funkcí délkového zkreslení, které se mění v každém jejím bodě. Pro její určení je možné využít například postupy pro přibližnou integraci.

Podle obecného vzorce pro délkové zkreslení lze psát:

$$ds = \frac{dS}{m} \quad (4-59)$$

a současně vyjádřit závislost délkového zkreslení na poloze bodu na obrazu geodetické čáry ve tvaru:

$$\frac{1}{m} = f(S) \quad (4-60)$$

Výraz (4-59) je potom možné psát jako diferenciální rovnici a poté jako určitý integrál:

$$\int_0^s ds = \int_0^S f(S) dS \quad (4-61)$$

Integrál na pravé straně rovnice se řeší numerickou integrací podle Simpsonova pravidla (viz např. [22]), kdy se hodnota funkce nahrazuje parabolickou funkcí a interval funkce se rozdělí na dvě části. Podle uvedeného pravidla obecně platí:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{x_2 - x_1}{6} \left[f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2) \right]$$

což aplikováno pro integrál (4-61) bude:

$$s = \frac{S}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{S}{2}\right) + f(S) \right] \quad (4-62)$$

kde hodnota funkce f je počítána pro počáteční, střední a koncový bod obrazu geodetické čáry. Její konkrétní hodnoty jsou potom dány reciprokými hodnotami délkového zkreslení označené:

$$f(0) = \frac{1}{m_1} \qquad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{1}{m_{1/2}} \qquad f(S) = \frac{1}{m_2}$$

Dosadí-li se uvedené tvary do výrazu (4-62), potom se získá konečný obecný vzorec pro výpočet délkové korekce v konformním zobrazení:

$$s = \frac{S}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_{1/2}} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (4-63)$$

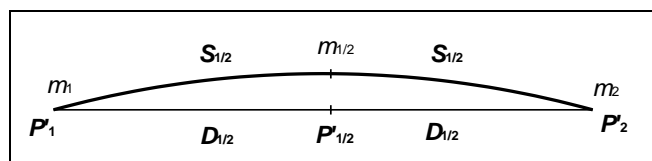
Pokud by se výraz (4-59) napsal ve tvaru

$$dS = m ds$$

obdobným způsobem by se došlo k jinému výrazu pro výpočet délkové korekce:

$$S = \frac{s}{6} \left(m_1 + 4m_{1/2} + m_2 \right) \quad (4-64)$$

Oba výrazy jsou obecně platné pro jakékoliv konformní zobrazení. V praxi se používá výraz, který je z hlediska používaných dat výhodnější. Stejně tak je možné místo délky obrazu geodetické čáry použít délku přímé spojnice jejích koncových bodů D a hodnotu délkového zkreslení počítat pro střed této přímé spojnice (Obr. 4-8).



Obr. 4-8 Délková korekce geodetické čáry

5. Zobrazení referenčního elipsoidu na kouli

Jak bylo již uvedeno v kapitole 1, je volba referenčního tělesa závislá na požadované přesnosti prostorové lokalizace modelovaných objektů a jevů. Pokud není vyžadována vysoká přesnost lokalizace, zejména v oblasti geografické kartografie, je možné *referenční elipsoid* nahradit *koulí*. Referenční koule je však někdy používána i tehdy, pokud je nutná vysoká přesnost polohové lokalizace, ale pro zobrazení do roviny je vybrána šikmá poloha (např. pro státní mapy České republiky, Slovenska a Švýcarska).

Existuje řada různých zobrazení referenčního elipsoidu na kouli. V kartografické praxi nebo při volbě referenčního tělesa v rámci volby geodetického systému v GIS se často při malých nárocích na přesnost lokalizace volí jako referenční plocha přímo koule. I v tomto případě je však vhodné znát charakteristiky zkreslení, jaká lze očekávat při této volbě (blíže viz odstavce 5.2).

5.1 Základní vztahy a vzorce

Při zobrazení referenčního elipsoidu na kouli se výhradně používají *jednoduchá zobrazení*. Každá zeměpisná souřadnice na kouli je tedy funkcí pouze jedné souřadnice na elipsoidu a platí vztahy:

$$U = f(\varphi) \quad (5-1)$$

$$V = f(\lambda) \quad (5-2)$$

Protože při tomto zobrazení je vždy požadavek, aby konstantnímu intervalu zeměpisné délky na elipsoidu λ odpovídal i konstantní interval zeměpisné délky na kouli V , lze rovnici (5-2) psát ve tvaru:

$$V = \alpha\lambda \quad (5-3)$$

a hodnotu konstanty α určovat podle dalších požadavků na zobrazení. Pokud bude $\alpha = 1$, potom síť poledníků celou kouli rovnoměrně pokryje. V případě, že $\alpha < 1$, zůstane část povrchu koule prázdná, a pokud $\alpha > 1$, bude se síť poledníků na kouli překrývat.

Obecné vztahy pro zkreslení délek ve směrech poledníků a rovnoběžek jsou dány poměry elementů délek na referenční kouli a příslušných délek na referenční ploše. V shodě se vztahy (3-1) z kapitoly 3 bude:

$$m_p = \frac{RdU}{Md\varphi} \quad (5-4)$$

$$m_r = \frac{R \cos U dV}{N \cos \varphi d\lambda} = \alpha \frac{R \cos U}{N \cos \varphi} \quad (5-5)$$

S využitím vztahů (3-23), (3-53) a (3-56) z kapitoly 3 je možné počítat všechna ostatní zkreslení. Nejprve je však nutné vypočítat hodnotu koeficient F . Vzhledem ke tvaru funkcí (5-1) a (5-2) je nutné nejprve upravit výraz (3-19) z kapitoly 3. Po úpravě bude:

$$F = \frac{\partial U \partial U}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial V \partial V}{\partial \varphi \partial \lambda} \quad (5-6)$$

Ze zobrazovacích rovnic (5-1) a (5-2) vyplývá, že:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

a potom koeficient $F = 0$.

Výraz (3-23) bude mít v tomto případě tvar:

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + m_r^2 \sin^2 A \quad (5-7)$$

Pokud se do vzorce (3-24) dosadí za $F = 0$, potom budou hodnoty $A_a = 0^\circ$ a $A_b = 90^\circ$, z čehož plyne, že zeměpisné poledníky a rovnoběžky jsou současně i hlavními paprsky zkreslení a , b a i na referenční kouli se protínají pod pravým úhlem. Lze tedy psát výrazy pro ostatní zkreslení ve tvaru:

$$m_{pl} = m_p m_r \quad (5-8)$$

$$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p} \quad (5-9)$$

Poznámka: Uvedené rovnice (5-7), (5-8) a (5-9) platí pro všechna jednoduchá zobrazení, která budou popsána v následujících kapitolách.

5.2 Zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi

V praxi se poměrně často používá zobrazení referenčního elipsoidu na kouli se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi. Je to v podstatě stejné, jako když se pro zobrazení do roviny volí přímo referenční koule jako výchozí referenční plocha geodetického referenčního systému.

Základní zobrazovací rovnice jsou ve tvaru:

$$U = \varphi \quad (5-10)$$

$$V = \lambda \quad (5-11)$$

a z nich vyplývá:

$$dU = d\varphi$$

$$dV = d\lambda$$

$$\alpha = 1$$

Rovnice zkreslení (5-4), (5-5), (5-8), (5-9) potom budou ve tvarech:

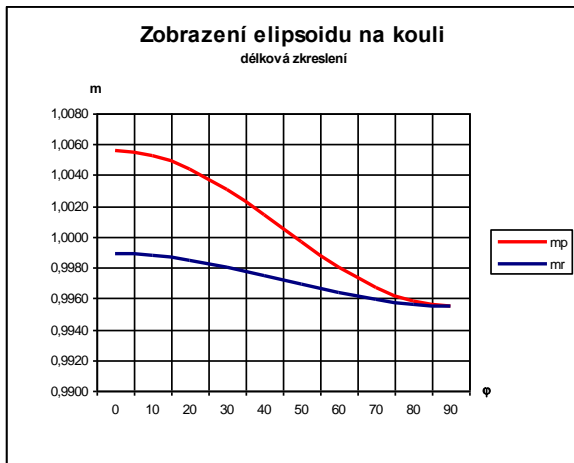
$$m_p = \frac{R}{M} \quad (5-12)$$

$$m_r = \frac{R}{N} \quad (5-13)$$

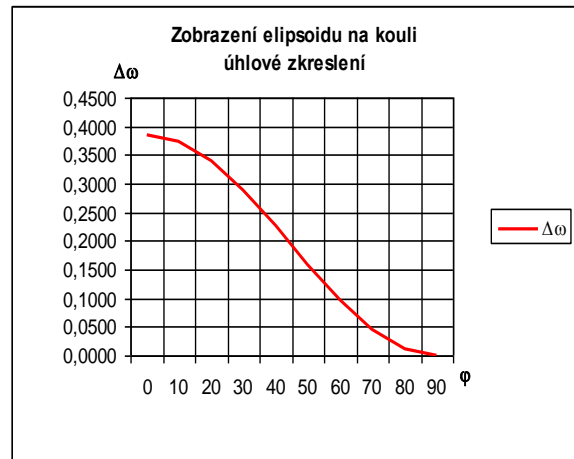
$$m_{pl} = \frac{R^2}{MN} \quad (5-14)$$

$$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{M - N}{M + N} \quad (5-15)$$

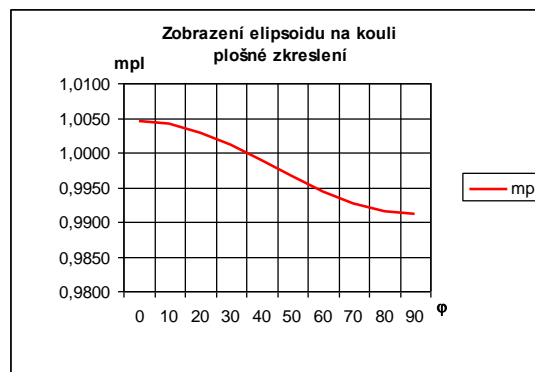
Na následujících obrázcích jsou grafy jednotlivých zkreslení pro zobrazení elipsoidu WGS84 na kouli o poloměru 6 371 km.



Obr. 5-1 Délkové zkreslení zobrazení elipsoidu WGS84 na kouli o R = 6371 km



Obr. 5-2 Maximální úhlové zkreslení zobrazení elipsoidu WGS84 na kouli o R = 6371 km



Obr. 5-3 Plošné zkreslení zobrazení elipsoidu WGS84 na kouli o R = 6371 km

5.3 Konformní zobrazení elipsoidu na kouli

Konformní zobrazení je definováno podmínkami:

$$m_p = m_r$$

$$F = 0$$

Druhá podmínka je u jednoduchých zobrazení vždy splněna, proto postačí vyjít pouze z první podmínky, kterou lze psát s využitím vztahů (5-4) a (5-5):

$$\frac{RdU}{Md\varphi} = \alpha \frac{R \cos U}{N \cos \varphi} \quad (5-16)$$

Výraz (5-16) se po úpravě integruje jako neurčitý integrál:

$$\int \frac{dU}{\cos U} = \alpha \int \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi}$$

čímž se získá zobrazovací rovnice:

$$Q = \alpha q + \ln k$$

kde k je integrační konstanta zavedená ve vhodné funkci. Po dosazení za Q a q z rovnic (1-23) a (1-19) z kapitoly 1 a po odlogaritmování bude zobrazovací rovnice ve tvaru:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) = k \left[\operatorname{tg}^\alpha\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\alpha/2} \right] \quad (5-17)$$

Druhá zobrazovací rovnice je dána výrazem (5-3). Zkreslení je potom dáno rovnicemi:

$$m = m_p = m_r = \alpha \frac{R \cos U}{N \cos \varphi} \quad (5-18)$$

$$m_{pl} = m^2 \quad (5-19)$$

$$\Delta\omega = 0 \quad (5-20)$$

Pro výpočet souřadnic na kouli a zkreslení je nutné ještě určit konstanty α , k a R . K tomu se definují doplňující podmínky, které specifikují charakter zobrazení.

Pokud je požadováno *souvislé zobrazení celého povrchu koule*, potom podle vztahu (5-3) bude $\alpha = 1$.

V případě, že se *rovník na elipsoidu zobrazuje jako rovník na kouli*, potom z rovnice (5-17) po dosazení za $\varphi = 0^\circ$ za $U = 0^\circ$ plyne, že $k = 1$. V tomto případě bude délkové zkreslení na rovníku rovno jedná a od něho na sever i na jih bude narůstat.

Častěji se zobrazení používá pro vybranou část povrchu elipsoidu (například při Křovákově zobrazení nebo při zobrazení státních map Švýcarska), kdy se nepožaduje ani ztotožnění obrazů rovníků obou těles ani souvislé pokrytí zeměpisnou sítí celého povrchu referenční koule. Protože toto řešení je zpravidla používáno při definici zobrazení pro státní mapová díla, jsou zde zvýšené nároky na minimalizaci zkreslení v okolí *základní rovnoběžky* φ_0 , které sama se délkově nezkrsluje. Dále je uvedeno řešení, které odvodil *Gauss*.

Pokud je daná podmínka, aby území mezi dvěma rovnoběžkami φ_j a φ_s bylo zobrazena na referenční kouli s minimalizací zkreslení, zvolí se mezi nimi základní rovnoběžka φ_0 . Ta bude zobrazena na kouli jako rovnoběžka U_0 bude nezkrslená. Na ní platí:

$$m_0 = \alpha \frac{R \cos U_0}{N_0 \cos \varphi_0} = 1 \quad (5-21)$$

Vztáhne-li se potom obecná zeměpisná šířka k základní rovnoběžce, lze psát:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

Délkové zkreslení, které je funkcí φ lze potom vyjádřit i obecným vztahem:

$$m = f(\varphi) = f(\varphi_0 + \Delta\varphi)$$

který je možné za předpokladu malého rozsahu $\Delta\varphi$ rozvinout v Taylorovu řadu k zeměpisné šířce φ_0 :

$$m = f(\varphi_0) + f'(\varphi_0)\Delta\varphi + f''(\varphi_0)\frac{\Delta\varphi^2}{2} + f'''(\varphi_0)\frac{\Delta\varphi^3}{3!} + \dots \quad (5-22)$$

První člen rozvoje je dán výrazem (5-21). Pro to, aby délkové zkreslení v celém zobrazovaném území bylo minimální, stanovil Gauss podmínku, že délková zkreslení

počítaná podle vztahu (5-22) byla závislá pouze na derivacích 3. a vyšších řádů. Z toho plyne, že:

$$f'(\varphi_0) = 0 \text{ a } f''(\varphi_0) = 0$$

Společným řešením uvedených tří rovnic pro délkové zkreslení se získají konečné vztahy pro požadované tři konstanty:

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 \varphi_0}{1 - e^2} = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0 \quad (5-23)$$

$$k = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}^\alpha\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}} \quad (5-24)$$

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} = \sqrt{M_0 N_0} \quad (5-25)$$

V rámci tohoto postupu se získá i rovnice pro výpočet hodnoty U_0 ve tvaru:

$$U_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha}\right) \quad (5-26)$$

Poznámka: Podrobný postup odvození konstant je uveden například v [9].

6. Jednoduchá válcová zobrazení

Jednoduchá válcová zobrazení jsou charakteristická tím, že obrazy poledníků a rovnoběžek tvoří vzájemně ortogonální soustavu rovnoběžných přímk, ve kterých leží směry hlavních paprsků zkreslení. Pokud je zobrazení v pólové poloze, uvedená vlastnost je platná pro zeměpisnou síť, v případě příčné nebo obecné polohy je platná pro kartografické poledníky a rovnoběžky.

Všechny dále odvozené vztahy budou platné pro pólovou polohu při zobrazení referenční plochy koule do roviny. Při použití rovníkové nebo šikmé polohy se ve všech vzorcích zeměpisné souřadnice nahradí souřadnicemi kartografickými.

6.1 Základní vztahy a vzorce

Základní obecné rovnice jednoduchého válcového zobrazení jsou definovány vztahy (2-2):

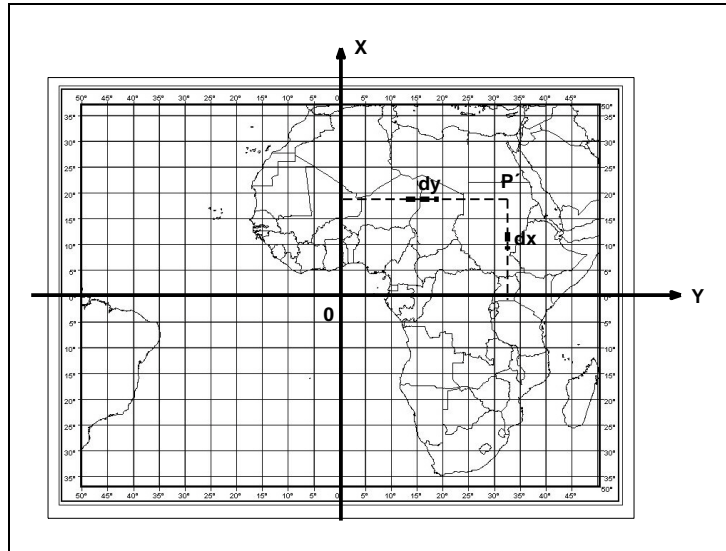
$$\begin{aligned} x &= f(U) \\ y &= f(V) \end{aligned} \quad (6-1)$$

Druhá rovnice vyjadřuje vzdálenost mezi obrazy poledníků. Ta by měla být při konstantním ΔV konstantní. Rovnici lze potom psát ve tvaru:

$$y = nV \quad (6-2)$$

kde n je zatím blíže neurčená konstanta.

Při výpočtu válcového zobrazení se zpravidla osa X rovinné pravoúhlé soustavy ztotožňuje s obrazem některého poledníku, většinou středního zobrazovaného území. Tento poledník se označuje jako *základní* a pro zobrazované území je považován za *nultý poledník* V_0 . Osa Y je vkládána zpravidla do obrazu rovníku. Při této volbě souřadnicových os je zeměpisná (kartografická) síť symetrická podle obou souřadnicových os (Obr. 6-1).



Obr. 6-1 Poloha souřadnicových os a tvar zeměpisné (kartografické) sítě jednoduchého válcového zobrazení

Poznámka: Výše definovaný základní poledník je používán pouze pro výpočet souřadnic potřebných bodů válcového zobrazení. Při konečné prezentaci daného území ve formě trvalé nebo virtuální mapy se uvádí zeměpisné délky většinou vztahené k poloze Greenwichského poledníku.

Obecné vztahy pro zkreslení délek ve směrech poledníků a rovnoběžek jsou dány poměry elementů délek v zobrazovací rovině a příslušných délek na referenční ploše. V shodě se vztahy (3-1) bude:

$$m_p = \frac{dx}{RdU} \quad (6-3)$$

$$m_r = \frac{dy}{R \cos U dV} \quad (6-4)$$

Vztah (6-4) lze upravit vzhledem ke tvaru rovnice (6-2):

$$m_r = \frac{n}{R \cos U} \quad (6-5)$$

Poněvadž se opět jedná o jednoduché zobrazení, vychází i zde hodnota Gaussova koeficientu $F=0$. Proto hlavní paprsky zkreslení budou opět ležet ve směrech obrazů poledníků a rovnoběžek. Pro výpočet plošného a úhlového zkreslení je možné opět použít vzorce ...:

$$m_{pl} = m_p m_r \quad (6-6)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p} \quad (6-7)$$

Rovnice zkreslení jsou funkcemi pouze zeměpisné šířky, resp. souřadnice x . Proto všechny ekvideformáty budou přímkami rovnoběžné s osou Y . Zkreslení se bude měnit stejnoměrně na obě strany od rovníku.

Z rovnic zkreslení je též patrné, že charakter válcového zobrazení na hodnotě konstanty n a tvaru funkce $x=f(U)$.

Velikost konstanty n má vliv na rozestup obrazů poledníků a zpravidla se určuje z podmínky, která rovnoběžka se nemá zkreslovat. Za předpokladu, že se nemá zkreslovat rovnoběžka U_0 (zpravidla střední rovnoběžka zobrazovaného území), potom lze rovnici (6-5) psát:

$$m_{n_0} = \frac{n}{R \cos U_0} = 1$$

a tedy lze odvodit:

$$n = R \cos U_0 \quad (6-8)$$

Pokud se požaduje nezkreslený rovník, potom hodnota U_0 bude rovna nule a hodnota konstanty n bude vzhledem k rovnici (6-8):

$$n = R \quad (6-9)$$

Tvar funkce $x=f(U)$ se odvodí podle požadavků na zkreslení rovinného obrazu.

6.2 Ekvidistantní válcové zobrazení

Vzhledem ke tvaru obecných rovnic zkreslení může být jednoduché válcové zobrazení ekvidistantní pouze v polednících. Poledníky budou nezkreslené, pokud bude platit:

$$m_p = \frac{dx}{RdU} = 1$$

odtud lze psát:

$$dx = RdU$$

Pokud osa Y bude totožná s obrazem rovníku, potom je možné předchozí výraz bude integrován v mezích:

$$\int_0^x dx = R \int_0^U dU$$

z něhož se získá první zobrazovací rovnice ve tvaru:

$$x = RU \quad (6-10)$$

Druhá zobrazovací rovnice se pouze připojí ve tvaru (6-2), tedy:

$$y = nV$$

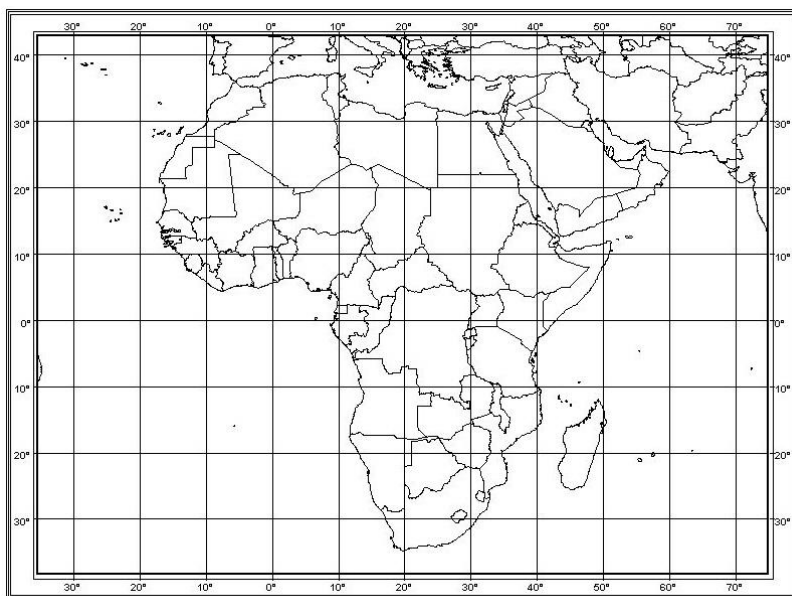
Zákony zkreslení budou mít tvar:

$$\begin{aligned} m_p &= 1 \\ m_r = m_{pl} &= \frac{n}{R \cos U} \\ \sin \frac{\Delta\omega}{2} &= \frac{n - R \cos U}{n + R \cos U} \end{aligned} \quad (6-11)$$

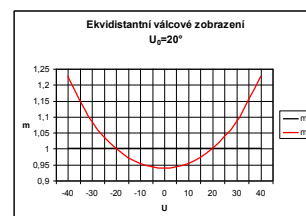
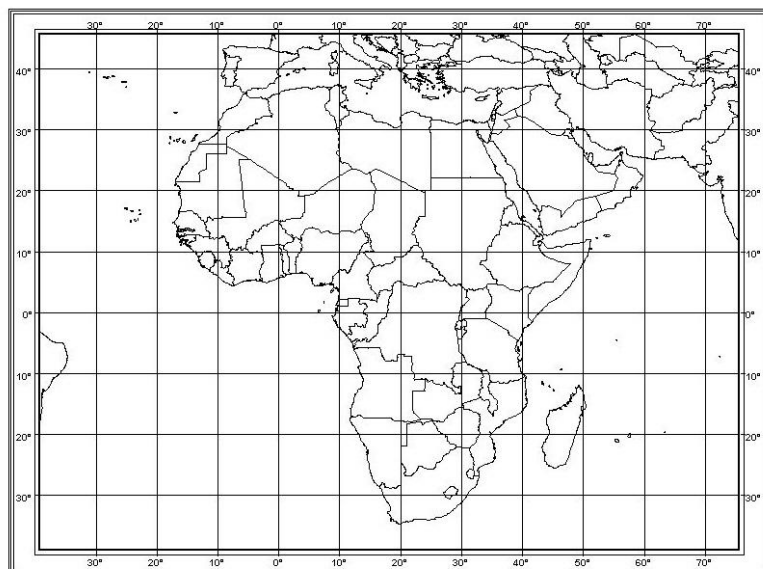
V ve druhé zobrazovací rovnici i v rovnicích zkreslení bude konstanta n dosazena podle doplňujících podmínek ze vztahu (6-8) nebo (6-9).

Sít' rovnoběžek a poledníků je v tomto zobrazení čtvercová (pro $n = R$) nebo obdélníková (pro $n = R \cos U_0$). Zobrazení se čtvercovou sítí se v literatuře nazývá zpravidla jako zobrazení *Marinovo*. Jeho ukázka pro území Afriky je na následujícím obrázku (Obr. 6-2), doplněném grafem zkreslení v rovnoběžkách. Obrázek (Obr. 6-3) je příkladem zobrazení stejného území se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami $U_0 = \pm 20^\circ$.

Ekvidistantní válcové zobrazení se v současné době používá velice zřídka. Bývá v něm například zpracováván klad mapových listů topografických map.



Obr. 6-2 Ukázka Marinova zobrazení pro území Afriky doplněné grafem délkového zkreslení



Obr. 6-3 Ukázka ekvidistantního válcového zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami $U_0 = \pm 20^\circ$ pro území Afriky doplněné grafem délkového zkreslení

6.3 Ekvivalentní válcové zobrazení

Při ekvivalentním válcovém zobrazení se nezkrslují plochy. Proto platí vztah:

$$m_{pl} = m_p m_r = 1$$

Po dosazení za délková zkreslení vzorců (6-3) a (6-5) se obdrží vztah:

$$\frac{dx}{RdU} \frac{n}{R \cos U} = 1 \quad (6-12)$$

Při ztotožnění obrazu rovníku s osou Y lze výraz (6-12) integrovat:

$$\int_0^x dx = \frac{R^2}{n} \int_0^U \cos U dU$$

a po integraci se obdrží první zobrazovací rovnice:

$$x = \frac{R^2}{n} \sin U \quad (6-13)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude mít opět tvar (6-2), tedy:

$$y = nV$$

Zkreslení v poledníku a rovnoběžce mají vzájemně reciprokovou hodnotu (viz vztah (6-12)). Všechna zkreslení jsou tedy dány výrazy:

$$m_p = \frac{1}{m_r} = \frac{R \cos U}{n} \quad (6-14)$$

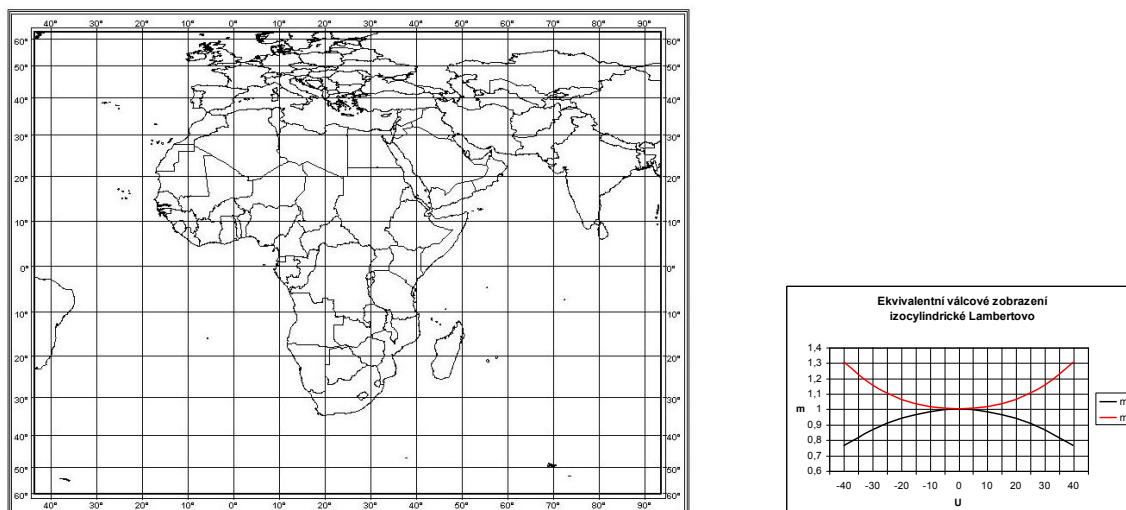
$$m_{pl} = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{n^2 - R^2 \cos^2 U}{n^2 + R^2 \cos^2 U}$$

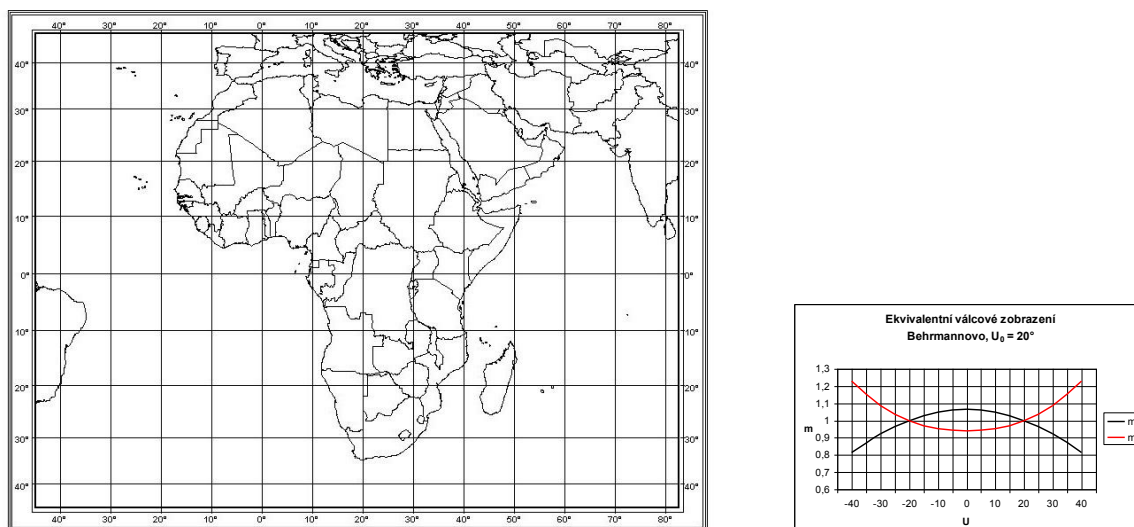
Konstanta n je volena na základě požadavků na nezkrslený rovník nebo dvě symetrické rovnoběžky s využitím vztahů (6-8) nebo (6-9).

Vlastností ekvivalentního válcového zobrazení je zmenšující se vzdálenost rovnoběžek s rostoucí zeměpisnou šířkou. Zobrazení se používá buďto s nezkrsleným rovníkem (zobrazení *Lambertovo* podle *Johanna Heinricha Lamberta, 1728 - 1777*) nebo se dvěma nezkrslenými rovnoběžkami (zobrazení *Behrmannovo*, *Walter Emmerich Behrmann, 1882 - 1955*). Zobrazení se používá u map velmi malých měřítek v případě, že je nutné zachovat velikosti ploch (velikosti území států, tematických areálů apod.).

Na následujících obrázcích (Obr. 6-4 , Obr. 6-5) jsou ukázky zobrazení Afriky v Lambertově izocylindrickém a Behramnově zobrazení.



Obr. 6-4 Ukázka Lambertova izocylindrického zobrazení pro území Afriky doplněné grafem délkových zkreslení



Obr. 6-5 Ukázka ekvivalentního válcového zobrazení Behrmannova se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami $U_0 = \pm 20^\circ$ pro území Afriky doplněné grafy délkového zkreslení

6.4 Konformní válcové zobrazení

Zobrazovací rovnice konformního zobrazení se odvodí z podmínky konformity (viz odstavec 4.3):

$$m_p = m_r$$

ve které se za m_p a m_r dosadí výrazy (6-3) a (6-5). Tím se obdrží základní rovnice:

$$\frac{dx}{RdU} = \frac{n}{R\cos U}$$

Pokud se ztotožní obraz rovníku s osou Y , výraz se integruje v mezích:

$$\int_0^x dx = n \int_0^U \frac{dU}{\cos U}$$

Po integraci se získá první zobrazovací rovnice ve dvou formálních variantách:

$$x = nQ = n \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \quad (6-15)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude mít opět tvar (6-2), tedy:

$$y = nV$$

Rovnice zkreslení v případě uvážení vztahu $m_p = m_r = m$ nabudou tvaru:

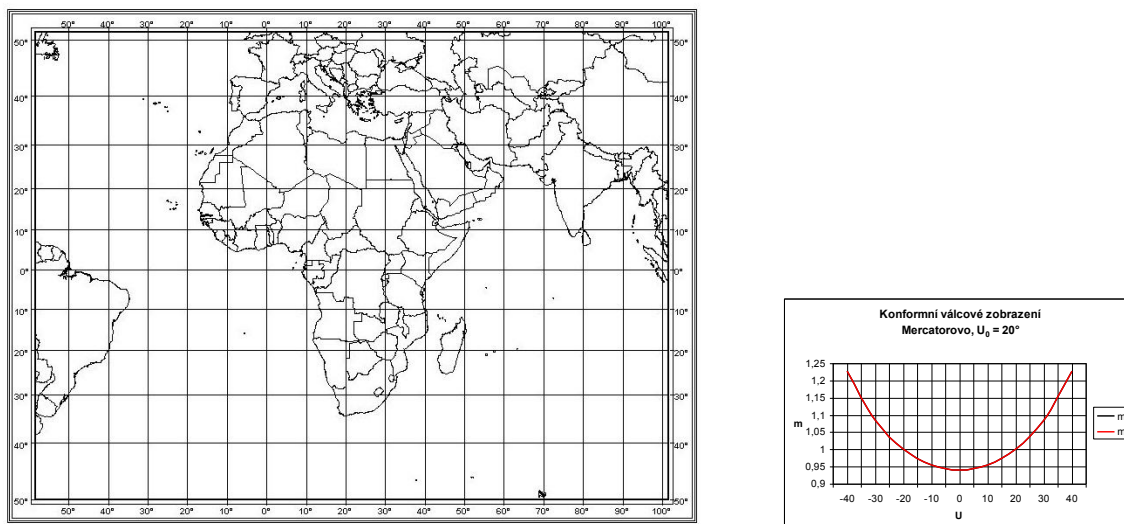
$$\begin{aligned} m &= \frac{n}{R \cos U} \\ m_{pl} &= m^2 \\ \Delta\omega &= 0 \end{aligned} \quad (6-16)$$

Konstanta n se opět volí na základě doplňujících podmínek ve tvaru (6-8) nebo (6-9).

Konformní válcové zobrazení je typické zvětšováním vzdálenosti rovnoběžek směrem k oběma pólům. Na mapách v tomto zobrazení není možné póly zobrazit, neboť leží v nekonečnu vzhledem k rovníku. Proto se zobrazení používá nejčastěji pro území s polohou v blízkosti rovníku. Příklad použití uvedeného zobrazení pro území Afriky je na obrázku (Obr. 6-6), kde je připojen i graf délkového zkreslení. Opět jako v předešlých případech byla volena varianta se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami $U_0 = \pm 20^\circ$.

Popsané zobrazení se nazývá podle holandského kartografa *Mercatorovo* (*Gerardus Mercator*, vlastním jménem *Kraemer*, 1512 - 1594). Mercator zobrazení již odvodil pomocí matematického aparátu ze zákonů zkreslení.

Poznámka: Jednoduché konformní válcové zobrazení celé Země v pólové poloze bylo často používáno zejména pro tvorbu námořních navigačních map, protože se v něm čáry stejných hodnot azimutů (loxodromy) zobrazovaly jako přímky. To mělo své výhody, pokud se k navigaci používaly zejména magnetické přístroje (kompasy, ...). S přechodem na moderní metody navigace a začátkem plavby podél ortodrom, frekvence využití tohoto zobrazení se výrazně snížila.



Obr. 6-6 Ukázka konformního válcového zobrazení Mercatorova se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami $U_0 = \pm 20^\circ$ pro území Afriky doplněné grafy délkového zkreslení

6.5 Šikmá poloha válcového zobrazení

Všechna válcová zobrazení značně zkreslují oblasti kolem pólů. Jsou proto vhodná zpravidla pro zobrazení pouze pro úzkých pásů podél zeměpisného nebo kartografického rovníku (hlavní kružnici na kouli). V případě použití válcového zobrazení území rozloženého podél kartografického rovníku (rovníková nebo šikmá poloha), je nutné ve všech vzorcích zaměnit souřadnice U a V souřadnicemi kartografickými S a D . Vztah mezi kartografickými a zeměpisnými souřadnicemi je dán vzorcem (viz vzorce (1-24) a (1-25)).

K jejich určení je však nutné znát polohu kartografického pólu U_k a V_k , kterou je možné vypočítat ze známých zeměpisných souřadnic dvou bodů ležících na kartografickém rovníku (tedy zpravidla na podélné ose zobrazovaného území). Pro určení zeměpisných souřadnic je vhodné využít mapu, na které je již území jednou zobrazené. Body definující polohu kartografického rovníku se vybírají co nejdále od sebe. Jejich zeměpisné souřadnice budou $P_1 (U_1, V_1)$ a $P_2 (U_2, V_2)$. K výpočtu polohy kartografického pólu se potom využijí vztahy odvozené v téže kapitole.

7. Jednoduchá kuželová zobrazení

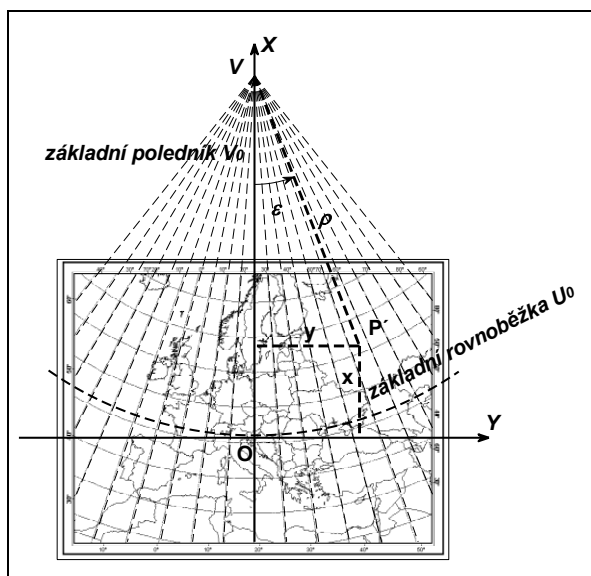
Jednoduchá kuželová zobrazení mají poledníky zobrazené jako osnovu přímek vycházející z jednoho bodu – počátku polárního souřadnicového systému. Rovnoběžky jsou částí soustředných kružnic opět se středem v počátku rovinného polárního souřadnicového systému. Zeměpisný (nebo kartografický) pól se zobrazuje jako bod totožný se středem obrazů rovnoběžek nebo jako část kružnice. Poledníky a rovnoběžky jsou navzájem ortogonální a současně v jejich směrech leží hlavní paprsky zkreslení.

Všechny dále odvozené vztahy budou platné pro pólovou polohu při zobrazení referenční plochy koule do roviny. Při použití rovníkové nebo šikmé polohy se ve všech vzorcích zeměpisné souřadnice nahradí souřadnicemi kartografickými.

7.1 Základní vztahy a vzorce

Při použití kuželových zobrazení se zpravidla střední poledník (tvořící osu zobrazovaného území) volí jako *základní poledník* V_0 tohoto zobrazení. Do jeho obrazu se vkládá osa X a současně je mu přisouzena nulová hodnota zeměpisné délky.

Kuželová zobrazení jsou vhodná pro zobrazování území rozložená podél zeměpisných (nebo kartografických) rovnoběžek. Rovník od těchto území bývá často značně vzdálen bez možnosti jeho zobrazení, proto se počátek rovinné pravoúhlé souřadnicové soustavy volí v průsečíku základního poledníku a *základní rovnoběžky*, která přibližně prochází středem zobrazovaného území (viz Obr. 7-1)



Obr. 7-1 Volba počátku rovinné pravoúhlé souřadnicové soustavy u kuželových zobrazení

U kuželových zobrazení se zobrazovací rovnice i zákony zkreslení vyjadřují v rovinných polárních souřadnicích ρ a ε , které se transformují do rovinných pravoúhlých souřadnic pomocí vztahů (7-1), tedy

$$\begin{aligned}x &= x_v - \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (7-1)$$

Počátek polární souřadnicové soustavy je v bodě V (vrchol kužele), který má konstantní hodnotu souřadnice x označenou x_v .

Obecné rovnice kuželového zobrazení jsou ve tvaru (7-2), tedy

$$\begin{aligned}\rho &= f(U) \\ \varepsilon &= f(V)\end{aligned}\quad (7-2)$$

První zobrazovací rovnici je možné vyjádřit s ohledem na základní rovnoběžku ve tvaru:

$$\rho = \rho_0 + f(U - U_0)\quad (7-3)$$

kde ρ_0 je průvodič základní rovnoběžky, který současně určuje její vzdálenost od počátku rovinného polárního souřadnicového systému. S ohledem na obrázek (Obr. 7-1) platí

$$\rho_0 = x_v\quad (7-4)$$

U kuželových zobrazení se dále požaduje, aby úhlová vzdálenost obrazů poledníků byla při konstantním přírůstku ΔV též konstantní. Druhou obecnou zobrazovací rovnicí je potom možné uvést ve tvaru:

$$\varepsilon = nV \quad (7-5)$$

kde V je zeměpisná délka počítaná od základního poledníku pro dané území V_0 a n je konstanta nabývající hodnot (0;1) v závislosti na doplňujících podmínkách pro vybraný typ zobrazení.

Vzhledem k tomu, že se opět jedná o jednoduché zobrazení, budou hlavní paprsky délkového zkreslení ležet ve směrech poledníků a rovnoběžek. Hodnoty tohoto zkreslení je možné vyjádřit poměrem délkových elementů v zobrazovací rovině a na referenční kouli ve tvarech (Obr. 7-2):

$$m_p = \frac{-d\rho}{RdU} \quad (7-6)$$

$$m_r = \frac{\rho d\varepsilon}{R \cos U dV} \quad (7-7)$$

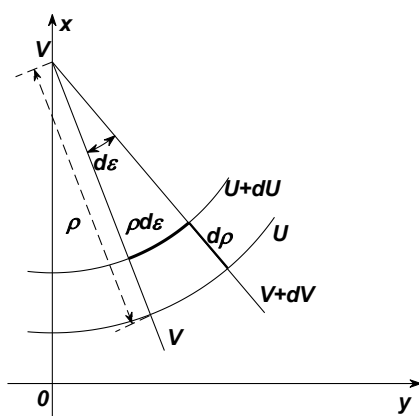
Záporné znaménko u proměnné $d\rho$ ve vzorci (7-6) je formálním vyjádřením vzájemné protichůdnosti růstu hodnot U a ρ . Rovnici (7-7) je možné upravit vzhledem ke tvaru rovnice (7-5), jejíž derivace bude:

$$d\varepsilon = ndV$$

$$n = \frac{d\varepsilon}{dV}$$

Rovnici (7-7) je potom možné psát ve tvaru:

$$m_r = \frac{n\rho}{R \cos U} \quad (7-8)$$



Obr. 7-2 Délkové elementy poledníku a rovnoběžky u kuželových zobrazení

Úhlové a plošné zkreslení je možné vyjádřit ve tvarech (7-9) a, (7-10) tedy:

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p} \quad (7-9)$$

$$m_{pl} = m_r m_p \quad (7-10)$$

Všechna zkreslení jsou funkcemi pouze jedné proměnné – zeměpisné šířky U , resp. souřadnice ρ . Ekvideformáty stejných hodnot zkreslení mají proto tvar soustředných kružnic se středem v počátku polárního systému V .

U kuželových zobrazení je možné nalézt vždy jednu ekvideformátu (rovnoběžku), s minimální hodnotou zkreslení, která může být případně rovna jedné. Od této rovnoběžky zkreslení roste na v obou směrech zeměpisné šířky, avšak nesymetricky. Obrazem pólu může být bod nebo část kružnice.

Kuželová zobrazení mohou být řešena s jednou nebo dvěma nezakreslenými rovnoběžkami. Zobrazení jsou matematicky definovaná, přesto tyto varianty je možné si geometricky představit jako tečný, resp. sečný kužel.

7.2 Ekvidistantní kuželové zobrazení

Jednoduchá kuželová zobrazení je možné jako ekvidistantní řešit pouze jako ekvidistantní v polednicích. Pro ně lze napsat podmínku:

$$\begin{aligned} m_p &= 1 \\ \frac{-d\rho}{RdU} &= 1 \end{aligned} \quad (7-11)$$

Řešení rovnice (7-11) vztážené k základní rovnoběžce U_0 je možné napsat ve tvaru:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = -R \int_{U_0}^U dU$$

ze kterého se získá tvar zobrazovací rovnice pro ρ :

$$\rho = \rho_0 - R(U - U_0) \quad (7-12)$$

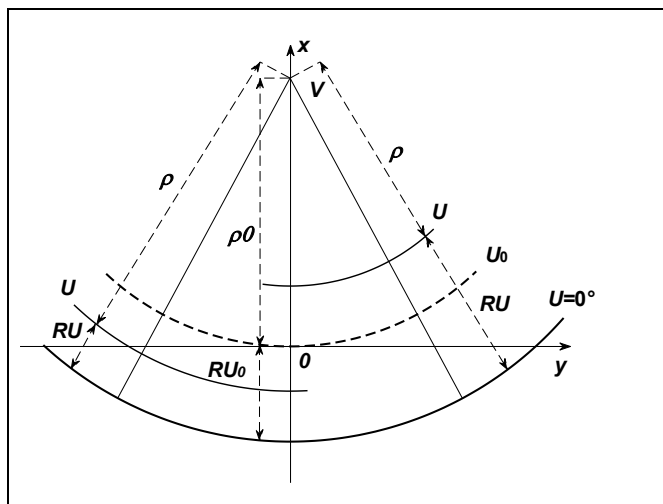
Význam jednotlivých veličin rovnice (7-12) je zřejmý z obrázku (Obr. 7-3). Na obrázku je též patrný rozdíl v použití uvedené rovnice pro zeměpisné šířky větší, resp. menší než je U_0 .

Zobrazovací rovnice pro ϵ má tvar (7-5), tedy:

$$\epsilon = nV$$

Vztahy pro zákony zkreslení vyplývají z rovnic (7-11), (7-8), Pro tuto variantu zobrazení budou ve tvarech:

$$\begin{aligned} m_p &= 1 \\ m_r = m_{pl} &= \frac{n\rho}{R \cos U} \\ \sin \frac{\Delta\omega}{2} &= \frac{n\rho - R \cos U}{n\rho + R \cos U} \end{aligned} \quad (7-13)$$



Obr. 7-3 Význam průvodiče ρ u ekvidistantního kuželového zobrazení

Pro vlastní použití je nutné určit hodnoty konstant n a ρ_0 . K tomuto určení se stanovují doplňující podmínky v různých variantách. V dalším textu jsou uvedeny tři nejběžnější varianty:

- je stanovena podmínka, aby na základní rovnoběžce U_0 bylo délkové zkreslení minimální a současně aby tato rovnoběžka byla délkově nezkreslena;
- je stanovena podmínka dvou předem daných nezkreslených rovnoběžek o zeměpisných šířkách U_1 a U_2 ;
- je stanovena podmínka totožného zkreslení nejsevernější a nejjihnější rovnoběžky.

7.2.1 Ekvidistantní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

Pokud je stanovena podmínka, aby na základní rovnoběžce U_0 bylo délkové zkreslení minimální a současně aby tato rovnoběžka byla délkově nezkreslena, je nutné nejprve odvodit konstantu ρ_0 . Konstanta se odvodí z podmínky extrémní hodnoty funkce (7-8) pro zeměpisnou šířku základní rovnoběžky U_0 :

$$\frac{dm_{r_0}}{dU} = \frac{d\left(\frac{n\rho_0}{R \cos U_0}\right)}{dU} = 0$$

tedy:

$$\frac{n \frac{d\rho_0}{dU} R \cos U_0 - n\rho_0 \frac{d(R \cos U_0)}{dU}}{R^2 \cos^2 U_0} = 0$$

Z rovnice (7-11) plyne výraz:

$$\frac{d\rho}{dU} = -R$$

který lze dosadit do výše uvedené rovnice. Po derivacích se obdrží vztah:

$$\frac{-nR^2 \cos U_0 + n\rho_0 R \sin U_0}{R^2 \cos^2 U_0} = 0$$

a odtud lze vypočítat:

$$\rho_0 = R \cot g U_0 \quad (7-14)$$

Protože druhá derivace $\frac{d^2 m_r}{dU_0^2}$ je kladná (jak se lze snadno přesvědčit), dochází na rovnoběžce

U_0 při splnění podmínky (7-14) k minimu délkového zkreslení. Je-li dále požadováno, aby hodnota tohoto minima byla optimální, tedy rovna jedné, musí podle (7-13) platit:

$$\frac{n\rho_0}{R \cos U_0} = 1$$

odkud se po dosazení za ρ_0 z výrazu (7-14) vypočítá

$$n = \sin U_0 \quad (7-15)$$

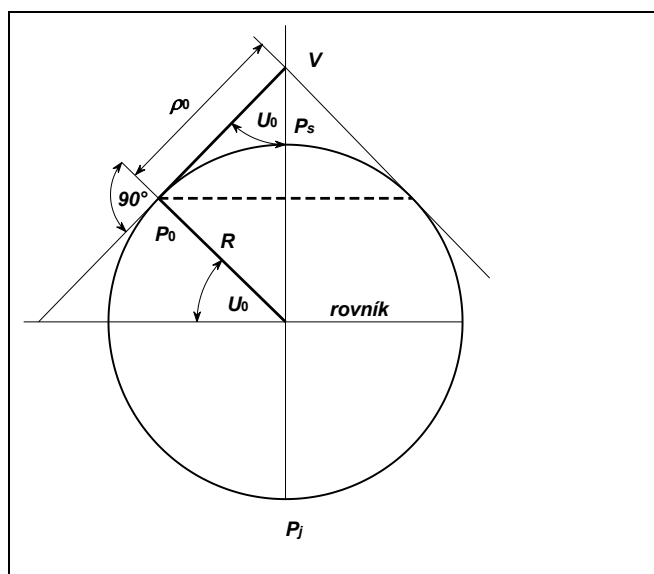
Hodnotu ρ_0 je možné si graficky představit na základě obrázku (Obr. 7-4) jako tečný kužel dotýkající se referenční koule podél rovnoběžky U_0 .

Analogicky pro referenční elipsoid platí:

$$\rho_0 = N_0 \cot g \varphi_0 \quad (7-16)$$

$$n = \sin \varphi_0 \quad (7-17)$$

Základní rovnoběžky U_0 může být předem volena. Její volba však musí respektovat nesymetrický průběh délkového zkreslení, které od ní roste rychleji na sever než na jih, jak dokumentuje obrázek (Obr. 7-5). Proto je nutné polohu základní rovnoběžky volit poněkud severněji, než je střed zobrazované oblasti. Polohu základní rovnoběžky je možné vypočítat z podmínky totožného zkreslení severní a jižní rovnoběžky území, jejichž zeměpisné šířky jsou U_s a U_j .



Obr. 7-4 Volba konstanty ρ_0 u ekvidistantního kuželového zobrazení

Uvedenou podmínku lze vyjádřit rovnicí:

$$m_{r_s} = m_{r_j}$$

Po dosazení odpovídajících proměnných z rovnice (7-13) se získá vztah:

$$\frac{n\rho_s}{R \cos U_s} = \frac{n\rho_j}{R \cos U_j}$$

kde se výrazy ρ_s a ρ_j se dosadí podle vztahu (7-12):

$$\rho_s = \rho_0 - R(U_s - U_0)$$

$$\rho_j = \rho_0 - R(U_j - U_0)$$

Použije-li se pro výpočet ρ_0 vztah (7-14), potom bude:

$$\cot g U_0 (\cos U_j - \cos U_s) = (U_s \cos U_j - U_j \cos U_s) - U_0 (\cos U_j - \cos U_s)$$

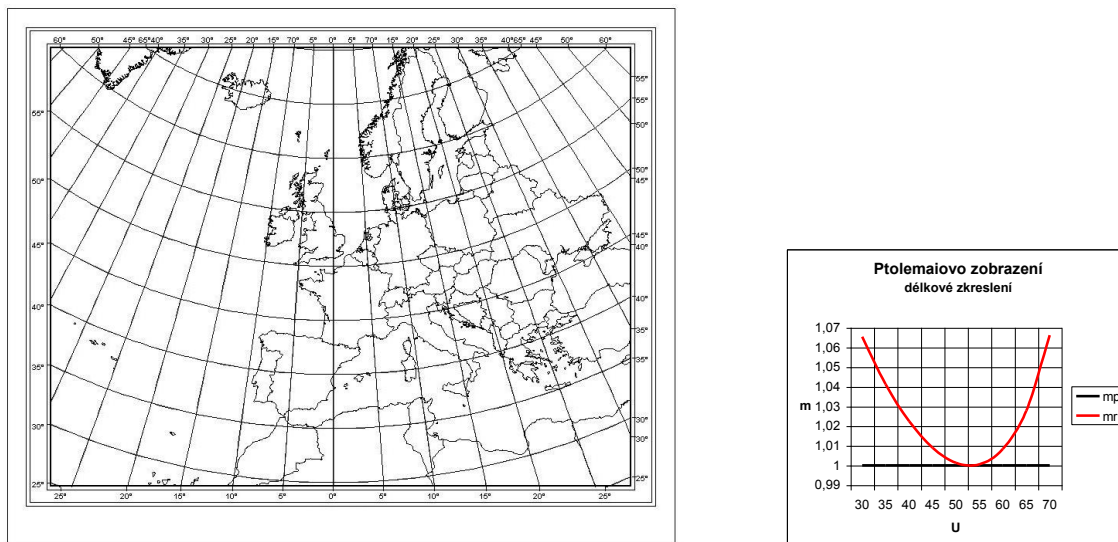
Odtud bude po úpravě:

$$\cot g U_0 = \frac{U_s \cos U_j - U_j \cos U_s}{\cos U_j - \cos U_s} - U_0 \quad (7-18)$$

Rovnici (7-18) je nutné řešit aproximací v několika krocích. Jako počáteční hodnotu je možné volit

$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

Ukázka tohoto typu zobrazení, které odvodil *Ptolemaios (Claudius Ptolemaeus, 83 – 161)* je na obrázku (Obr. 7-5), v němž byla volena základní rovnoběžka $U_0 = 50^\circ$. Na obrázku jsou též vykreslené ekvideformáty délkového a plošného zkreslení.



Obr. 7-5 Ukázka Ptolemaiova zobrazení pro $U_s=70^\circ$ a $U_j=30^\circ$ a graf průběhu délkového zkreslení

7.2.2 Ekvidistantní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Ekvidistantní kuželové zobrazení je možné řešit tak, aby dvě předem dané rovnoběžky U_1 a U_2 byly délkově nezkreslené. V tomto případě platí:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R \cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R \cos U_2} = 1$$

Dosadí-li se za ρ_1 a ρ_2 výrazy (7-12), po úpravě bude:

$$R \cos U_1 = n[\rho_0 - R(U_1 - U_0)]$$

$$R \cos U_2 = n[\rho_0 - R(U_2 - U_0)]$$

Pokud se druhá rovnice odečte od první, potom bude:

$$R(\cos U_1 - \cos U_2) = nR(U_2 - U_1)$$

odkud se vypočítá první konstanta n :

$$n = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1} \quad (7-19)$$

Hodnota ρ_0 se poté vypočítá dosazením za vypočítané n do jedné z obou výchozích rovnic. Bude tedy:

$$R \cos U_1 = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1} [\rho_0 - R(U_1 - U_0)]$$

Odtud se po úpravě získá vztah pro výpočet druhé konstanty:

$$\rho_0 = \frac{R[(U_2 - U_0)\cos U_1 - (U_1 - U_0)\cos U_2]}{\cos U_1 - \cos U_2} \quad (7-20)$$

Poloha rovnoběžky U_0 se zpravidla volí uprostřed mezi rovnoběžkami U_1 a U_2 .

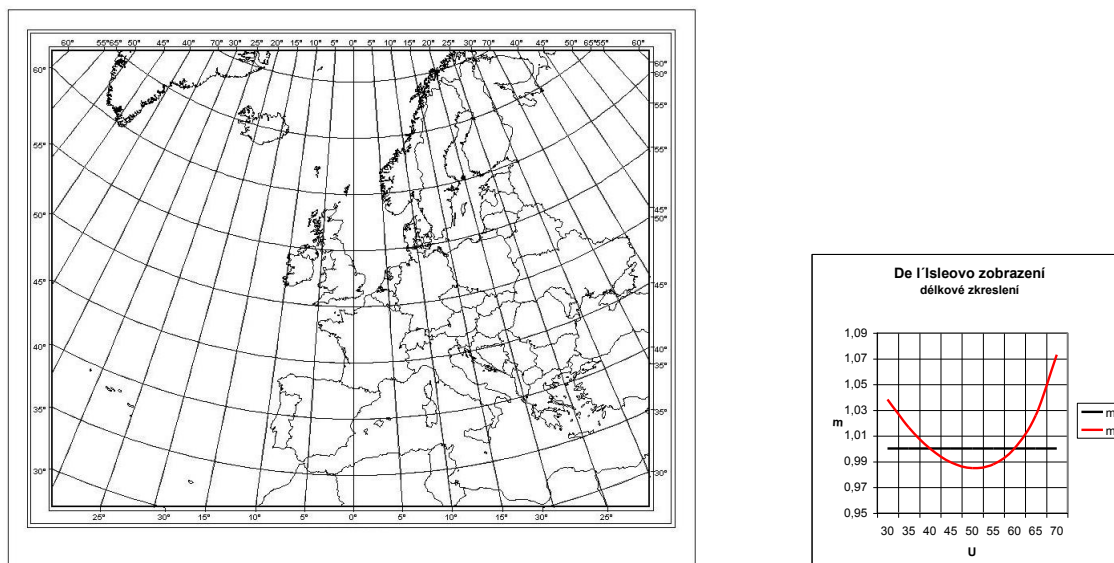
Ekvidistantní kuželové zobrazení o dvou nezkreslených rovnoběžkách odvodil *de l'Isle*, který při svém řešení volil konstantní úhlové vzdálenosti mezi jednotlivými konstrukčními rovnoběžkami. V tomto případě tedy platí:

$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

$$U_1 = \frac{U_j + U_0}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_s + U_0}{2}$$

Jeho použití na území Evropy a průběh délkového zkreslení tohoto zobrazení vypočítaného za stejných vstupních podmínek jako na obrázku (Obr. 7-5) je uveden na obrázku (Obr. 7-6).



Obr. 7-6 Ukázka použití de l'Isleova zobrazení pro $U_s=70^\circ$ a $U_j=30^\circ$ a graf délkového zkreslení

Ekvidistantní kuželové zobrazení o dvou nezkreslených rovnoběžkách lze řešit i ve variantě *totožného zkreslení nejsevernější a nejižnější rovnoběžky* zobrazovaného území. Poloha nezkreslených rovnoběžek v tomto případě není předem dána, ale vyplyne z výše uvedené podmínky.

Tuto variantu rozpracoval Vitkovskij, který připojil další podmínku, aby *základní rovnoběžka měla v absolutní hodnotě stejné zkreslení jako rovnoběžky krajní*. Polohu základní rovnoběžky přitom zvolil uprostřed území, tedy:

$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

Z této podmínky se odvodí hodnota ρ_0 postupem stejným jako při odvozování předchozí varianty zobrazení. Podmínku totožného zkreslení lze vyjádřit:

$$m_{r_s} = m_{r_j}$$

tedy:

$$\frac{n\rho_s}{R \cos U_s} = \frac{n\rho_j}{R \cos U_j}$$

a odtud se po dosazení za ρ_s a ρ_j z (7-12) obdrží výsledný vztah:

$$\rho_0 = \frac{R[(U_s - U_0)\cos U_j - (U_j - U_0)\cos U_s]}{\cos U_j - \cos U_s} \quad (7-21)$$

Podmínku shodné absolutní hodnoty zkreslení na základní rovnoběžce U_0 a krajních rovnoběžkách lze vyjádřit podle obrázku (Obr. 7-7):

Obr. 7-7 Graf délkového zkreslení Vitkovského zobrazení pro $U_s=70^\circ$ a $U_j=30^\circ$

$$m_{r_s} = m_{r_j} = 1 + v_m$$

$$m_{r_0} = 1 - v_m$$

kde v_m je délkové zkreslení vyjádřené v poměrové formě jako $v_m = m - 1$. Sečtením obou rovnic se získá vztah:

$$m_{r_s} + m_{r_0} = 2$$

tedy:

$$\frac{n\rho_s}{R \cos U_s} + \frac{n\rho_0}{R \cos U_0} = 2$$

a odtud:

$$n = \frac{2R \cos U_s \cos U_0}{\rho_s \cos U_0 + \rho_0 \cos U_s} \quad (7-22)$$

Pokud je nutné znát polohu nezkraslených rovnoběžek, například pro jejich zadání do parametrů zobrazení při vizualizaci digitálních dat v používaném programovém prostředí, jejich zeměpisné šířky lze vypočítat na základě zákonů zkreslení:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R \cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R \cos U_2} = 1$$

Dosazením za ρ_1 a ρ_2 z rovnice (7-12) se po úpravě získají vztahy:

$$\cos U_1 = n \left(\frac{\rho_0}{R} - U_1 + U_0 \right) \quad (7-23)$$

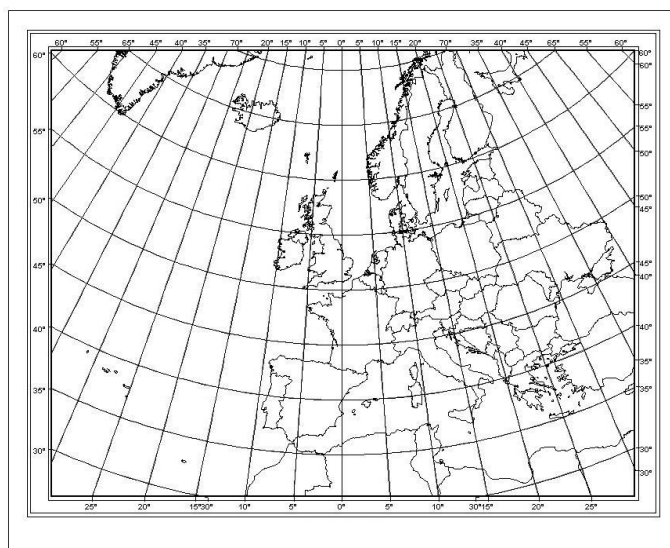
$$\cos U_2 = n \left(\frac{\rho_0}{R} - U_2 + U_0 \right)$$

Hodnoty U_1 a U_2 se určí opět některou z metod postupné aproximace. Při prvním přiblížení je možné do pravých stran rovnic dosadit:

$$U_1 = \frac{U_j + U_0}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_s + U_0}{2}$$

Na následujícím obrázku (Obr. 7-8) je ukázka použití Vitkovského zobrazení pro $U_s = 70^\circ$ a $U_j = 30^\circ$, ve kterém mají nezkreslené rovnoběžky hodnoty $U_1 = 36^\circ 55'$ a $U_2 = 66^\circ 02'$.



Obr. 7-8 Ukázka Vitkovského zobrazení pro $U_s=70^\circ$ a $U_j=30^\circ$

7.3 Ekvivalentní kuželové zobrazení

Ekvivalentní kuželové zobrazení je definováno základním vztahem vycházející z podmínky:

$$m_{pl} = m_p m_r = 1$$

která po dosazení za délková zkreslení z (7-6) a (7-7) získá tvar:

$$\frac{-d\rho}{RdU} \frac{n\rho}{R\cos U} = 1$$

a po úpravě tvar vhodný pro integraci:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \rho d\rho = -\frac{R^2}{n} \int_{U_0}^U \cos U dU$$

Po integraci výrazu se získá první zobrazovací rovnice:

$$\rho^2 = \rho_0^2 - \frac{2R^2}{n}(\sin U - \sin U_0) \quad (7-24)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude ve tvaru (7-5), tedy:

$$\varepsilon = nV$$

Zákony zkreslení mají tvar:

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{n\rho}{R \cos U}$$

$$m_{pl} = 1 \quad (7-25)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{n^2 \rho^2 - R^2 \cos^2 U}{n^2 \rho^2 + R^2 \cos^2 U}$$

Pro úplnou definici zobrazení je nutno určit konstanty n a ρ_0 pomocí doplňujících podmínek, které zpřesňují jeho parametry. Obdobně jako u ekvidistantního kuželového zobrazení se volí podmínky, že jedna nebo dvě rovnoběžky jsou nezkrácené.

7.3.1 Ekvivalentní kuželové zobrazení s jednou nezkrácenou rovnoběžkou

Podmínku *nezkrácené základní rovnoběžky* U_0 je nutné doplnit podmínkou, aby se *pól* zobrazil jako bod totožný s počátkem rovinného polárního souřadnicového systému.

Uvedenou podmínku lze vyjádřit z rovnice (7-24) dosazením za $U = 90^\circ$ a $\rho = 0$. Z toho:

$$n = \frac{2R^2(1 - \sin U_0)}{\rho_0^2}$$

Podmínku nezkrácené základní rovnoběžky je možné vyjádřit rovnicí:

$$\frac{n\rho_0}{R \cos U_0} = 1$$

Společným řešením obou rovnic pro dvě neznámé se obdrží rovnice pro jejich výpočet ve tvaru:

$$\rho_0 = \frac{2R(1 - \sin U_0)}{\cos U_0} = 2R \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{U_0}{2} \right) \quad (7-26)$$

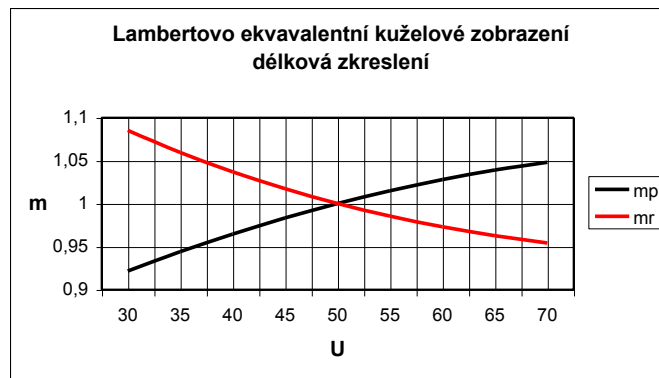
$$n = \frac{\cos^2 U_0}{2(1 - \sin U_0)} = \cos^2 (45^\circ - U_0) \quad (7-27)$$

Základní rovnoběžka se zpravidla opět volí uprostřed mezi severní a jižní rovnoběžkou zobrazovaného území. Tato varianta je zajímavá tím, že platí:

$$\rho_0 \neq R \cotg U_0$$

což si lze geometricky představit tak, že se kužel referenční koule vůbec nedotýká.

Tato varianta zobrazení se nazývá *Lambertovo kuželové ekvivalentní zobrazení*. Průběh jeho délkového zkreslení v rovnoběžkách a polednicích je na obrázku (Obr. 7-9).

Obr. 7-9 Graf délkového zkreslení Lambertova ekvivalentního kuželového zobrazení pro $U_s=70^\circ$ a $U_j=30^\circ$

7.3.2 Ekvivalentní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Podobně jako u ekvidistantního kuželového zobrazení i v této variantě je možné *předem zvolit dvě rovnoběžky* (U_1 a U_2), které se nebudou délkově zkreslovat. Platí zde tedy opět rovnice:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R \cos U_1}$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R \cos U_2}$$

které po umocnění a po dosazení za ρ_1^2 a ρ_2^2 z (7-24) nabudou tvar:

$$n^2 \left[\rho_0^2 - \frac{2R^2}{n} (\sin U_1 - \sin U_0) \right] = R^2 \cos^2 U_1$$

$$n^2 \left[\rho_0^2 - \frac{2R^2}{n} (\sin U_2 - \sin U_0) \right] = R^2 \cos^2 U_2$$

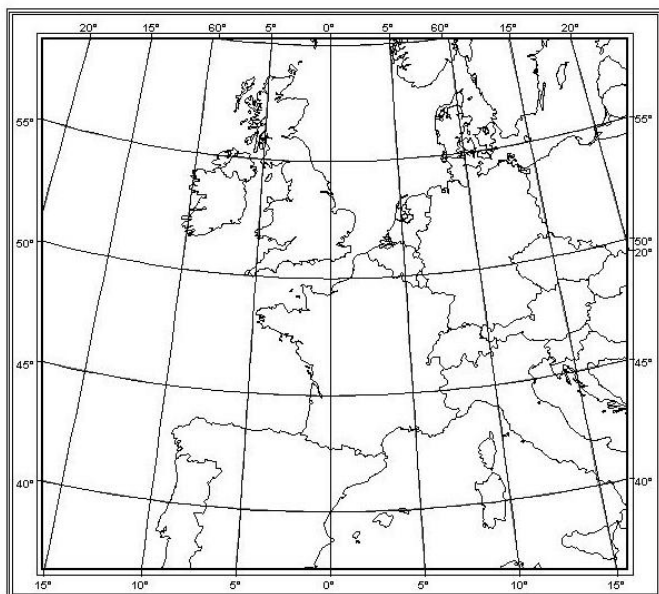
Rovnice se od sebe odečtou a z jejich rozdílu se odvodí první konstanta n :

$$n = \frac{\cos^2 U_1 - \cos^2 U_2}{2(\sin U_2 - \sin U_1)} = \frac{1}{2} (\sin U_1 + \sin U_2) \quad (7-28)$$

Druhá konstanta ρ_0 se získá po dosazení výrazu (7-28) do jedné z předcházejících rovnic. Jeho dosazením například do první z rovnic se tato konstanta vypočítá podle výrazu:

$$\rho_0^2 = \frac{2R^2}{n} (\sin U_1 - \sin U_0) + \frac{R^2 \cos^2 U_1}{n^2} \quad (7-29)$$

Základní rovnoběžka U_0 se zpravidla volí uprostřed mezi nezkreslenými rovnoběžkami U_1 a U_2 . Zobrazení se často nazývá *Albersovo*. Ukázka tohoto zobrazení pro území Evropy a graf průběhu délkových zkreslení v polednicích a rovnoběžkách je na následujícím obrázku (Obr. 7-10).



Obr. 7-10 Ukázka Albersova ekvivalentního kuželového zobrazení pro $U_s=60^\circ$ a $U_j=40^\circ$ a graf délkového zkreslení

7.4 Konformní kuželové zobrazení

Konformní kuželové zobrazení je definováno podmínkami:

$$m_p = m_r$$

$$F = 0$$

Druhá podmínka je opět u jednoduchých zobrazení vždy splněna, proto postačí vyjít pouze z první podmínky, která po dosazení za délková zkreslení z (7-6) a (7-12) bude mít tvar:

$$\frac{-d\rho}{RdU} = \frac{n\rho}{R\cos U} \tag{ 7-30 }$$

Výraz (7-30) se integruje:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -n \int_{U_0}^U \frac{dU}{\cos U}$$

a po integraci se získá první zobrazovací rovnice ve tvaru:

$$\ln \rho - \ln \rho_0 = -n \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ \right) \right]$$

který lze po odlogaritmování vyjádřit také ve tvaru:

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right)} \right]^n \tag{ 7-31 }$$

Při použití vyjádření izometrické šířky podle (1-23) lze rovnici (7-31) napsat ve tvaru:

$$\rho = \rho_0 e^{n(\varrho_0 - \varrho)} \quad (7-32)$$

kde $e = 2,718281\dots$ je základ přirozených logaritmů.

Druhá zobrazovací rovnice bude opět ve tvaru (7-5), tedy:

$$\varepsilon = nV$$

Zákony zkreslení jsou vzhledem k výchozí podmínce konformního zobrazení ve tvaru:

$$\begin{aligned} m &= \frac{n\rho}{R \cos U} \\ m_{pl} &= m^2 \\ \Delta\omega &= 0 \end{aligned} \quad (7-33)$$

U kuželových konformních zobrazení se vždy počátek rovinné polární souřadnicové soustavy ztotožňuje s pólem, protože rovnice (7-31) nabývá pro $U = 90^\circ$ hodnotu $\rho = 0$.

Konstanty ρ_0 a n se určují opět podle doplňujících podmínek, kterými se zpřesňují typy zobrazení. Mezi základní varianty opět patří zobrazení s jednou nebo se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami.

7.4.1 Konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou

První varianta uvažuje zobrazení s jednou nezkreslenou základní rovnoběžkou obdobně, jak bylo uvedeno v odstavci 7.2.1 . V tomto případě se však zpravidla základní rovnoběžka dodatečně zkresluje a rovnice (7-14) tak získává tvar:

$$\rho_0 = m_0 R \cotg U_0 \quad (7-34)$$

kde m_0 je délkové zkreslení základní rovnoběžky, které je vždy menší než 1. Tím vzniká zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami. Jejich zeměpisnou šířku U_1 a U_2 je možné opět vypočítat ze vztahů:

$$\begin{aligned} m_{r_1} &= \frac{n\rho_1}{R \cos U_1} = 1 \\ m_{r_2} &= \frac{n\rho_2}{R \cos U_2} = 1 \end{aligned}$$

kde za ρ_1 a ρ_2 se dosadí výraz (7-31).

Výpočet konstanty n je stejný jako v odstavci 7.2.1 , tedy

$$n = \sin U_0$$

Uvedený typ zobrazení je použit například při zobrazení základních map České republiky (Křovákovo zobrazení), ovšem v šikmé poloze (viz kapitola 11).

7.4.2 Konformní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami

Budou-li požadovány dvě, předem dané rovnoběžky U_1 a U_2 , které nebudou délkově zkreslené, potom budou platit podmínky:

$$m_{r_1} = \frac{n\rho_1}{R \cos U_1} = 1$$

$$m_{r_2} = \frac{n\rho_2}{R \cos U_2} = 1$$

Z těchto podmínek se odvodí výrazy:

$$\rho_1 = \frac{R \cos U_1}{n}$$

$$\rho_2 = \frac{R \cos U_2}{n}$$

které se vzájemně podělí. Po jejich dělení se získá vztah:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\cos U_1}{\cos U_2}$$

Dosazením vztahu (7-31) a po úpravě se obdrží:

$$\frac{\cos U_1}{\cos U_2} = \frac{\rho_0 \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U_1}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n}{\rho_0 \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U_2}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n} = \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_2}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U_1}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n$$

Odtud lze vypočítat konstantu n :

$$n = \frac{\ln \cos U_1 - \ln \cos U_2}{Q_2 - Q_1} \quad (7-35)$$

Druhá konstanta se vypočítá z rovnice (7-31) dosazením za ρ_1 nebo ρ_2 :

$$\rho_0 = \frac{R \cos U_1}{n} \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_1}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n = \frac{R \cos U_2}{n} \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{U_2}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)} \right]^n \quad (7-36)$$

Rovnici (7-36) je možné vyjádřit formálně i pomocí základu přirozených logaritmů e :

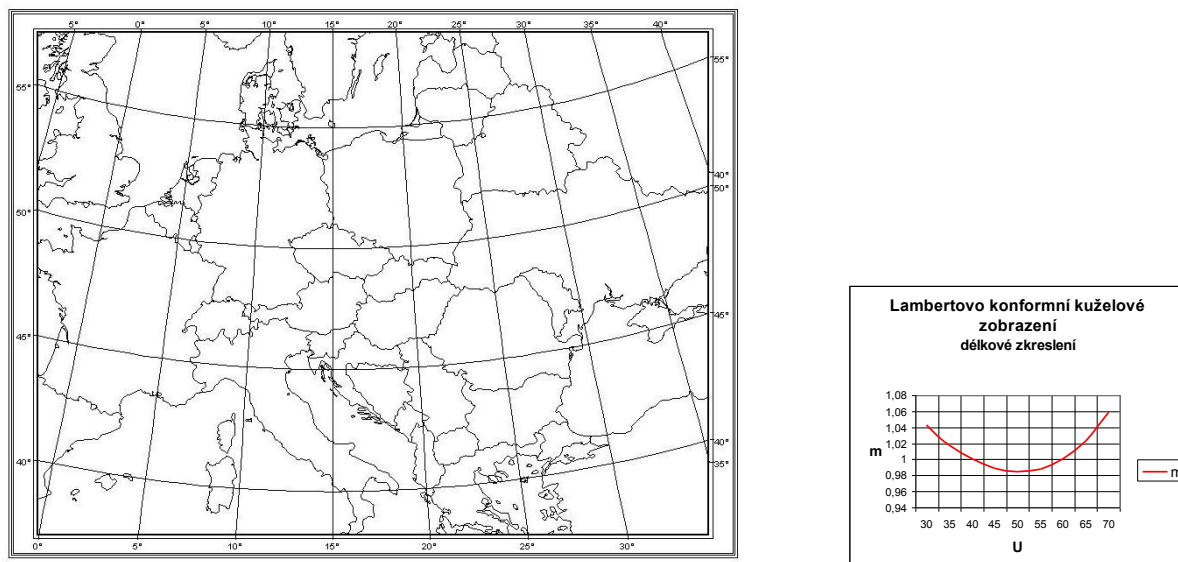
$$\rho_0 = \frac{R \cos U_1}{n} e^{n(Q_1 - Q_0)} = \frac{R \cos U_2}{n} e^{n(Q_2 - Q_0)} \quad (7-37)$$

Základní rovnoběžka U_0 se opět zpravidla volí uprostřed mezi nezkreslenými rovnoběžkami U_1 a U_2 .

Zobrazení se nazývá *Lambertovo* a je často používáno pro letecké navigační mapy standardizované podle norem ICAO (*International Civil Aviation Organization*) nebo NATO

(viz. kapitola 12). Zobrazení je použito též při tvorbě státních mapových děl například v Belgii.

Na obrázku (Obr. 7-11) je ukázka zobrazení pro střední Evropu a graf průběhu délkových zkreslení.



Obr. 7-11 Ukázka Lambertova konformního kuželového zobrazení pro $U_1 = 40^\circ$ a $U_2 = 60^\circ$ a graf jeho délkového zkreslení

7.5 Šikmá poloha kuželového zobrazení

Kuželové zobrazení je zpravidla vhodné pro území protáhlého tvaru ve směru rovnoběžky. Pokud má území protáhlý tvar, avšak jeho osa není ve směru zeměpisné rovnoběžky, je možné tuto osu nahradit rovnoběžkou kartografickou a pro jeho zobrazení použít šikmou polohu tak, jak je uvedeno v odstavci 1.2.2.a .

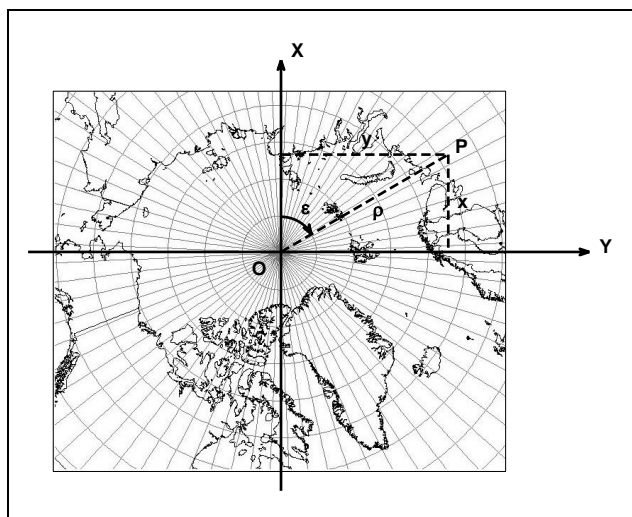
8. Jednoduchá azimutální zobrazení

Azimutální zobrazení je možné chápat jako mezní případ kuželových zobrazení, kdy konstanta $n = 1$ a počátek polární rovinné souřadnicové soustavy (vrchol kužele) splyne se zeměpisným nebo kartografickým pólem. V tomto typu zobrazení je obrazem sítě poledníků soustavou polopřímek vycházejících z pólu a obrazem rovnoběžek jsou soustředné kružnice se středem v pólu. Tyto soustavy jsou navzájem ortogonální a ve směrech poledníků a rovnoběžek taktéž leží hlavní paprsky zkreslení.

Jednoduchá azimutální zobrazení se nejčastěji používají pro zobrazení z referenční koule, a takto budou i odvozována v následujících odstavcích. Odvozované rovnice budou platné pro pólovou polohu, i když v tomto případě bývají velice často používány rovníková nebo obecná poloha. Zobrazení se však používají i pro zobrazení referenčního elipsoidu (například zobrazení UPS – Universal Polar Stereographic)

8.1 Základní vztahy a vzorce

U azimutálního zobrazení se ztotožňuje počátek rovinné pravoúhlé sítě s obrazem pólu (*středem zobrazení*). Při pólové poloze je tento střed v obrazu zeměpisného pólu, v rovníkové nebo šikmé poloze potom v obrazu kartografického pólu. Jeden z poledníků se zvolí jako *základní*, od něhož se odečítají zeměpisné (kartografické) délky. Do obrazu tohoto poledníku se vkládá osa X . Jako základní poledník se zpravidla volí střední poledník zobrazovaného území, který je i kolmý na severní a jižní rám budoucí mapy (viz Obr. 8-1).



Obr. 8-1 Volba polohy souřadnicových os azimutálního zobrazení

Pokud je azimutální zobrazení voleno v rovníkové nebo šikmé poloze, obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou zpravidla složitými křivkami. Pouze poledník procházející středem zobrazovaného území, který je totožný se základním kartografickým poledníkem a tedy i s osou X , je zobrazen jako přímka (viz Obr. 8-3, poledník $V=20^\circ$).

Zobrazovací rovnice a zákony zkreslení se vyjadřují pomocí polárních rovinných souřadnic ρ , ε jejichž převod do pravoúhlé soustavy je dán rovnicemi:

$$x = \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

kde ε je pravotočivý úhel odečítaný od kladné větve osy X .

Azimutální zobrazení se zejména využívá ke zobrazování oblastí rozložených v blízkosti pólu (zeměpisného nebo kartografického). Z tohoto důvodu je výhodné nahradit zeměpisnou (nebo kartografickou) šířku *zenitovým úhlem* počítaným podle vztahu:

$$Z = 90^\circ - U$$

U azimutálního zobrazení je nutné vždy zobrazovat celé území kolem pólu zobrazení (celý kruh). Obecné zobrazovací rovnice lze potom psát ve tvaru:

$$\rho = f(Z) \quad (8-1)$$

$$\varepsilon = V \quad (8-2)$$

Zákony zkreslení se vyjádří obdobně jako u kuželového zobrazení s tím rozdílem, že zde v zobrazovacích rovnicích nevystupuje žádná konstanta:

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ} \quad (8-3)$$

$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \quad (8-4)$$

Úhlové a plošné zkreslení je možné vyjádřit ve tvarech (7-9) a, (7-10) tedy:

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p} \quad (8-5)$$

$$m_{pl} = m_r m_p \quad (8-6)$$

Všechna zkreslení jsou opět funkcemi pouze jedné proměnné – zeměpisné šířky U , resp. souřadnice ρ . Ekvideformáty všech zkreslení mají proto tvar soustředných kružnic se středem v pólu zobrazení.

V dalších odstavcích jsou odvozené nejběžnější typy azimutálních zobrazení.

8.2 Ekvidistantní azimutální zobrazení

Nejčastější ekvidistantní azimutální zobrazení je zobrazení *Postelovo*, které je ekvidistantní v polednicích. Jeho zobrazovací rovnice vycházejí ze vztahu:

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ} = 1$$

Uvedená diferenciální rovnice se bude integrovat v mezích od 0 do Z , resp. ρ , protože pól bude vždy zobrazen jako bod:

$$\int_0^{\rho} d\rho = R \int_0^Z dZ$$

První zobrazovací rovnice bude potom ve tvaru:

$$\rho = RZ \quad (8-7)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude ve tvaru (8-2), tedy:

$$\varepsilon = V$$

Rovnice zkreslení po úpravách vztahů (8-3), (8-4), (7-9) a (7-10) budou ve tvarech:

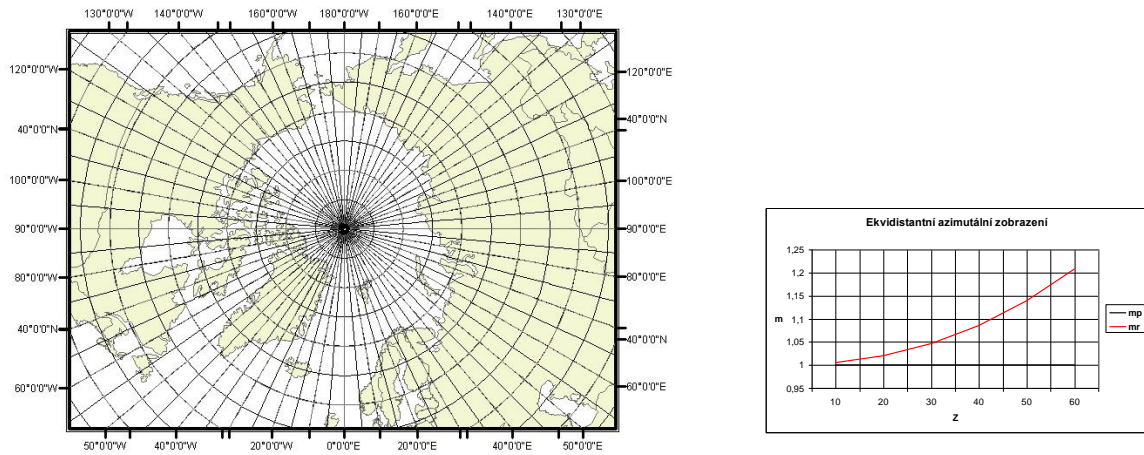
$$m_p = 1 \quad (8-8)$$

$$m_r = m_{pl} = \frac{Z}{\sin Z} \quad (8-9)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z} \quad (8-10)$$

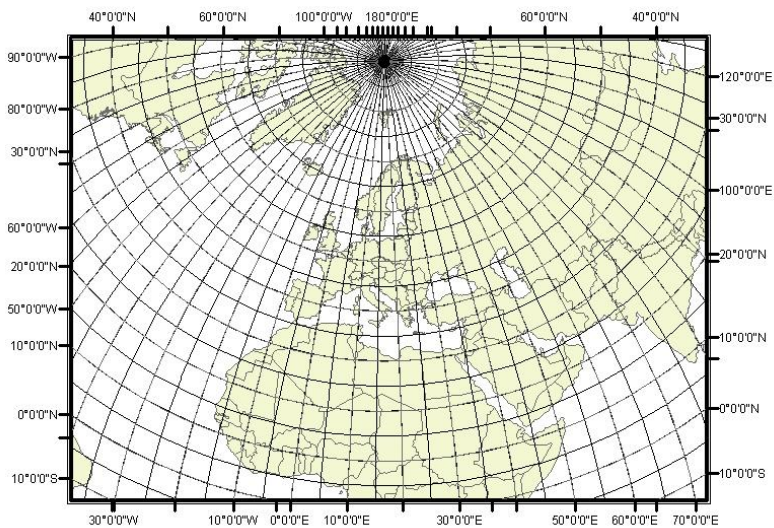
Význam zobrazení spočívá v zachování skutečné vzdálenosti od pólu zobrazení k libovolnému bodu v zobrazovaném prostoru. Proto se toto zobrazení často používá tam, kde je nutné rychlé zjišťování vzdáleností od pozorovacího místa, a to jak ve vojenských, tak i v civilních aplikacích (např. displeje radiolokátorů, apod.). Stejně tak se toto zobrazení velmi

často používá pro mapy polárních oblastí. Příklad takové mapy pro oblast severního pólu je uveden na obrázku (Obr. 8-2).



Obr. 8-2 Ekvidistantní azimutální zobrazení pro oblast severního pólu a graf zkreslení v rovnoběžkách a polednicích

Zobrazení se často používá i v obecné poloze, v níž se zobrazují kartografické poledníky jako polopřímky vycházející z obrazu kartografického pólu a kartografické rovnoběžky jakou soustředné kružnice. Obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou však složité křivky (Obr. 8-3).



Obr. 8-3 Ekvidistantní azimutální zobrazení kartografickým pólem v Brně ($U_k = 49^\circ 12'$, $V_k = 16^\circ 36'$)

Varianta zobrazení je doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0 . V tomto případě je nutné stanovit podmínku nezkreslené rovnoběžky aplikací rovnice (8-9) zavedením redukční konstanty c :

$$m_{r_0} c = 1$$

pro

$$m_{r_0} = \frac{Z_0}{\sin Z_0}$$

Odtud:

$$c = \frac{\sin Z_0}{Z_0} \quad (8-11)$$

Zobrazovací rovnice pro ρ (8-7) potom bude ve tvaru:

$$\rho = cRZ \quad (8-12)$$

Rovnice zkreslení po úpravách vztahů (8-8), (8-9) a (8-10) budou ve tvarech:

$$m_p = c \quad (8-13)$$

$$m_r = \frac{cZ}{\sin Z} \quad (8-14)$$

$$m_{pl} = \frac{c^2 Z}{\sin Z} \quad (8-15)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z} \quad (8-16)$$

Vzhledem k rovnici (8-13) je zřejmé, že se v tomto případě jedná o zobrazení s konstantně zkreslenými poledníky.

8.3 Ekvivalentní azimutální zobrazení

Základní rovnice ekvivalentního azimutálního zobrazení se odvodí ze vztahu:

$$m_p m_r = 1,$$

odtud

$$\frac{d\rho}{RdZ} \frac{\rho}{R\sin Z} = 1$$

Uvedená rovnice se opět integruje ve stejných mezích jako ekvidistantní zobrazení:

$$\int_0^\rho \rho d\rho = R^2 \int_0^Z \sin Z dZ$$

Po integraci se vypočte:

$$\frac{\rho^2}{2} = R^2 (1 - \cos Z)$$

S uvážením obecného vztahu:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

se první zobrazovací rovnice může vyjádřit i vztahem:

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2} \quad (8-17)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude opět ve tvaru (8-2), tedy:

$$\varepsilon = V$$

Délkové zkreslení v rovnoběžkách se vyjádří vztahem (8-4). Pokud se za ρ dosadí výraz (8-17), potom lze psát:

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{2R \sin \frac{Z}{2}}{R \sin Z}$$

S uvážením obecného vztahu:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

lze po úpravách psát:

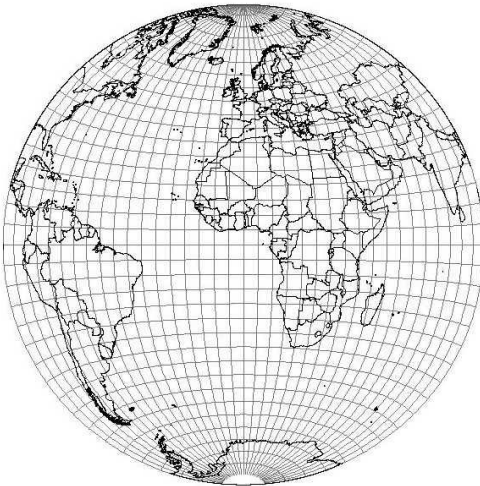
$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{1}{\cos \frac{Z}{2}} \quad (8-18)$$

Plošné a úhlové zkreslení budou potom ve tvarech:

$$m_{pl} = 1 \quad (8-19)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{Z}{2}}{1 + \cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-20)$$

Příklad zobrazení pro pól na rovníku je na obrázku (Obr. 8-4)



Obr. 8-4 Ekvivalentní azimutální zobrazení ($U_0=0^\circ$, $V_0=0^\circ$) a graf zkreslení v rovnoběžkách a polednicích

Z charakteru zobrazení je zřejmé, že hlavní délkové měřítko, které je uváděné na mapě používající toto zobrazení, platí pouze ve středu zobrazení. Proto se někdy volí varianta zobrazení s jednou nezkrácenou rovnoběžkou Z_0 . V tomto případě potom vzniká zobrazení s konstantním zkreslením ploch. Původní délkové zkreslení na této rovnoběžce je:

$$m_{r_0} = \frac{1}{\cos \frac{Z_0}{2}}$$

Aby bylo rovno jedné, je nutné zavést konstantu c . Potom:

$$m_{r_0} c = 1$$

a odtud

$$c = \cos \frac{Z_0}{2} \quad (8-21)$$

Zobrazovací rovnice a zákony zkreslení dané rovnicemi (8-17) až (8-20) budou potom mít tvar:

$$\rho = 2cR \sin \frac{Z}{2} \quad (8-22)$$

$$m_r = \frac{c}{\cos \frac{Z}{2}} \quad (8-23)$$

$$m_p = c \cos \frac{Z}{2} \quad (8-24)$$

$$m_{pl} = c^2 \quad (8-25)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{Z}{2}}{1 + \cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-26)$$

Ekvivalentní azimutální zobrazení, nazývané též *Lambertovo*, je často používáno při zobrazování velkých územních celků na jedné mapě. Znamé je například jeho použití při zobrazení zemských polokoulí ve školních zeměpisných atlasech (viz Obr. 8-4) s cílem zachovat poměry ploch jednotlivých kontinentů.

8.4 Konformní azimutální zobrazení

Zobrazovací rovnice konformního zobrazení se odvodí z podmínky:

$$m_p = m_r$$

kdy po dosazení rovnic zkreslení bude:

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\rho}{R \sin Z}$$

Vzhledem k tomu, že ρ a Z nabývají i nulových hodnot, výraz se integruje neurčitým integrálem:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{dZ}{\sin Z}$$

Po integraci se obdrží:

$$\ln \rho = \ln \operatorname{tg} \frac{Z}{2} + \ln c$$

Po odlogaritmování se získá první zobrazovací rovnice ve tvaru:

$$\rho = \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} \quad (8-27)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude opět ve tvaru (8-2), tedy:

$$\varepsilon = V$$

Zákony zkreslení budou potom mít tvar:

$$m = \frac{c}{2R \cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-28)$$

$$m_{pl} = m^2 \quad (8-29)$$

$$\Delta\omega = 0 \quad (8-30)$$

Hodnota parametru c se určí z doplňujícího požadavku na délkové zkreslení. Obecně lze stanovit, že *rovnoběžka Z_0 se nebude délkově zkreslovat*. Pro ni platí:

$$m_{r_0} = 1$$

tedy

$$\frac{\rho_0}{R \sin Z_0} = 1$$

Pokud se dosadí za ρ_0 výraz (8-27), a opět využije se obecný vztah

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

potom lze psát:

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{Z_0}{2}}{2R \sin \frac{Z_0}{2} \cos \frac{Z_0}{2}} = 1$$

Odtud:

$$c = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2} \quad (8-31)$$

Rovnice (8-27) a (8-28) potom budou mít tvar:

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2} \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad (8-32)$$

$$m = \frac{\cos^2 \frac{Z_0}{2}}{\cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-33)$$

V případě požadavku na nezkreslený pól ($Z_0=0^\circ$), rovnice (8-31), (8-32) a (8-33) budou ve tvaru:

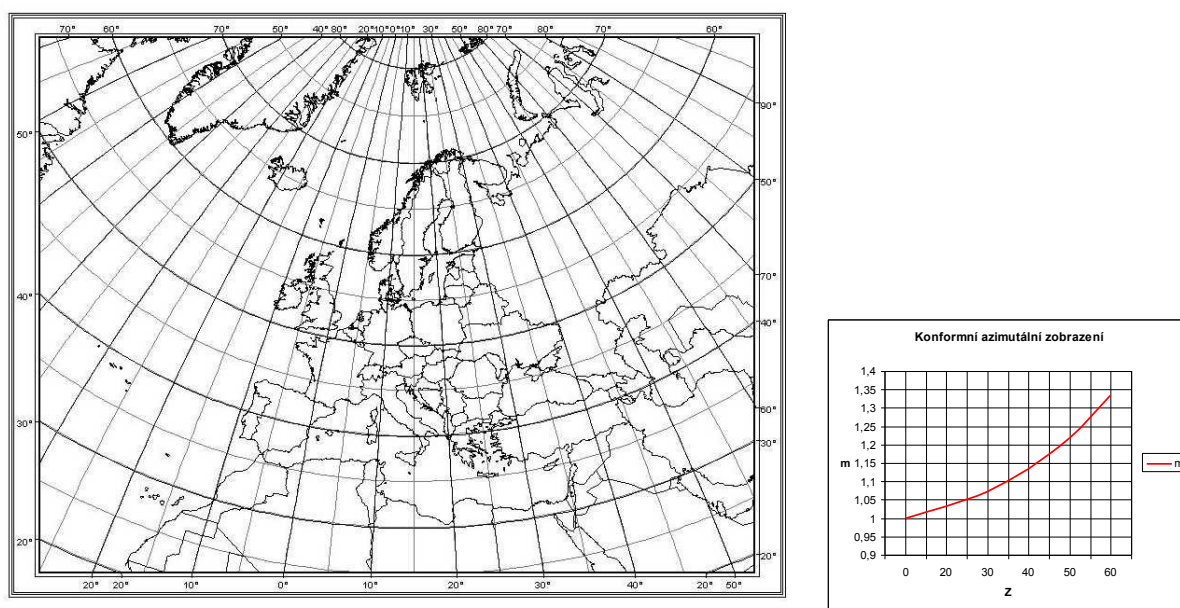
$$c = 2R \quad (8-34)$$

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad (8-35)$$

$$m = \frac{1}{\cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-36)$$

Poznámka: Místo stanovení hodnoty nezkreslené rovnoběžky se někdy používá přímo hodnota délkového zkreslení na pólu, často nazývaná *měřítkový faktor*. Tento postup je například použit při definování zobrazení UPS (*Universal Polar Stereographic*). Blíže viz. odstavec 12.2

Ukázka konformního azimutálního zobrazení je na obrázku (Obr. 8-5).



Obr. 8-5 Konformní azimutální zobrazení ($U_0=50^\circ$, $V_0=15^\circ$) a graf zkreslení v rovnoběžkách

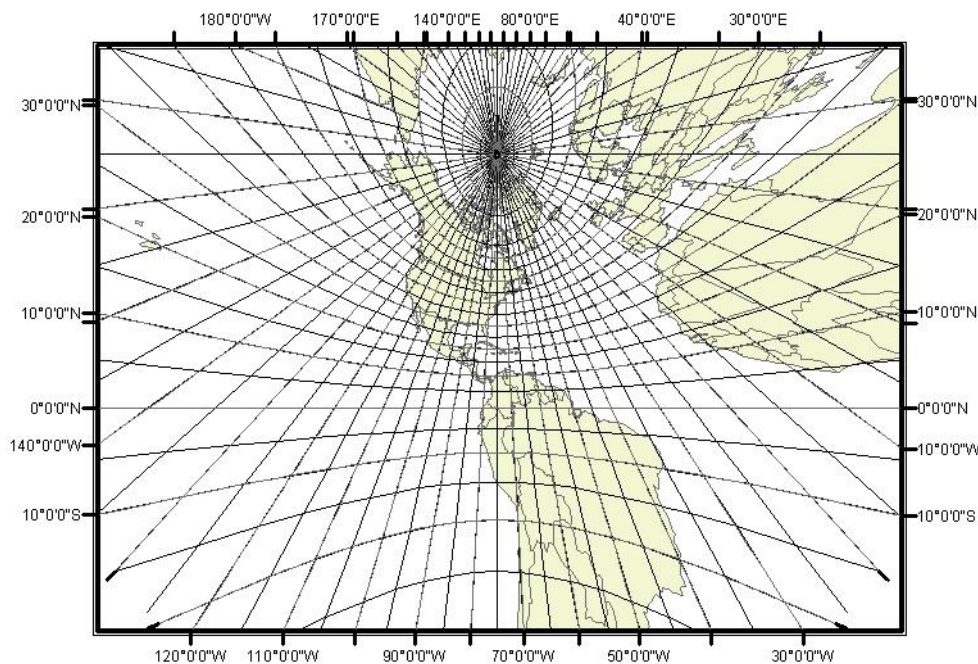
8.5 Azimutální projekce

Ve skupině azimutálních zobrazení jsou někdy využívány i postupy *odvozování rovinných souřadnic na základě geometrických principů – projekcí*. Tyto postupy nejsou v současné době využívány u válcových a kuželových zobrazení, proto v příslušných kapitolách nebyly uváděny.

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^3 Z} \quad (8-42)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} \quad (8-43)$$

Gnomonická projekce je charakteristická tím, že všechny *ortodromy* se zobrazují jako *přímky*. Ortodromy jsou na kouli hlavními kružnicemi vzniklými jako řezy rovin jdoucích středem koule. Z toho důvodu je zřejmé, že průsečnice dvou rovin (roviny ortodromy a průmětny) může být pouze přímka. Ukázka gnomonické projekce je na obrázku (Obr. 8-8)



Obr. 8-8 Ukázka gnomonické projekce, poloha pólu: $U = 40^\circ\text{s.š.}$, $V = 75^\circ\text{z.d.}$

8.5.2 Stereografická projekce

Stereografická projekce vznikne, umístí-li se projekční centrum do protilehlého bodu referenční koule (viz Obr. 8-9). Konstanta C potom bude rovna poloměru koule R .

Pokud hodnota konstanty C bude dosazena do zobrazovacích rovnic a rovnic zkreslení, potom se získají následující vztahy:

$$\rho = \frac{2R \sin Z}{1 + \cos Z} = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad (8-44)$$

$$\varepsilon = V \quad (8-45)$$

$$m_p = m_r = \frac{2}{1 + \cos Z} = \frac{1}{\cos^2 \frac{Z}{2}} \quad (8-46)$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^4 \frac{Z}{2}} \quad (8-47)$$

$$\Delta\omega = 0 \quad (8-48)$$

Srovnají-li se vztahy (8-44) až (8-48) se vztahy pro konformní azimutální zobrazení v odstavci, potom je patrné, že rovnice jsou stejné. Stereografická projekce je tedy zároveň i konformním zobrazením a toto zobrazení lze tudíž odvozovat jak matematickou, tak i geometrickou cestou.

8.5.3 Ortografická projekce

Ortografická projekce vzniká promítáním z nekonečna, parametr C je tedy ∞ . Princip projekce je zřejmý z obrázku (Obr. 8-10), ze kterého je možné psát ihned zobrazovací rovnice:

$$\rho = R \sin Z \quad (8-49)$$

$$\varepsilon = V$$

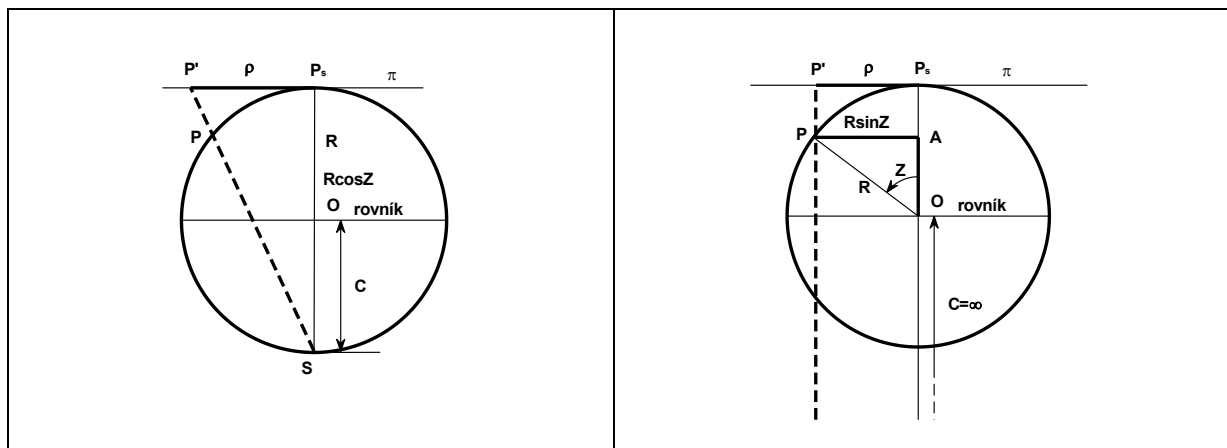
Zákony zkreslení nabývají po úpravách tvarů:

$$m_p = m_{pl} = \cos Z \quad (8-50)$$

$$m_r = 1 \quad (8-51)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} \quad (8-52)$$

Z rovnic zkreslení je zřejmé, že ortografická projekce je současně *ekvidistantním azimutálním zobrazením v rovnoběžkách*, jehož zobrazovací rovnice lze odvodit i matematickou cestou.



Obr. 8-9 Stereografická projekce

Obr. 8-10 Ortografická projekce

9. Nepravá zobrazení

Nepravá zobrazení jsou charakteristická tím, že zachovávají některé vlastnosti jednoduchých zobrazení, zejména tvary zeměpisných rovnoběžek. Jiné jejich charakteristiky však mění a tyto změny se potom odrážejí do tvarů zeměpisných poledníků.

Nepravá zobrazení mají jednu zobrazovací rovnici funkcí obou souřadnic na referenční ploše. Proto nelze jejich zobrazovací rovnice odvozovat obdobně jako u jednoduchých zobrazení. Stejně tak hlavní paprsky zkreslení neleží ve směrech poledníků a rovnoběžek a úhel mezi obrazy poledníků a rovnoběžek není pravý.

Vznik nepravého zobrazení si není možné představit prostorovým promítáním koule na plášť válce či kužele nebo přímo do roviny. Nepravá zobrazení se vždy odvozují matematickou cestou podle zadaných podmínek nebo, a to poměrně často, jsou definována *konstrukčním návodem*.

Poznámka: Název *nepravá zobrazení* je používán pro tuto třídu zobrazení poměrně často, přesto se lze setkat i s jinými názvy, například *pseudozobrazení*, *pazobrazení* apod. Při užití zobrazení je navíc vhodné a praktické znát *název* zobrazení. Zejména při použití programových nástrojů obsažených v různých projektech bez znalosti názvu zobrazení se někdy pouze obtížně vybírá odpovídající typ zobrazení.

Nepravá zobrazení se často využívají pro zobrazování velkých územních celků v malém měřítku až po zobrazení celého světa na jednom mapovém listě, takzvané *planisféry*. Z tohoto důvodu se většina zobrazení používá v pólové poloze s referenční koulí jako náhradní plochou. Výjimečně jsou tato zobrazení používána v rovníkové nebo šikmé poloze. V tomto případě je nutné v zobrazovacích rovnicích nahradit zeměpisné souřadnice souřadnicemi kartografickými.

9.1 Nepravá válcová zobrazení

Nepravá válcová zobrazení jsou definována zobrazovacími rovnicemi (9-1) (viz. kapitola 2):

$$\begin{aligned}x &= f(U) \\y &= f(U, V)\end{aligned}\tag{9-1}$$

Vzhledem ke tvaru obecných zobrazovacích rovnic je zřejmé, že se rovnoběžky zobrazují jako soustava rovnoběžných přímek s obrazem rovníku, zatímco tvar poledníků budou křivky symetrické k obrazu základního poledníku. Základní poledník je volen jako střední poledník zobrazovaného prostoru a jsou od něho odečítány hodnoty zeměpisné délky. Osa *X* se ztotožňuje s obrazem tohoto poledníku. Osa *Y* se ztotožňuje s obrazem rovníku.

Podle tvaru obrazů poledníků se zpravidla rozlišují zobrazení *sinusoidální*, *eliptická*, *kruhová*, *přímková atd.*

Rovnice zkraslení lze odvodit z obecných rovnic uvedených v kapitole 3. Jejich aplikací se pro zobrazovací rovnice (9-1) nejprve vyjádří Gaussovy koeficienty:

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)^2 \\
 F &= \frac{\partial y}{\partial U} \frac{\partial y}{\partial V} \\
 G &= \left(\frac{\partial y}{\partial V} \right)^2 \\
 H &= \frac{\partial x}{\partial U} \frac{\partial y}{\partial V}
 \end{aligned} \tag{9-2}$$

a s jejich pomocí potom i vlastní obecné rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{R} \tag{9-3}$$

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{R \cos U} \tag{9-4}$$

$$m_{pl} = \frac{H}{R^2 \cos U} \tag{9-5}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p^2 + m_r^2}{m_{pl}} - 2} \tag{9-6}$$

9.1.1 Nepravá válcová sinusoidální zobrazení

V těchto zobrazeních se poledníky zobrazují jako části sinusoid. Zeměpisné póly se zpravidla zobrazují jako úsečky s výjimkou *Mercator - Sansonova zobrazení*, v němž se zeměpisné póly zobrazují jako bod. Nejznámější jsou zobrazení *Mercator – Sansonovo a Eckertovo*. Další zobrazení odvozoval zejména *Kavrajiskij a Urmajev*. Popis těchto zobrazení zde není uveden, je však možné je nalézt například v ([15] nebo [9]).

9.1.1.a Mercator-Sansonovo (Flamsteedovo) zobrazení

Mercator-Sansonovo zobrazení je definováno jako *ekvidistantní* v rovnoběžkách s nezkresleným základním poledníkem a současně jako *ekvivalentní*. Toto zobrazení odvodil *Mercator*, prvně použil Francouz *Nicalus Sanson (1600 – 1667)* a později jej aplikoval i *Flasteed (John Flamsteed, 1646 – 1719)*, kterému je někdy připisováno i spoluautorství.

První podmínku je možné vyjádřit rovnicí:

$$m_r = \frac{\frac{\partial y}{\partial V}}{R \cos U} = 1$$

z čehož plyne výraz:

$$\frac{\partial y}{\partial V} = R \cos U \tag{9-7}$$

který se pro konstantní U po úpravě integruje:

$$\int_0^y dy = R \cos U \int_0^V dV$$

Po integraci se obdrží zobrazovací rovnice (9-8):

$$y = RV \cos U \quad (9-8)$$

Druhá zobrazovací rovnice se odvodí z podmínky nezkreslení ploch s využitím výrazu (9-5). Platí:

$$m_{pl} = 1$$

$$H = R^2 \cos U$$

tedy

$$\frac{\partial x}{\partial U} \frac{\partial y}{\partial V} = R^2 \cos U \quad (9-9)$$

Dosadí-li se do výrazu (9-9) výraz (9-7), potom se po úpravě obdrží:

$$\frac{\partial x}{\partial U} = R \quad (9-10)$$

Integrací výrazu (9-10) se získá první zobrazovací rovnice (9-11):

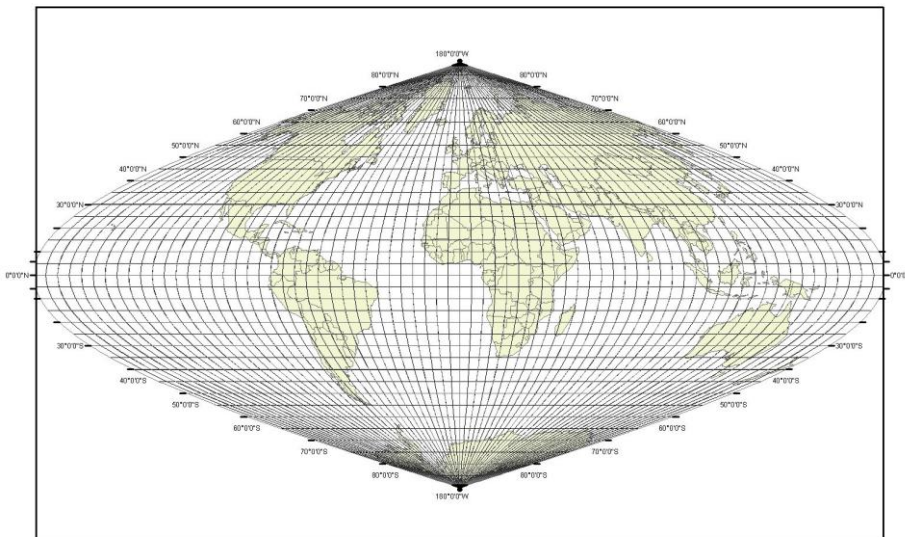
$$\begin{aligned} x &= RU \\ y &= RV \cos U \end{aligned} \quad (9-11)$$

Z tvaru zobrazovacích rovnic vyplývá, že obrazem pólů jsou body a že vzdálenost obrazů rovnoběžek je konstantní (Obr. 9-1). Současně je z první rovnice zřejmé, že základní poledník zůstává délkově nezkreslen a je tudíž splněna i třetí podmínka.

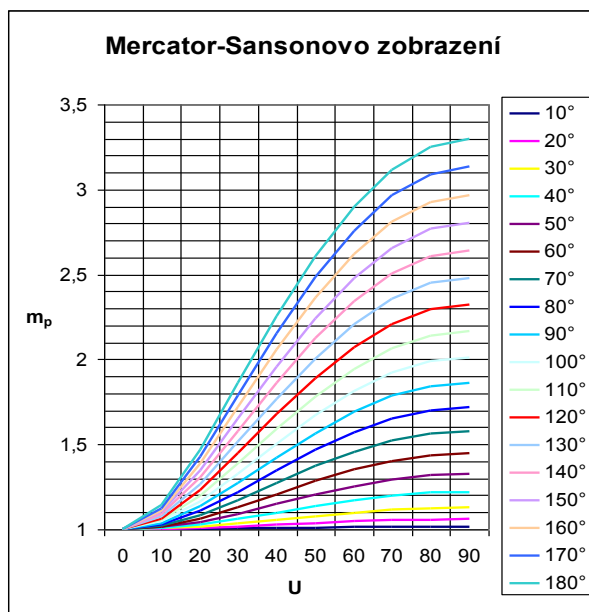
Z tvaru zobrazovacích rovnic je možné odvodit i všechny rovnice zkreslení:

$$\begin{aligned} m_p &= \sqrt{1 + \sin^2 UV^2} \\ m_r &= 1 \\ m_{pl} &= 1 \\ \operatorname{tg} \frac{\Delta\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sin U \sqrt{V} \end{aligned} \quad (9-12)$$

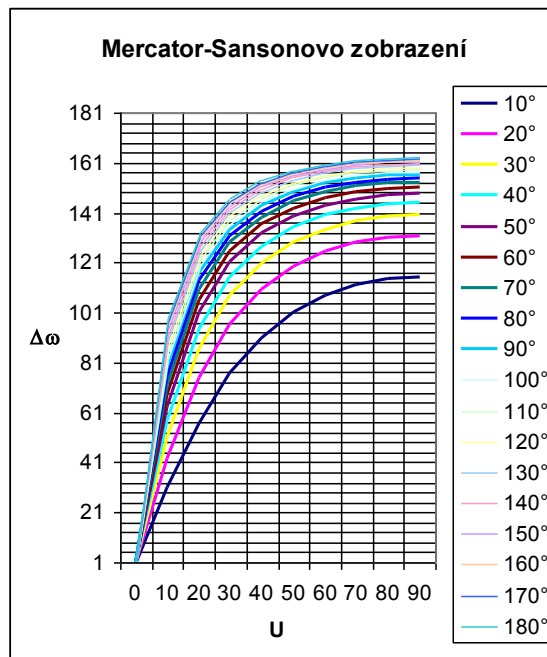
Na grafech (Obr. 9-2, Obr. 9-3) je průběh délkového zkreslení v polednicích a úhlového zkreslení. Oba grafy zobrazují pouze jeden kvadrát celé planisféry. Zbývající tři kvadráty mají zkreslení symetrická podle základního poledníku a rovnoběžky. Tatož vlastnost je i ostatních nepravých válcových zobrazení.



Obr. 9-1 Mercator-Sansonovo zobrazení, základní poledník 0°



Obr. 9-2 Graf délkového zkreslení v polednicích Mercator-Sansonova zobrazení



Obr. 9-3 Graf hodnot maximálního úhlového zkreslení Mercator-Sansonova zobrazení

9.1.1.b Eckertovo sinusoidální zobrazení

U Mercator-Sansonova zobrazení dochází ke značným úhlovým zkreslením zejména ve vyšších hodnotách zeměpisné šířky (viz Obr. 9-3). Tuto nevýhodu se snažil odstranit německý kartograf *Max Eckert* (1868 – 1938). Navrhl zobrazení, v němž jsou póly zobrazeny úsečkami stejné délky jako základní poledník a současně poloviční délky obrazu rovníku. Přitom zobrazení navrhl jako ekvivalentní tak, že plošný obsah celého obrazu Země je stejný jako plocha zobrazované referenční koule o poloměru R .

Odvození zobrazovacích rovnic je poměrně složité, a proto jsou dále uvedeny pouze jejich konečné vztahy. Celé odvození je uvedeno například v [15]. Zobrazovací rovnice mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} U' \\
 Y &= \frac{2R}{\sqrt{\pi+2}} v \cos^2 \frac{U'}{2} \\
 \sin U' + U' &= \frac{\pi+2}{2} \sin U
 \end{aligned}
 \tag{9-13}$$

Upravenou zeměpisnou šířku ve vztahu (9-13) je nutné řešit postupnou aproximací. Někdy je však vhodné výraz pro výpočet U' nahradit Newton-Raphsonovou iterací ve tvaru:

$$\Delta U' = - \frac{\left[U' + \sin U' - \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \sin U \right]}{1 + \cos U'}
 \tag{9-14}$$

Rovnice zkreslení potom nabývají tvaru:

$$m_p = \frac{\sqrt{\pi + 2 \cos U'}}{2 \cos^2 \frac{U'}{2} \cos \varepsilon}$$

$$m_r = \frac{2 \cos^2 \frac{U'}{2}}{\sqrt{\pi + 2 \cos U'}} \quad (9-15)$$

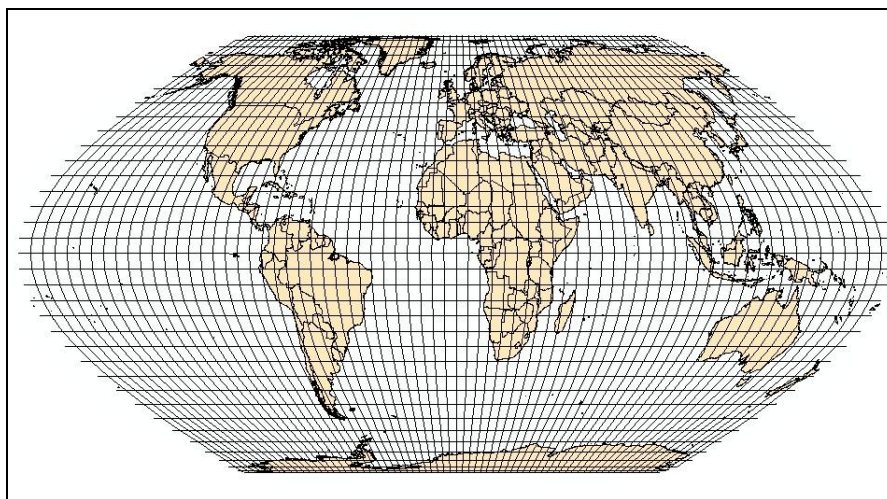
$$m_{pl} = m_p m_r \cos \varepsilon = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m_p^2 + m_r^2 - 2}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{V}{2} \sin U'$$

Ukázka Eckertova sinusoidálního zobrazení je na následujícím obrázku (Obr. 9-4).

Poznámka: Max Eckert kromě zde uvedeného zobrazení, označováno jako Eckert VI, navrhl ještě dalších pět nepravých válcových zobrazení pro mapu celého světa zobrazeného na jednom mapovém listě označených Eckert I (přímkové zobrazení), Eckert II (přímkové ekvivalentní zobrazení), Eckert III (eliptické zobrazení), Eckert IV (eliptické ekvivalentní zobrazení), Eckert V (sinusoidální zobrazení). Při jejich aplikaci, zejména v prostředí nástrojů GIS, je nezbytné věnovat pozornost jejich charakteru a matematickému vyjádření.



Obr. 9-4 Eckertovo pseudoválcové sinusoidální ekvivalentní zobrazení, $V_0=0^\circ$

9.1.2 Nepravá válcová eliptická zobrazení

U nepravých válcových eliptických zobrazení se obrazy poledníků zobrazují jako části elips, případně i kružnic. Nejznámějším zobrazením je *Mollweidovo*, v literatuře je možné nalézt i další, například *Ecertovo*, *Kavrajského*, *Apiano* nebo *Loritzovo*.

9.1.2.a Mollweidovo zobrazení

Německý matematik *Karl Brandan Mollweide* (1774 – 1825) odvodil zobrazení, které je pseudocylindrické ekvivalentní s poledníky ve tvaru elips. Celá Země je zobrazena do elipsy s poloosami v poměru $a : b = 1 : 2$, poledníky $V = \pm 90^\circ$ zobrazí jako kružnice o poloměru $\rho = b = R\sqrt{2}$. Vlastní zobrazovací rovnice vycházejí z parametrických rovnic elipsy, jimiž jsou vyjádřeny poledníky:

$$x = R\sqrt{2} \sin \alpha \quad (9-16)$$

$$y = \frac{2RV\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha \quad (9-17)$$

kde α je počítána postupnou aproximací podle tvaru (9-18) nebo je vyhledávána v tabulkách.

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin U \quad (9-18)$$

Rovnice (9-18) může v některých případech konvergovat pomalu, proto s výjimkou pólových oblastí je možné opět využít Newton-Raphsonovu iteraci, zde ve tvaru:

$$\Delta\alpha' = \frac{-(\alpha' + \sin \alpha' - \pi \sin U)}{1 + \cos \alpha'} \quad (9-19)$$

a výsledný úhel α se potom vypočítá jako

$$\alpha = \alpha'/2 \quad (9-20)$$

Zákony zkreslení nabývají tvaru:

$$m_p = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos U \sec \alpha \sec \tau, \text{ kde}$$

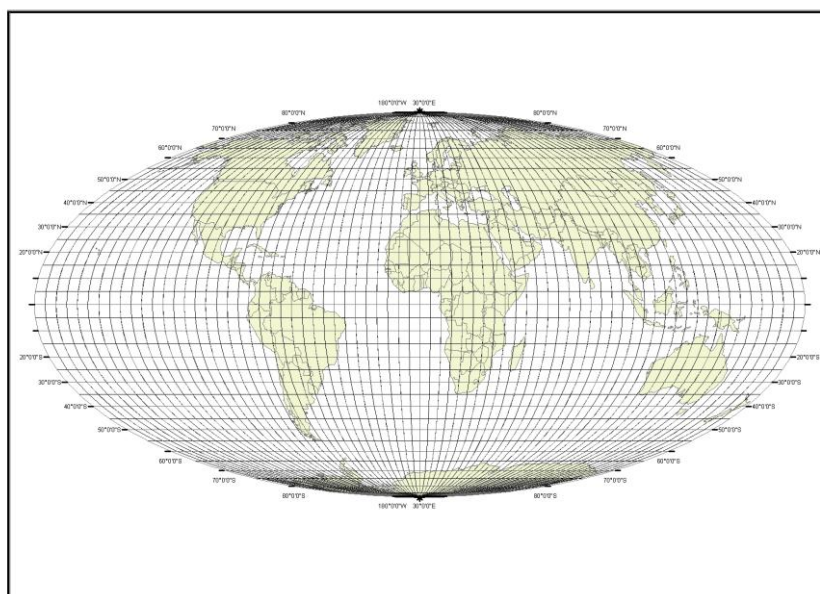
$$\tau = \frac{2V}{\pi} \operatorname{tg} \alpha$$

$$m_r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sec U \cos \alpha \quad (9-21)$$

$$m_{pl} = 1$$

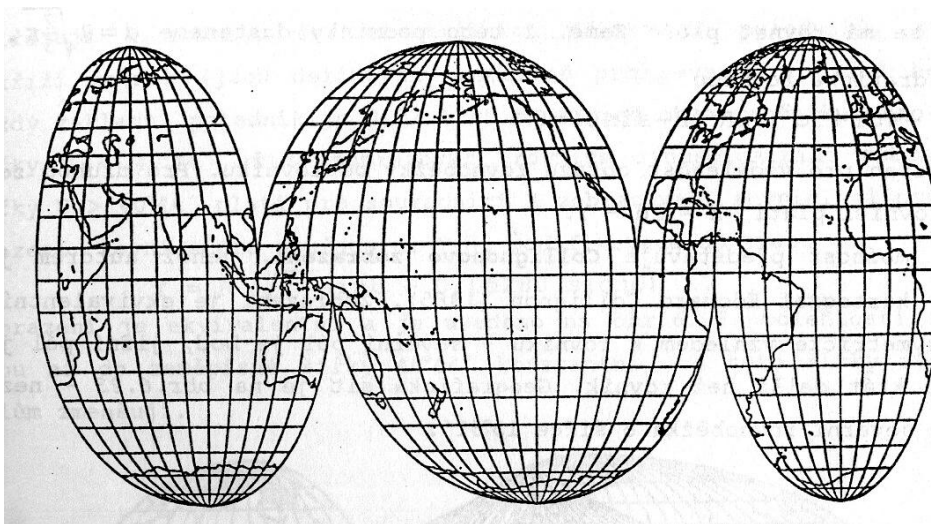
$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m_p^2 + m_r^2} - 2$$

Ukázka Mollweidova zobrazení se základním poledníkem 0° je na obrázku (Obr. 9-5).



Obr. 9-5 Mollweidovo zobrazení se základním poledníkem 0°

V Mollweidově zobrazení se pól zobrazí jako bod. Ve velkých zeměpisných šířkách a v blízkosti krajních poledníků dochází ke značnému zkreslení. Tuto nevýhodu se pokusil řešit americký kartograf *John Paul Goode*, který uvedené zobrazení použil pro konstrukci mapy celé Země tak, že jím zobrazil pouze ucelené části povrchu, jednotlivé kontinenty nebo oceány. Jednotlivé části jsou spojené na rovníku (Obr. 9-6). Uvedenou úpravou jsou vyloučené části sítě s velkým zkreslením, avšak nezíská se souvislý obraz Země. *Goodovu úpravu* je možné aplikovat i na jiná nepravá válcová zobrazení.



Obr. 9-6 Mollweidovo zobrazení v Goodově úpravě pro zobrazení oceánů (převzato z [9])

Poznámka: Obdobnou úpravu je možné provést i pro jiná nepravá válcová zobrazení, poměrně často jsou takto řešena různá *Eckertova* zobrazení.

9.2 Nepravá kuželová zobrazení

Základní rovnice nepravých kuželových zobrazení v pólové poloze jsou vyjádřeny vztahy (9-22):

$$\begin{aligned}\rho &= f(U) \\ \varepsilon &= f(U, V)\end{aligned}\quad (9-22)$$

Vzhledem k jejich tvaru je zřejmé, že obrazem rovnoběžek budou obdobně jako u jednoduchých kuželových zobrazení části kružnice se společným, pevným, středem. Poledníky však budou křivky různého druhu.

Zákony zkreslení se odvodí aplikací rovnic pro výpočet Gaussových symbolů při užití polárních souřadnic uvedených v kapitole *Zákony zkreslení*. Vzhledem k zobrazovacím rovnicím (9-22) budou mít rovnice pro výpočet těchto symbolů následující tvary:

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2 \\
 F &= \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \\
 G &= \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)^2 \\
 H &= -\rho \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}
 \end{aligned}
 \tag{9-23}$$

Jednotlivá zkreslení je možné počítat stejnými rovnicemi jako u nepravých válcových zobrazení, tedy rovnicemi (9-3), (9-4), (9-5) a (9-6). Po dosazení tvarů uvedených Gaussových symbolů rovnice zkreslení budou:

$$m_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2}}{R} \tag{9-24}$$

$$m_r = \frac{\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)}{R \cos U} \tag{9-25}$$

$$m_{pl} = -\frac{\rho \frac{\partial \rho}{\partial U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}}{R^2 \cos U} \tag{9-26}$$

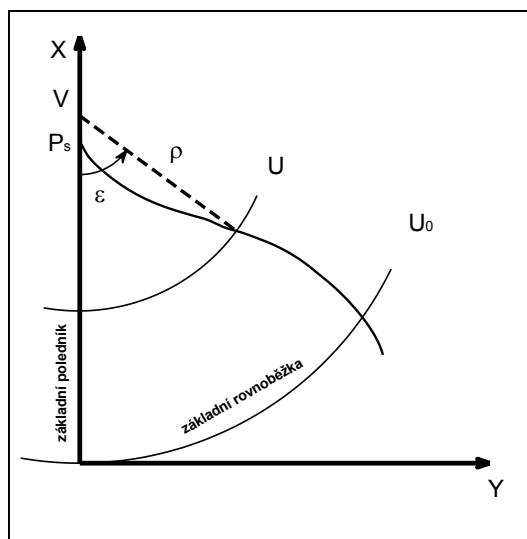
$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p^2 + m_r^2}{m_{pl}} - 2} \tag{9-27}$$

Obdobně jako u jednoduchých kuželových zobrazení se i zde volí jako *základní konstrukční poledník* poledník procházející středem zobrazovaného území, do jehož obrazu se vkládá osa X a od něhož jsou potom odečítány zeměpisné délky V . Počátek rovinného pravoúhlého systému souřadnic se volí v průsečíku tohoto poledníku a *základní rovnoběžky* procházející rovněž středem zobrazovaného území (Obr. 9-7). Transformace z polárních souřadnic na rovinné je opět stejná jako u jednoduchých kuželových zobrazení:

$$\begin{aligned}
 x &= x_v - \rho \cos \varepsilon \\
 y &= \rho \sin \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{9-28}$$

kde

$$x_v = \rho_0 = R \cot g U_0$$



Obr. 9-7 Princip nepravého kuželového zobrazení

9.2.1 Bonneovo nepravé kuželové zobrazení

Z nepravých kuželových zobrazení se v dřívější praxi uplatnilo zejména *Bonneovo* zobrazení (*Rigobert Bonne, 1727 – 1795*), kdy se používalo zejména pro mapy světadílů nebo větších států a případně i pro topografické mapy (například Francie, Švýcarsko apod.). Zobrazení je definováno jako *ekvidistantní v rovnoběžkách s nezkresleným základním poledníkem* V_0 .

Vzhledem k tvaru rovnice pro ρ , která je stejná jako u jednoduchého ekvidistantního kuželového zobrazení, bude první zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 - R(U - U_0) \quad (9-29)$$

Druhá zobrazovací rovnice se odvodí z podmínky nezkreslených rovnoběžek. Pro konstantní hodnotu U bude tedy platit:

$$m_r = \frac{\rho}{R \cos U} \frac{d\varepsilon}{dV} = 1$$

tedy:

$$d\varepsilon = \frac{R \cos U}{\rho} dV$$

Rovnice se integruje

$$\int_0^\varepsilon d\varepsilon = \frac{R \cos U}{\rho} \int_0^V dV$$

a řešením integrálu se obdrží druhá zobrazovací rovnice ve tvaru:

$$\varepsilon = \frac{R \cos U}{\rho} V \quad (9-30)$$

Derivací rovnic (7-12) a (9-30) podle U a V se získají výrazy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial U} = -R$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} = RV \left(-\frac{\sin U}{\rho} + \frac{R \cos U}{\rho^2} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = \frac{R \cos U}{\rho}$$

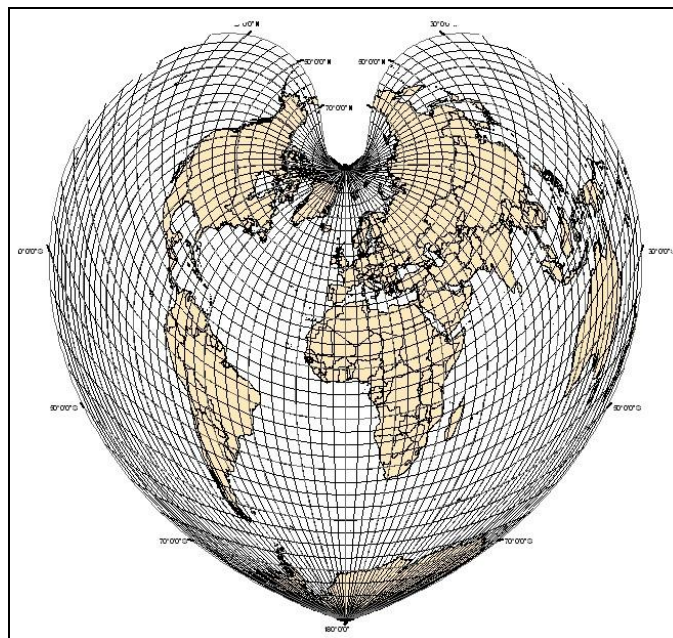
Po dosazení do (9-24), (9-26) a (9-27) bude:

$$m_p = \sqrt{1 + V^2 \left(\sin U - \frac{R \cos U}{\rho} \right)^2} \quad (9-31)$$

$$m_{pl} = 1 \quad (9-32)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m_p^2 - 1} \quad (9-33)$$

Z rovnice (9-32) je zřejmé, že Bonneovo zobrazení je současně zobrazením *ekvivalentním*. Ukázka zobrazení celého světa se základním poledníkem $V_0=0^\circ$ je na obrázku (Obr. 9-8).



Obr. 9-8 Ukázka Bonneova zobrazení, základní rovnoběžka $U_0 = 60^\circ$, základní poledník $V_0=0^\circ$

Mezním případem Bonneova zobrazení pro $U_0 = 90^\circ$ a $\rho_0 = 0$ je zobrazení *Werner-Stabovo* (viz 9.3.1).

9.3 Nepravá azimutální zobrazení

Mezi nepravá azimutální zobrazení se řadí zobrazení odvozená matematickou cestou, zobrazení vzniklá afinním promítání jednoduchých azimutálních zobrazení v rovníkové poloze nebo zobrazení vzniklá kombinací azimutálních zobrazení s válcovými či nepravými válcovými zobrazeními.

U nepravých azimutálních zobrazení v pólové poloze se kromě základního poledníku přímkově zobrazuje i poledník odkloněný od něho o 90° . V obrazech těchto poledníků se zpravidla umísťují osy X a Y rovinné pravoúhlé sítě.

Obecné zobrazovací rovnice a obecné tvary zákonů zkreslení jsou stejné jako u nepravých kuželových zobrazení (viz 9.2). Zobrazovací rovnice (9-22) musí být vždy formulovány tak, aby při libovolných hodnotách U zeměpisné délce $V = \pm 180^\circ$ odpovídal úhel $\varepsilon = \pm 180^\circ$. Pro transformaci polárních souřadnic ρ a ε na pravoúhlé se použijí vztahy (viz též kapitola Referenční plochy a souřadnicové soustavy):

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (9-34)$$

Obrazy rovnoběžek jsou i zde soustředné kružnice se společným středem, poledníky se zobrazují jako různé křivky, proto i zde nemohou tato zobrazení být definována jako konformní. Dále jsou uvedeny příklady nepravých azimutálních zobrazení.

9.3.1 Werner-Stabovo nepravé azimutální zobrazení

Johannes Werner (1468 - 1522) roku 1514 odvodil nepravé azimutální zobrazení, které lze uvažovat jako mezní případ Bonneova zobrazení, v němž se obraz zemského pólu ztotožňuje se středem rovnoběžkových kružnic (viz Obr. 9-9). V tomto případě pro $U_0 = 90^\circ$ bude $\rho_0 = 0$ a rovnice:

$$\rho = \rho_0 - R(U - U_0)$$

bude mít tvar:

$$\rho = RZ \quad (9-35)$$

kde $Z = 90^\circ - U$.

Dosazením uvedené rovnice do vztahu (9-30) se získá druhá zobrazovací rovnice:

$$\varepsilon = \frac{\cos U}{Z} V \quad (9-36)$$

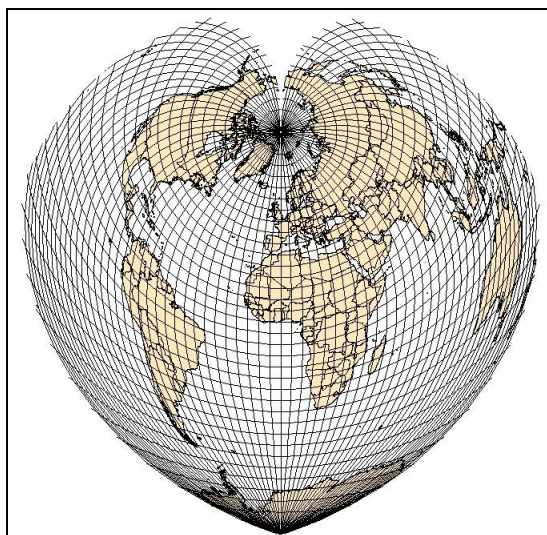
Zákony zkreslení budou obdobné jako u Bonneova zobrazení s tím, že místo U bude uvažován zenitový úhel Z . Po dosazení za ρ výrazu (9-35) budou mít tedy rovnice zkreslení tvar:

$$m_p = \sqrt{1 + V^2 \left(\sin Z - \frac{\cos Z}{Z} \right)^2} \quad (9-37)$$

$$m_r = m_{pl} = 1 \quad (9-38)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m_p^2 - 1} \quad (9-39)$$

Zobrazení je rovněž ekvivalentní a současně ekvidistantní v rovnoběžkách. Werner-Stabovo zobrazení prvně použil v roce 1517 *Johan Stab*, proto se jeho jméno objevuje v názvu zobrazení. Hojně se v 16. a 17. století používalo pro mapy kontinentů. Ukázka zobrazení celé planisféry je na obrázku (Obr. 9-9).



Obr. 9-9 Werner - Stabeovo zobrazení celého světa

Poznámka: Toto zobrazení bylo odvozeno dříve, než Bonneovo, kterým bylo později zpravidla nahrazeno.

9.3.2 Ginzburgovo zobrazení

Dalším typem nepravého azimutálního zobrazení je zobrazení s oválnými ekvideformátami nazývané *Ginzburgovo* podle sovětského kartografa *G.A.Ginzburga*, nazývané také někdy zobrazení *CNIIGAiK* (Centralnyj naučnoisledovatelskij institut geodézii, aerofotosjomky i kartografii) podle instituce, kde Ginzburg pracoval. Zobrazovací rovnice mají následující tvar:

$$\begin{aligned} \rho &= 3R \sin \frac{Z}{3} \\ \varepsilon &= V - C \left(\frac{Z}{Z_{\max}} \right)^q \sin 2V \end{aligned} \quad (9-40)$$

kde:

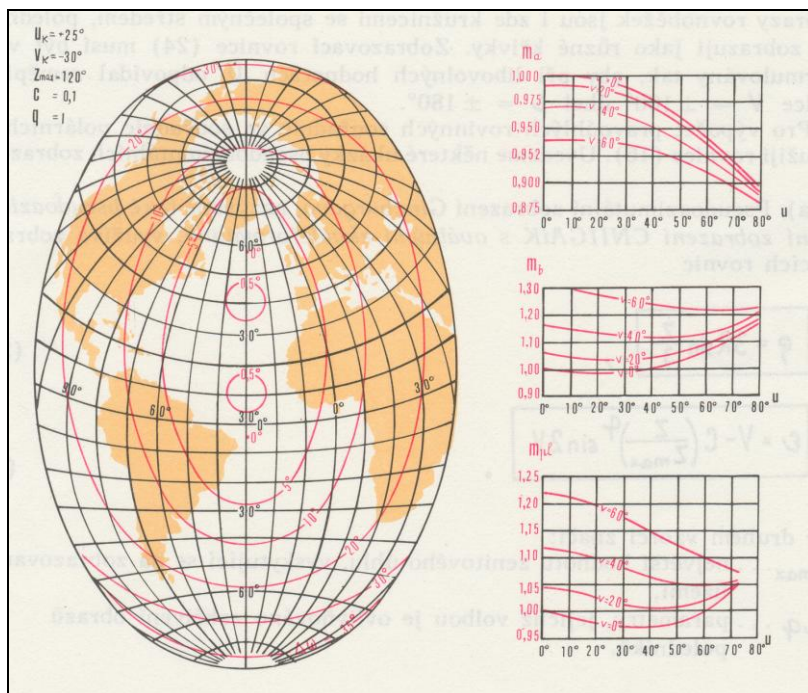
Z_{\max} je největší hodnota Z v zobrazovaném území,

C, q jsou parametry, jejichž volbou je ovlivňováno zakřivení obrazů poledníků.

Zákony zkreslení mají potom následující rovnice:

$$\begin{aligned} m_p &= \cos \frac{Z}{3} \sec \tau \\ \operatorname{tg} \tau &= \frac{3C}{Z_{\max}} \operatorname{tg} \frac{Z}{3} \sin 2V \\ m_r &= 3 \sin \frac{Z}{3} \cos ecZ \left(1 - 2C \frac{Z}{Z_{\max}} \cos 2V \right) \\ m_{pl} &= m_p m_r \cos \tau \\ \operatorname{tg} \frac{\Delta\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p^2 + m_r^2}{m_{pl}} - 2} \end{aligned} \quad (9-41)$$

Ukázka zobrazení části povrchu Země je na obrázku (Obr. 9-10). Vzhledem k obecné poloze zobrazení musely být nejdříve zeměpisné souřadnice převedeny na kartografické a teprve poté byly použity zobrazovací rovnice (9-40).



Obr. 9-10 Ukázka Ginzburgova zobrazení (převzato z [23])

9.3.3 Modifikovaná azimutální zobrazení

Od druhé poloviny 19. století vznikla řada zobrazení, které mají původ v jednoduchých zobrazení v příčné poloze. U těchto zobrazení se základní poledních a rovník zobrazují jako přímky, ostatní poledníky a rovnoběžky jako křivky. Póly se zobrazují jako body nebo křivky. Zobrazení jsou navrhována tak, aby byla vhodná pro zobrazení celého světa na jedné mapě – tzv. *planisféry*. Zobrazení vzhledem ke svému charakteru nikdy nemohou být konformní, často jsou však ekvivalentní.

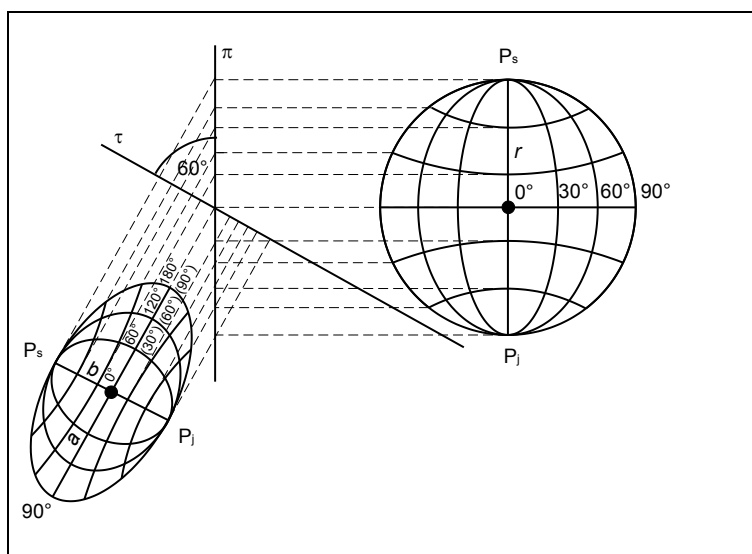
9.3.3.a Aitovovo nepravé azimutální zobrazení

Ruský kartograf David A. Aitov (též Aitoff, 1889) sestrojil afinní průmět *ekvidistantního azimutálního zobrazení v příčné poloze (Postelovo zobrazení)* na rovinu τ odkloněnou o 150° od roviny rovníku (o 60° od průmětny π) (viz Obr. 9-11). Rovník se v tomto zobrazení nezkrsluje a obrysová kružnice (pro poledníky $\Delta V = \pm 90^\circ$) se zobrazí jako obrysová elipsa celé Země (pro poledníky $\Delta V = \pm 180^\circ$). Základní poledník se zobrazí v poloviční délce. Číslování poledníků se nemění. Rovinné pravoúhlé souřadnice Postelova zobrazení se upraví tak, že se souřadnice y vynásobí dvěma a současně se dvěma dělí zeměpisné délky. Zobrazovací rovnice potom získají tvar:

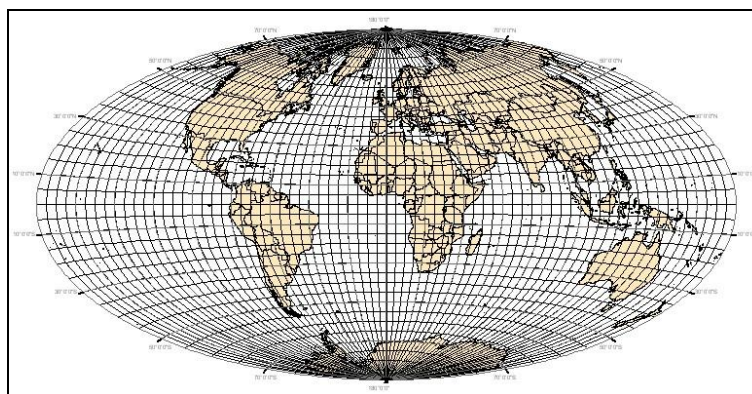
$$x = \rho \arccos \left(\cos U \cos \frac{\Delta V}{2} \right) \cos \varepsilon \quad (9-42)$$

$$y = 2R \arccos \left(\cos U \cos \frac{\Delta V}{2} \right) \sin \varepsilon$$

Zobrazení tímto postupem ztrácí ekvidistantnost, na okrajích mapy však zmenšuje zkreslení. Ukázka zobrazení je na obrázku (Obr. 9-12).



Obr. 9-11 Princip Aitovova zobrazení



Obr. 9-12 Aitovovo zobrazení světa

9.3.3.b Hammerovo zobrazení

Prof. *Ernest H.H. Hammer* užil téhož postupu jako Aitov pro zobrazení Lambertova jednoduchého ekvivalentního azimutálního zobrazení v rovníkové poloze. Zobrazení se po jeho autorovi nazývá *Hammerovo* nebo i *Hammer-Aitovovo*. Obrysová kružnice Lambertova zobrazení se transformuje do obrysově elipsy s poloosami:

$$a = 2R\sqrt{2}$$

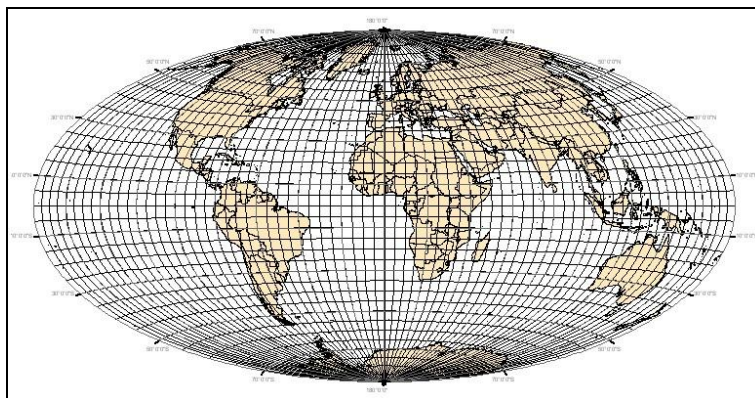
$$b = R\sqrt{2}$$

Poměr poloos $a:b$ je možné označit písmenem h . Tento poměr lze měnit a tím lze upravovat průběh zkreslení. Pokud je tento poměr 2:1, potom i Hammerovo zobrazení je *ekvivalentní*. Obecné rovnice zobrazení jsou:

$$x = \frac{2R \sin \dot{U}}{\sqrt{h} \sqrt{1 + \cos U \cos \frac{\Delta V}{2}}}$$

$$y = \frac{2R \sqrt{h} \cos U \sin \frac{\Delta V}{2}}{1 + \cos U \cos \frac{\Delta V}{2}}$$
(9-43)

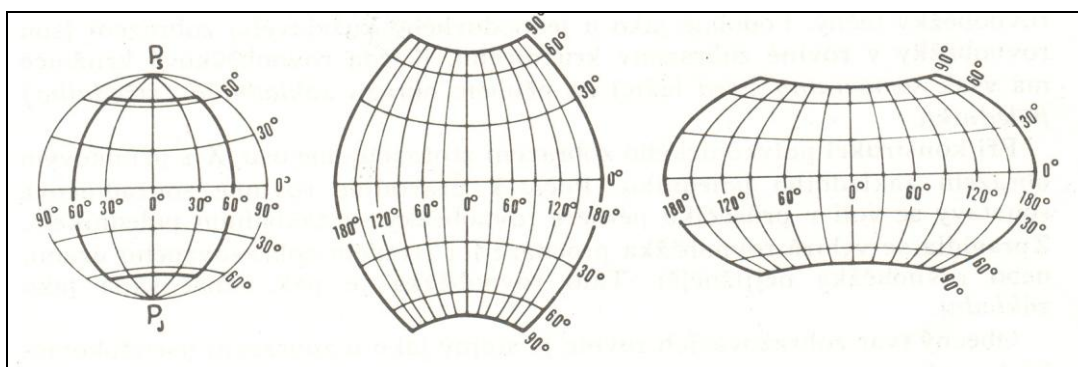
Ukázka zobrazení je na následujícím obrázku (Obr. 9-13)



Obr. 9-13 Hammer - Aitovovo zobrazení světa

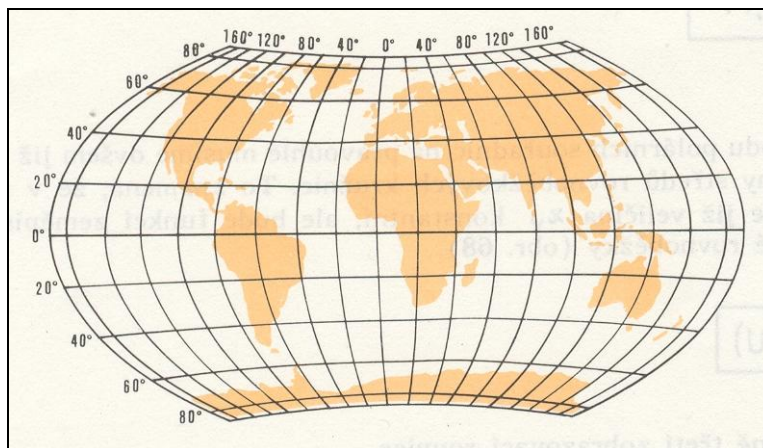
9.3.3.c Wagnerovo zobrazení

Zobrazení vznikají transformací jednoduchého azimutálního ekvivalentního zobrazení v rovníkové poloze a vhodným přečíslováním nejen poledníků, ale i rovnoběžek. Tento postup uplatnil například Wagner. Z původního zobrazení vyňal určitou část a formálně ji přečísloval tak, aby vyjadřovala povrch celé Země. Vyňatou část poté zvětšil tak, aby měla stejnou plochu jako referenční koule. Dále ji afinně transformoval vynásobením všech souřadnic y a dělením všech souřadnic x vhodnou konstantou. Wagner vytvořil celou řadu variant tohoto zobrazení. Na následujícím obrázku (Obr. 9-14) je postup vzniku sítě Wagnerova zobrazení pro vyňaté území omezené poledníky $V = \pm 60^\circ$ a rovnoběžky $U = \pm 65^\circ$.



Obr. 9-14 Postup vzniku sítě Wagnerova zobrazení (převzato z [23])

Obrázek (Obr. 9-15) potom představuje zobrazení celé Země.

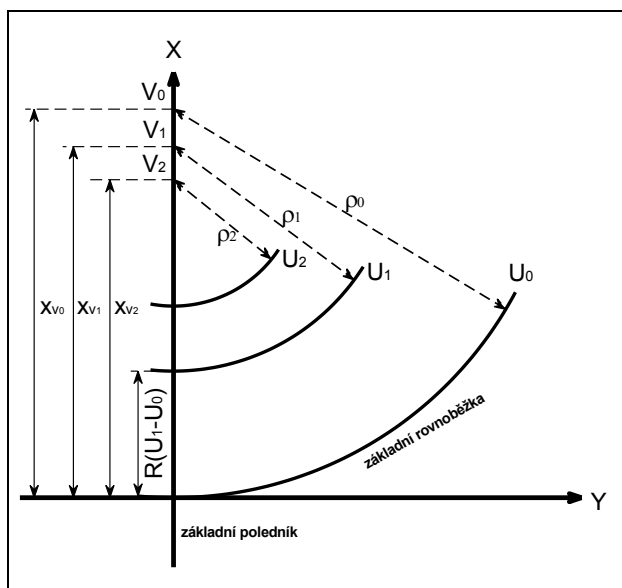


Obr. 9-15 Ukázka Wagnerova zobrazení pro mapu celé Země (převzato z [23])

9.4 Polykónická zobrazení

Polykónické zobrazení si lze představit jako *zobrazování na nekonečný počet kuželů*. Každá rovnoběžka je zobrazována na samostatný kužel, jenž je k referenční ploše v této rovnoběžce tečný. Podobně jako u jednoduchých kuželových zobrazení jsou i zde obrazy rovnoběžek kružnice. Každá kružnice má však samostatný střed ležící na obraze základního poledníku.

Základní poledník se zobrazuje jako přímka, ve které je vložena osa x . Jako *základní rovnoběžka* se zpravidla volí rovnoběžka procházející středem zobrazovaného území, případně i jeho nejnižší rovnoběžka (Obr. 9-16).



Obr. 9-16 Princip polykónických zobrazení

Obecný tvar zobrazovacích rovnic odpovídá obecnému tvaru zobrazovacích rovnic nepravého kuželového zobrazení, tedy:

$$\rho = f(U)$$

$$\varepsilon = f(U, V)$$

Pro převod polárních souřadnic do rovinných pravoúhlých se použijí vztahy (9-44) – viz i kapitola 1.

$$\begin{aligned}x &= x_v - \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\quad (9-44)$$

V uvedených rovnicích nebude veličina x_v konstantní, ale bude funkcí zeměpisné šířky zobrazované rovnoběžky. Lze tedy psát:

$$x_v = f(U) \quad (9-45)$$

a tato rovnice je v podstatě třetí zobrazovací rovnici.

Pro definování jednotlivých druhů zkreslení je vhodné použít Gaussovy symboly ve tvaru pro polární souřadnicové systémy (viz odstavec 3.1). V tomto případě symboly po úparavách nabudou tvaru:

$$E = \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \cos \varepsilon - \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \sin \varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2 \quad (9-46)$$

$$F = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \sin \varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right) \quad (9-47)$$

$$G = \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)^2 \quad (9-48)$$

$$H = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \cos \varepsilon - \frac{\partial \rho}{\partial U} \right) \quad (9-49)$$

Jednotlivá zkreslení potom budou mít tvar:

$$\begin{aligned}m_p &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \cos \varepsilon - \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \sin \varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right)^2}}{R} \\m_r &= \frac{\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}}{R \cos U}\end{aligned}\quad (9-50)$$

$$m_{pl} = \frac{\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \left(\frac{\partial x_v}{\partial U} \cos \varepsilon - \frac{\partial \rho}{\partial U} \right)}{R^2 \cos U}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p^2 + m_r^2}{m_{pl}} - 2}$$

Příkladem polykónického zobrazení je *ekvidistantní polykónické zobrazení*, v němž se nezkrslují rovnoběžky a současně není zkreslený základní poledník. Podle jeho autora, amerického kartografa *Ferdinanda Rudolpha Hasslera (1770- 1843)*, který jej navrhl v roce 1820, je toto zobrazení známé i jako *Hasslerovo* nebo *jednoduché americké*, i když se samozřejmě o jednoduché zobrazení nejedná.

Protože každá rovnoběžka není délkově zkreslená, první zobrazovací rovnice bude mít tvar (viz odstavec 1.2.1. kapitoly *Jednoduchá kuželová zobrazení*):

$$\rho = R \cot gU \quad (9-51)$$

Druhá zobrazovací rovnice bude odpovídat Bonneovu zobrazení, tedy rovnici (9-30).

$$\varepsilon = \frac{R \cos U}{\rho} V$$

A po dosazení za ρ z rovnice (9-51) lze psát:

$$\varepsilon = V \sin U \quad (9-52)$$

Třetí zobrazovací rovnice se odvodí z podmínky nezkresleného základního poledníku (viz. Obr. 9-16). Pro hodnotu U_1 platí:

$$x_{v_1} = \rho_1 + R(U_1 - U_0)$$

Pro rovnoběžku U lze potom obecně psát:

$$x_v = \rho + R(U - U_0) \quad (9-53)$$

Zákony zkreslení se odvodí z rovnic (9-46) až (9-50). Derivací zobrazovacích rovnic se obdrží:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} &= V \cos U \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} &= \sin U \\ \frac{\partial \rho}{\partial U} &= -\frac{R}{\sin^2 U} = -R(1 - \cot^2 U) \\ \frac{\partial x_v}{\partial U} &= R - \frac{R}{\sin^2 U} = -R \cot^2 U \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahů (9-50) nabudou zákony zkreslení tvary:

$$m_p = \left(1 + 2 \cot^2 U \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \sec \tau, \text{ kde}$$

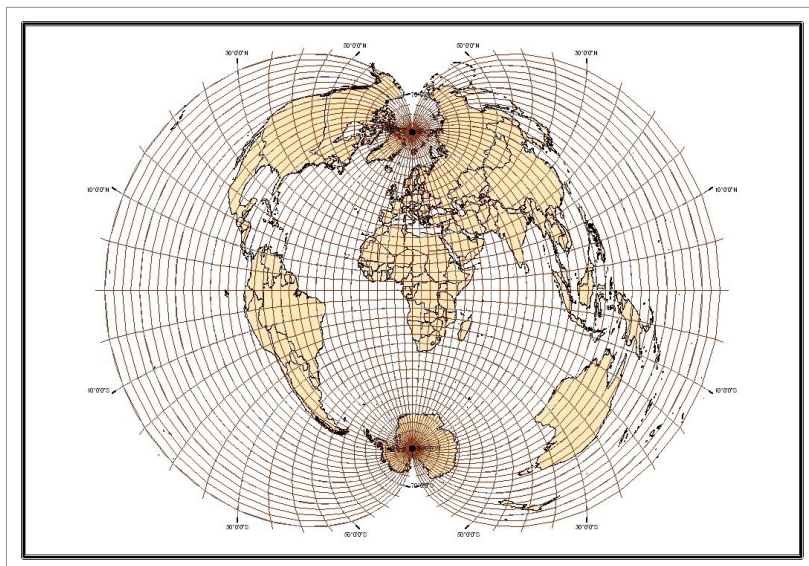
$$\tau = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \cot^2 U} \right) \quad (9-54)$$

$$m_r = 1$$

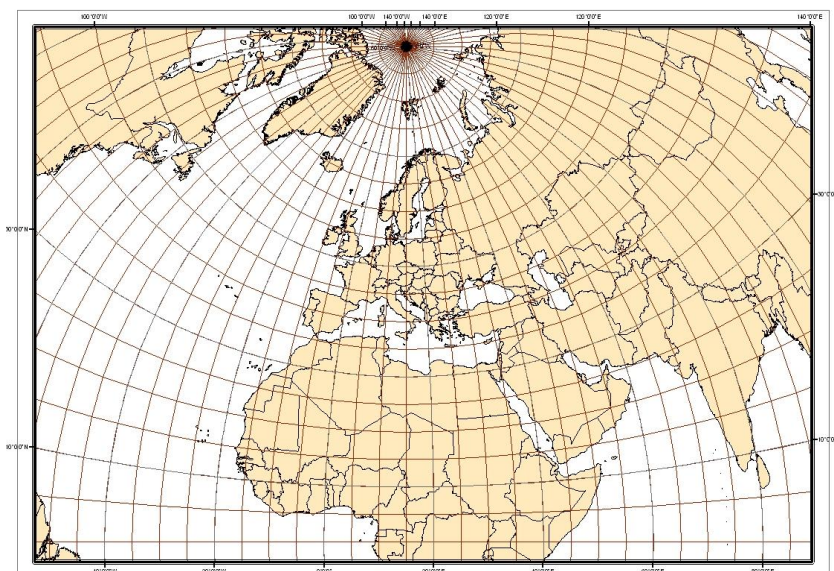
$$m_{pl} = 1 + 2 \cot^2 U \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p^2 + m_r^2}{m_{pl}} - 2}$$

Ukázky polykónického zobrazení jsou na následujících obrázcích.



Obr. 9-17 Polykónické zobrazení celého světa se základním poledníkem 15°



Obr. 9-18 Polykónické zobrazení části Země, základní poledník 15°, základní rovnoběžka 50°

10. Gaussovo zobrazení

Pro velkou část státních mapových děl států světa, včetně děl určených pro ozbrojené síly, je použito *Gaussovo konformní válcové zobrazení* nebo jeho varianty. Zobrazení je též často používáno pro vizualizaci digitálních informací o terénu stejně jako jsou v jeho souřadnicích prováděna měření v terénu nebo následné výpočty.

Obecnou teorii konformního zobrazení referenčního plochy do roviny v příčné poloze odvodil na počátku 19. století *Gauss (Carl Fridrich Gauss, 1775 - 1855)* s cílem použít ji pro mapování Hannoverska (1820 – 1830). Teorii tohoto zobrazení však neuveřejnil. Po jeho smrti ji podle zmínek v korespondenci uveřejnil v roce 1866 Schreiber v díle *Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung*. Na počátku 20. století tuto teorii doplnil a upravil pro praktické použití pro zobrazení z referenčního elipsoidu *Krüger (L.*

Krüger, 1857 - 1923) v díle *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*, které doplnil i tabulkami a dalšími pomůckami pro praktické použití. Vzhledem k tomu je možné nalézt i označení tohoto zobrazení jako *Gauss-Krügerovo* nebo *Gaussovo Krügerovo*. Mírně upravené zobrazení pomocí *konstantního zkreslení*, tzv. *měřítkového faktoru (scale factor)* se nazývá zobrazení *UTM (Universal Transverse Mercator)*. Ve Velké Británii a Severním Irsku se pro toto zobrazení používá název *Transverse Mercator Projection*.

Poznámka: Je nutné přesně rozlišovat mezi *jednoduchým konformním válcovým zobrazením* nazývaným *Mercatorovo zobrazení* a mezi *Gaussovým zobrazením*. Tato zobrazení nelze vzájemně zaměňovat. Zejména při používání vestavěných programových nástrojů GIS k tomu však může dojít poměrně snadno, neboť nabízená zobrazení jsou zde často označována podle svých autorů nebo podle vžitých názvů.

Gaussovo zobrazení bylo zavedeno jako zobrazení státního mapového díla v Německu od roku 1922 (v úpravě podle Krügera). Před druhou světovou válkou a v období po ní bylo toto zobrazení velice často použito jak pro státní mapová díla včetně děl určených pro potřeby ozbrojených sil (bývalý Sovětský svaz, Rakousko, státy pod vlivem bývalého Sovětského svazu, jako například Vietnam, apod.).

V České republice se Gaussovo zobrazení začalo poprvé používat též po druhé světové válce při tvorbě prozatímních vojenských topografických map v systému S-1946, ve kterém byl použit Besselův elipsoid. V padesátých letech 20. století se zobrazení používalo jak pro potřeby armády, tak pro potřeby národního hospodářství. Pro armádní účely bylo použito v šestistupňových pásech, pro civilní účely v pásech třístupňových. V obou případech byl použit geodetický referenční systém S-1952 s Krasovského elipsoidem. Od sedmdesátých let se zobrazení používalo opět pouze pro potřeby armády a to v geodetickém referenčním systému S-1942, resp. S-1942/83, elipsoid byl opět Krasovského. Od počátku roku 2006 je původní Gaussovo zobrazení i pro potřeby obrany státu opuštěno a nahrazeno zobrazením UTM v geodetickém referenčním systému WGS84 s elipsoidem WGS84.

Z hlediska praktického využití je předností Gaussovo zobrazení jeho koncepční jednotnost pro jakoukoliv část zemského povrchu a malé rovinné zkreslení.

10.1 Základní charakteristiky zobrazení

Gaussovo zobrazení je *matematicky definovaným* konformním zobrazením referenčního elipsoidu přímo do roviny. K jeho pochopení je možné vyjít z *přibližné geometrické představy* postupného zobrazování plochy elipsoidu na „soustavu válců“ v rovníkové poloze.

Pokud je zobrazení použito pro mapy středních měřítek (zpravidla topografické mapy měřítek 1:25 000 až 1:1 000 000, potom se nejčastěji používá se *šestistupňovými poledníkovými pásy*, jimiž je povrch elipsoidu rozdělen na šedesát dílů. V případě, že je nebo bylo použito pro mapy větších měřítek, potom se zpravidla používají *třístupňové poledníkové pásy*.

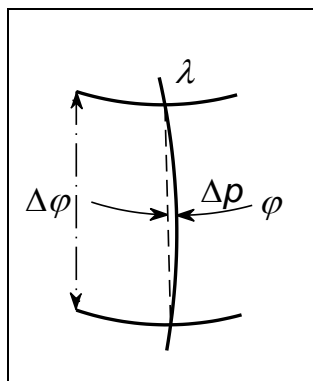
Poznámka: Pásy jsou často číslovány arabskými číslicemi počínaje od Greenwichského poledníku směrem na východ, případně od poledníku 180° opět východním směrem. Číslo pásů se potom používají i k identifikaci objektů jako součást jedné ze souřadnic (souřadnice y v S-1942) nebo jako součást lokalizačního kódu ve hlášeném systému (MGRS).

Každý poledníkový pás je *samostatně zobrazen do roviny*. Celá Země je tedy v případě šestistupňových pásů zobrazena na 60 pásech. Pásy mají rozsah zeměpisné šířky od 90° jižní zeměpisné šířky po 90° severní zeměpisné šířky. V některých modifikacích je tento rozsah upraven. Například v UTM se pásy zobrazují od 80° jižní zeměpisné šířky po 84° severní zeměpisné šířky.

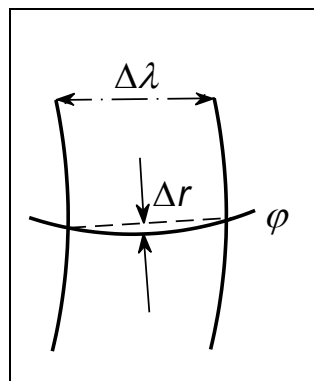
V zobrazení se *osový poledník* (střední poledník pásu) a *rovník* zobrazují jako navzájem kolmé přímky. Ostatní poledníky a rovnoběžky se zobrazují jako křivky. *Poledníky* se zobrazují jako části *sinusoid* konkávně zakřivených a symetrických k osovému poledníku. Zakřivení poledníků je velice malé a lze jej stanovit podle přibližného vzorce (10-1):

$$\Delta p = M \cos \varphi \frac{\Delta \varphi^2 \lambda}{8} \quad (10-1)$$

kde: Δp je největší výška oblouku nad tětivou,
 $\Delta \varphi$ je rozdíl zeměpisných šířek koncových bodů oblouku,
 λ je redukovaná zeměpisná délka vztažená k osovému poledníku,
 φ je zeměpisná šířka středu oblouku (viz Obr. 10-1).



Obr. 10-1 Zakřivení poledníku v Gaussově zobrazení



Obr. 10-2 Zakřivení rovnoběžky v Gaussově zobrazení

Obrazy *rovnoběžek* se zobrazují jako části *parabol* konkávně zakřivených k pólům a jsou symetrické vzhledem k rovníku. Jejich zakřivení je možné vypočítat podle přibližného vzorce (10-2):

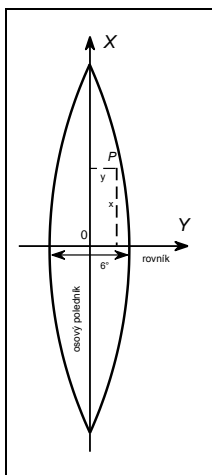
$$\Delta r = N \sin 2\varphi \frac{\Delta \lambda^2}{16} \quad (10-2)$$

kde: Δr je největší výška oblouku části rovnoběžky nad její tětivou,
 $\Delta \lambda$ je rozdíl zeměpisných délek koncových bodů oblouku části rovnoběžky,
 φ je zeměpisná šířka rovnoběžky (Obr. 10-2).

Poznámka: Mapové listy vojenských státních mapových děl a řada standardizovaných mapových děl NATO jsou vymezené částmi poledníků a rovnoběžek. V tomto případě je nutné znát hodnoty zakřivení částí poledníků a rovnoběžek, které tyto listy vymezují.

Z uvedených výsledků je patrné, že zakřivení částí poledníků není nutné při konstrukci map do měřítek 1:250 000 prakticky uvažovat. Jiná situace je u zobrazení rovnoběžek, kde je nutné již od měřítka mapy 1:250 000 a menších zakřivení rovnoběžek uvažovat. A to nejen při konstrukci rámu map, ale i při zákresu rovnoběžek do mapy a jejich použití pro odečítání zeměpisných souřadnic.

V rovině zobrazení má každý pás *samostatnou souřadnicovou soustavu rovinných pravoúhlých souřadnic*. Počátek tohoto systému je v průsečíku obrazu rovníku a osového poledníku, osa X je totožná s obrazem osového poledníku a je kladná na sever, osa Y je v obrazu rovníku a je kladná směrem na východ (Obr. 10-3).



Obr. 10-3 Rovinný souřadnicový systém Gaussova zobrazení

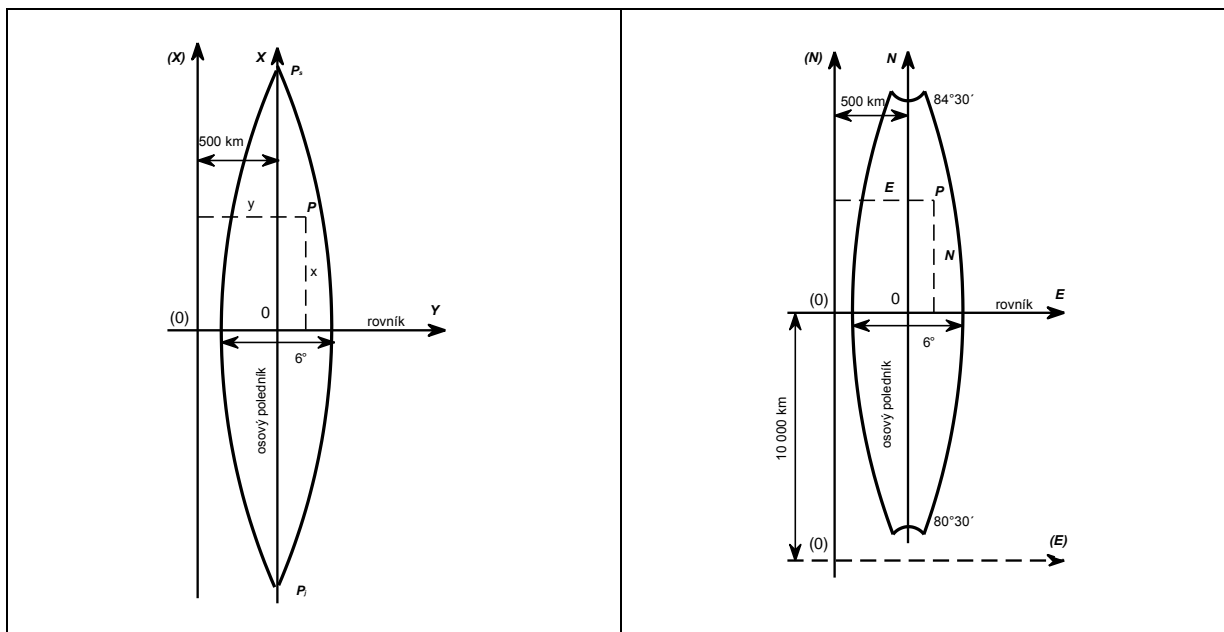
Při takto definovaných osách mohou souřadnice x , y nabývat jak kladné, tak i záporné hodnoty. Proto jsou někdy jedna nebo obě osy posouvány tak, aby obě souřadnice nabývaly pouze kladných hodnot. Osa X se zpravidla posouvá o 500 km směrem na západ a osa Y o 10 000 km směrem na jih. Posun osy X je použit v systému S-1942 a UTM (zde osa N), posun obou os v zobrazení UTM (osy N , E), pokud je používáno pro jižní polokouli (Obr. 10-4, Obr. 10-5). Takto uvedené souřadnice se používají například v katalozích souřadnic geodetických bodů a při popisech kilometrových čar topografických map. Pro některé výpočty je však nezbytné uvažovat souřadnice vztažené k původnímu souřadnicovému systému.

Uvedený souřadnicový systém a případně jeho varianty je v případě šestistupňových pásů aplikován na celé Zemi šedesátkrát. K rozlišení, o jaký poledníkový pás se v konkrétním případě jedná, se používají různé systémy. Například v S-1942 se k souřadnici y v řádu $1 \cdot 10^6$ uvádí číslo poledníkového pásu (s číslováním počínajícím od Greenwichského poledníku směrem na východ). Na území ČR tyto souřadnice začínají buďto cifrou 3 nebo 4. Ve WGS84 se u bodů může uvádět kód zóny o rozměrech 6° krát 4° vycházející se systému MGRS. Území ČR pokrývají zóny 33U a 34U.

Poledníkové pásy jsou velice úzké a dlouhé. Následující tabulka (Tabulka 10-1) uvádí minimální a maximální hodnoty souřadnic uvedené v kilometrech, které mohou v šestistupňovém pásu dosáhnout (jedná se jak o původní zobrazení, tak i o UTM).

Tabulka 10-1 Minimální a maximální hodnoty souřadnic v rámci jednoho šestistupňového pásu Gaussova zobrazení a zobrazení UTM

φ	x v Gaussovo zobr. [km]	N v UTM [km]	y v Gaussovo zobr. [km]	y v Gaussovo zobr. [km] vč. konst. 500 km	E v UTM [km]	E v UTM vč. konst. 500 km [km]
0° (rovník)	0	0	0 až ± 334	166 až 834	0 až $\pm 333,8$	166,2 až 833,8
50° (cca poloha ČR)	5541	5538,8	0 až ± 215	285 až 715	0 až $\pm 214,8$	285,2 až 714,2
90° (s. pól)	10002	9998	0	500	0	500



Obr. 10-4 Posun souřadnicových os v systému S-1942 Obr. 10-5 Posun souřadnicových os v zobrazení UTM

10.2 Zobrazovací rovnice

Dále odvozované zobrazovací rovnice jsou platné pro libovolný poledníkový pás s libovolnou šířkou a pro libovolný elipsoid. Osový poledník bude mít hodnotu $\lambda_0 = 0^\circ$, obecná zeměpisná délka bude vztahována k tomuto osovému poledníku a souřadnice y bude uvažována v originálním souřadnicovém systému (viz Obr. 10-3).

Základní zobrazovací rovnice vycházejí z obecných rovnic uvedených v kapitole *Dělení a klasifikace zobrazení*:

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi, \lambda) \\ y &= f(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (10-3)$$

přičemž zeměpisná šířka φ zde bude nahrazena šířkou izometrickou q . Obecné zobrazovací rovnice potom budou mít tvar:

$$\begin{aligned} x &= f(q, \lambda) \\ y &= f(q, \lambda) \end{aligned} \quad (10-4)$$

Jelikož zobrazení je konformní, je možné je definovat pomocí obecných rovnic konformního zobrazení odvozených v kapitole Teorie zobrazení:

$$x + iy = f(q + i\lambda) \quad (10-5)$$

$$x - iy = f(q - i\lambda) \quad (10-6)$$

Vzhledem k tomu, že poledníkový pás je velice úzký, je hodnota λ vzhledem ke q diferenciálně malá, je možné pravou stranu rovnice (10-5) rozvést v Taylorovu řadu:

$$x + iy = f(q) + f'(q)i\lambda + f''(q)\frac{i^2\lambda^2}{2!} + f'''(q)\frac{i^3\lambda^3}{3!} + f^{(4)}(q)\frac{i^4\lambda^4}{4!} + f^{(5)}(q)\frac{i^5\lambda^5}{5!} + f^{(6)}(q)\frac{i^6\lambda^6}{6!} + \dots$$

Rovnice (10-6) by se upravila stejně. Pro odvození zobrazovacích rovnic však stačí uvažovat pouze první z nich.

Uváží-li se mocniny imaginárního čísla i ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$, atd.) a oddělí-li se reálná a imaginární část, potom lze psát obecné rovnice:

$$x = f(q) - f''(q)\frac{\lambda^2}{2} + f^{(4)}(q)\frac{\lambda^4}{24} - f^{(6)}(q)\frac{\lambda^6}{720} + \dots \quad (10-7)$$

$$y = f'(q)\lambda - f'''(q)\frac{\lambda^3}{6} + f^{(5)}(q)\frac{\lambda^5}{120} - \dots \quad (10-8)$$

Při původním odvození zobrazení byla stanovena podmínka, že osový poledník zůstane nezkreslený. Jelikož osový poledník má $\lambda = 0^\circ$, rovnice (10-7) a (10-8) pro bod P'_0 ležící v zeměpisné šířce φ na tomto poledníku potom nabývají tvaru:

$$\begin{aligned} x_0 &= f(q) \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Z podmínky jeho nezkreslení vyplývá, že:

$$x_0 = s_p = S_p$$

kde s_p a S_p je délka oblouku osového poledníku od rovníku k bodu P'_0 na referenčním elipsoidu a v zobrazovací rovině. S uvažováním výše uvedeného lze vyjádřit funkci $f(q)$:

$$f(q) = S_p \quad (10-9)$$

a rovnici (10-7) je možno upravit do tvaru:

$$x = S_p - f''(q)\frac{\lambda^2}{2} + f^{(4)}(q)\frac{\lambda^4}{24} - f^{(6)}(q)\frac{\lambda^6}{720} + \dots$$

Pro první derivaci funkce $f(q)$ platí:

$$f'(q) = \frac{df(q)}{dq} \quad (10-10)$$

Protože podle rovnice (10-9) je:

$$df(q) = dS_p$$

a podle definice izometrické šířky q platí:

$$dq = \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi}$$

bude po dosazení do (10-10):

$$f'(q) = \frac{dS_p N \cos \varphi}{Md\varphi} \quad (10-11)$$

Protože platí vztah

$$dS_p = Md\varphi$$

bude

$$f'(q) = N \cos \varphi \quad (10-12)$$

Uvedený výraz je první člen obecné zobrazovací rovnice pro souřadnici y . Rovnici (10-12) je možné dále derivovat a tím postupně získávat další členy obecných zobrazovacích rovnic (10-7) a (10-8).

Druhá derivace bude:

$$f''(q) = \frac{d(N \cos \varphi)}{dq} = \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} \frac{N \cos \varphi}{M} \quad (10-13)$$

První část rovnice (10-13) je možné upravit:

$$\begin{aligned} \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} &= \frac{d(N)}{d\varphi} \cos \varphi + N \frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} = \frac{ae^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{a \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \\ &= \frac{ae^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - a \sin \varphi (1-e^2 \sin^2 \varphi)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = -\frac{a \sin \varphi (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = -M \sin \varphi \end{aligned} \quad (10-14)$$

Po dosazení do (10-13) se získá druhý člen obecné zobrazovací rovnice pro souřadnici x :

$$f''(q) = -N \cos \varphi \sin \varphi \quad (10-15)$$

Obdobně se získávají další členy obecných zobrazovacích rovnic derivacemi rovnice (10-15). Jednotlivé členy mají tvary:

$$f'''(q) = -N \cos^3 \varphi (1-t^2 + \eta^2) \quad (10-16)$$

$$f^{(4)}(q) = N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5-t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \quad (10-17)$$

$$f^{(5)}(q) = N \cos^5 \varphi (5-18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \quad (10-18)$$

$$f^{(6)}(q) = -N \sin \varphi \cos^5 \varphi (61-58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) \quad (10-19)$$

v nichž jsou použity symboly $\eta = e' \cos \varphi$ a $t = \operatorname{tg} \varphi$.

V rovnicích (10-18) a (10-19) jsou zanedbány členy s η^4 a η^6 , protože jejich hodnoty jsou již zanedbatelné.

Po dosazení derivací funkce $f(q)$ do obecných zobrazovacích rovnic (10-7) a (10-8) se získají základní tvary zobrazovacích rovnic Gaussovo zobrazení:

$$x = S_p + N \cos \varphi \sin \varphi \frac{\lambda^2}{2} + N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5-t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{\lambda^4}{24} \quad (10-20)$$

$$+ N \sin \varphi \cos^5 \varphi (61-58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) \frac{\lambda^6}{720}$$

$$y = N \cos \varphi \lambda + N \cos^3 \varphi (1-t^2 + \eta^2) \frac{\lambda^3}{6} \quad (10-21)$$

$$+ N \cos^5 \varphi (5-18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \frac{\lambda^5}{120}$$

v nichž hodnoty zeměpisné délky jsou v obloukové míře (v radiánech).

Poznámky:

1. Čtvrtý člen v zobrazovací rovnici (10-20) s λ^6 je již velmi malý, jeho vynecháním se největší chyba v souřadnici x pohybuje v intervalu +2 mm až -1 mm, na území ČR je do 0,5 mm. Tento člen se používá pouze při vysokých požadavcích na přesnost výpočtů.
2. K praktickým výpočtům byly zpracovány různé tabulky, grafy, nomogramy, případně byly zobrazovací rovnice převáděny do jiných forem tak, aby bylo možné snadněji sestavovat výše uvedené pomůcky (viz například Štorkán, F.: *Tabulky pro nové mapy*, SNTL Praha 1956, Kolektiv autorů: *Tabulky k výpočtům v Gaussovo zobrazení, elipsoid Krasovského, ÚSGK Praha 1965, Geodetické tabulky, MNO Praha 1979 ...*). V současné době jsou rovnice zpravidla naprogramovány v různých programových systémech (geodetického nebo geoinformačního charakteru) nebo samostatně.
3. Uvedené vzorce plně vyhovují i nejvyšší požadované přesnosti výpočtů na území ČR v rozsahu jednoho poledníkového pásu. V případě vysoce přesných výpočtů zejména v oblastech blízkých rovníku a případně i ve větších úhlových vzdálenostech od osového poledníku, než $\pm 3^\circ$, je nutné uvážit i další členy zobrazovacích rovnic (viz. např. [5]).

10.2.1 Zobrazovací rovnice UTM

Zobrazení UTM se začalo používat v USA zejména pro potřeby armády v roce 1947. Postupně se rozšířilo jako jedno ze standardizovaných zobrazení pro topografické mapy a pro lokalizaci dat GIS v rámci NATO. Zobrazení se používá pro celou Zemi od 84° severní zeměpisné šířky po 80° jižní zeměpisné šířky, opět ve variantě 6° poledníkových pásů. Osy se zpravidla označují N a E (standardní označení v rámci NATO, přičemž se souřadnice zpravidla uvádějí v pořadí E, N), někdy se mohou označovat stejně jako u Gaussovo zobrazení X, Y . UTM se používalo s různými elipsoidy. Například pro Severní Ameriku to byl původně Clarkův elipsoid 1866, pro Afriku Clarkův elipsoid 1880, pro Evropu a systém ED50 Hayfordův elipsoid. V současné době je nejčastěji používán elipsoid WGS84.

Zobrazení se liší od původního Gaussovo zobrazení použitím měřítkového faktoru $m_0 = 0,9996$, jímž jsou vynásobeny obě zobrazovací rovnice (10-20) a (10-21). V podstatě se jedná o totéž zobrazení s konstantně zkresleným osovým poledníkem. Zobrazovací rovnice tedy mají tvar:

$$N = m_0 \left[\begin{array}{l} S_p + N_{el} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\lambda^2}{2} + N_{el} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{\lambda^4}{24} \\ + N_{el} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) \frac{\lambda^6}{720} \end{array} \right] \quad (10-22)$$

$$E = m_0 \left[\begin{array}{l} N_{el} \cos \varphi \lambda + N_{el} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \frac{\lambda^3}{6} \\ + N_{el} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \frac{\lambda^5}{120} \end{array} \right] \quad (10-23)$$

kde N_{el} je příčný poloměr křivosti elipsoidu, aby nedošlo k jeho záměně se souřadnicí N .

Poznámka: viz poznámku 3. k zobrazovacím rovnicím Gaussova zobrazení.

10.3 Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím

Poměrně často je nutné vypočítat zeměpisné souřadnice z rovinných pravoúhlých. Hledání inverzních tvarů rovnic (10-20) a (10-21) se řeší postupným přibližováním.

Nejprve se řeší rovnice pro výpočet λ . V prvním přiblížení se z rovnice (10-21) použije pouze 1. člen, z něhož se vypočítá:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi}$$

a dále se vypočítá třetí mocnina λ :

$$\lambda^3 = \frac{y^3}{N^3 \cos^3 \varphi}$$

kteřá se dosadí do druhého členu rovnice (10-21). Po úpravě se získá rovnice:

$$y = N \cos \varphi \lambda + \frac{y^3}{6N^2} (1 - t^2 + \eta^2)$$

ze které se vypočítá hodnota λ ve druhém přiblížení:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$

a znovu se vypočte λ^3 a λ^5 . V uvedených mocninách stačí uvažovat hodnoty y pouze do páté mocniny. Tyto mocniny budou mít tvar:

$$\lambda^3 = \frac{y^3}{N^3 \cos^3 \varphi} - \frac{y^5}{2N^5 \cos^3 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$\lambda^5 = \frac{y^5}{N^5 \cos^5 \varphi}$$

Hodnoty se opět dosadí do (10-21) a vypočte se hodnota λ ve třetím, posledním přiblížení, přičemž se u páté mocniny y zanedbávají členy s η^2 a η^4 , jejichž hodnoty jsou zanedbatelné:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{y^5}{120N^5 \cos \varphi} (5 - 2t^2 9t^4) \quad (10-24)$$

K tomu, aby bylo možné hodnotu λ vypočítat, je nutné znát hodnotu zeměpisné šířky φ . Ta se vypočítá pomocí pomocné hodnoty φ_f (viz. Obr. 10-6). Z bodu P' se spustí kolmice k ose X , která tuto osu protne v bodě P'_f . Protože se osový poledník délkově nezkrsluje, je možné k hodnotě souřadnice x hned vypočítat (nebo nalézt v tabulkách) hodnotu zeměpisné šířky φ_f (viz kapitola 1).

Poznámka: Pro výpočet hodnoty φ_f se využije rovnice (1-13), která je ve tvaru:

$$s_p = A^* \varphi^{\circ} - B^* \sin 2\varphi + C^* \sin 4\varphi - D^* \sin 6\varphi + E^* \sin 8\varphi - \dots$$

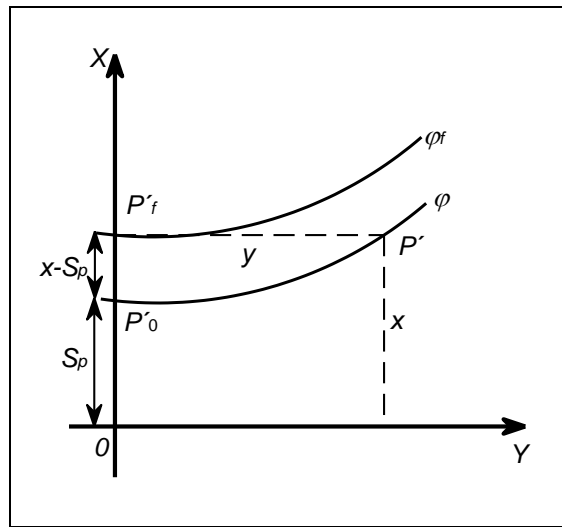
Souřadnice x bodu P'_f potom bude:

$$x = A^* \varphi_f^{\circ} - B^* \sin 2\varphi_f + C^* \sin 4\varphi_f - D^* \sin 6\varphi_f + E^* \sin 8\varphi_f - \dots \quad (10-25)$$

Zeměpisnou šířku φ_f je nutné řešit postupnou iterací, kde v prvním přiblížení bude

$$\varphi_f^1 = \frac{x}{A^*}. \quad (10-26)$$

Dosazením φ_f^1 do (10-25) se vypočítá změna souřadnice x a s využitím vztahu (10-26) i změna hodnoty $\Delta\varphi_f$. O tuto hodnotu se opraví φ_f^1 a získá se nová hodnota φ_f^2 . Uvedený postup se opakuje do té doby, než $\Delta\varphi_f$ bude menší, než požadovaná přesnost výpočtu.



Obr. 10-6 Význam rovnoběžky φ_f v inverzních funkcích k zobrazovacím rovnicím Gaussova zobrazení

Rozdíl mezi hodnotami φ a φ_f je možné vypočítat podle přibližného vzorce:

$$\varphi_f - \varphi = \frac{x - S_p}{M} - \frac{3t\eta^2}{2(1 + \eta^2)} (\varphi_f - \varphi)^2 \quad (10-27)$$

Z rovnice (10-20), do které se dosadí hodnoty λ^2 a λ^4 z rovnice (10-24) se obdrží výraz:

$$x - S_p = \frac{y^2}{2N} t + \frac{y^4}{24N^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2) \quad (10-28)$$

který se dosadí do (10-27). Po dosazení se obdrží vztah:

$$\varphi_f - \varphi = \frac{y^2}{2MN} t + \frac{y^4}{24MN^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2) - \frac{3t\eta^2}{2(1 + \eta^2)} (\varphi_f - \varphi)^2 \quad (10-29)$$

Hodnotu $\varphi_f - \varphi$ lze určit postupným přibližováním. V prvním kroku se vypočítá:

$$\varphi_f - \varphi = \frac{y^2}{2MN} t$$

a

$$(\varphi_f - \varphi)^2 = \frac{y^4}{4M^2N^2} t^2$$

což lze dosadit do původního výrazu (10-29) a po úpravách se vypočítá druhé přiblížení $\varphi_f - \varphi$:

$$\varphi_f - \varphi = \frac{y^2}{2MN} t + \frac{y^4}{24MN^3} t (1 + 3t^2 + 5\eta^2 - 9t^2\eta^2) \quad (10-30)$$

Rovnice (10-24) a (10-30) umožňují již výpočet φ a λ , avšak pouze za předpokladu, že je znám argument φ , který se právě hledá. Jeho hodnotu je možné určit ze vztahu:

$$\varphi = \varphi_f - (\varphi_f - \varphi) \quad (10-31)$$

Výraz (10-31) je možné dosadit do rovnic (10-24) a (10-30), předtím je však vhodné upravit. Úpravy se týkají goniometrických funkcí (sin, cos a tg), ve kterých se φ vyskytuje. Například výraz $\sin \varphi$ je psát:

$$\sin \varphi = \sin[\varphi_f - (\varphi_f - \varphi)]$$

Hodnota $(\varphi_f - \varphi)$ je obecně ve srovnání s hodnotou φ_f diferenciálně malá, proto je možné pravou stranu rovnice rozvinout v Taylorovu řadu, přičemž se vzhledem k jejich velikosti uváží pouze první dva členy této řady:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_f - \cos \varphi_f (\varphi_f - \varphi)$$

Pokud se za $(\varphi_f - \varphi)$ dosadí výraz (10-30) a opět vzhledem k velikosti jeho členů se uváží pouze první dva, obdrží se:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_f - \cos \varphi_f \frac{y^2}{2M_f N_f} t_f \quad (10-32)$$

kde:

$$M_f = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_f)^{3/2}}, \quad N_f = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_f)^{1/2}}, \quad t_f = \operatorname{tg} \varphi_f$$

Obdobně se upraví i zbylé goniometrické funkce. Po úpravě bude:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_f + \sin \varphi_f \frac{y^2}{2M_f N_f} t_f \quad (10-33)$$

$$t = t_f - (1-t_f^2) \frac{y^2}{2M_f N_f} t_f \quad (10-34)$$

Dosadí-li se výrazy (10-32), (10-33) a (10-34) do (10-30) a (10-24), získají se po úpravách konečné vztahy:

$$\varphi = \varphi_f - \frac{y^2}{2M_f N_f} t_f + \frac{y^4}{24M_f N_f^3} t_f (5 + 3t_f^2 + 5\eta_f^2 - 9t_f^2 \eta_f^2) + \quad (10-35)$$

$$\frac{y^6}{720M_f N_f^5} t_f (61 + 91t_f^2 + 45t_f^4 + 107\eta_f^2 - 162t_f^2 \eta_f^2 - 45t_f^4 \eta_f^2)$$

$$\lambda = \frac{y}{N_f \cos \varphi_f} - \frac{y^3}{6N_f^3 \cos \varphi_f} (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) + \quad (10-36)$$

$$\frac{y^5}{120N_f^5 \cos \varphi_f} (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2)$$

Poslední člen v rovnici (10-35) se používá pouze v případě vysokých nároků na přesnost výpočtů, kdy je požadována hodnota s přesností 0,0001".

10.3.1 Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím UTM

Inverzní funkce v zobrazení UTM musí uvažovat měřítkový faktor m_0 . Jejich tvar bude obdobný jako u výrazů (10-35) a (10-36):

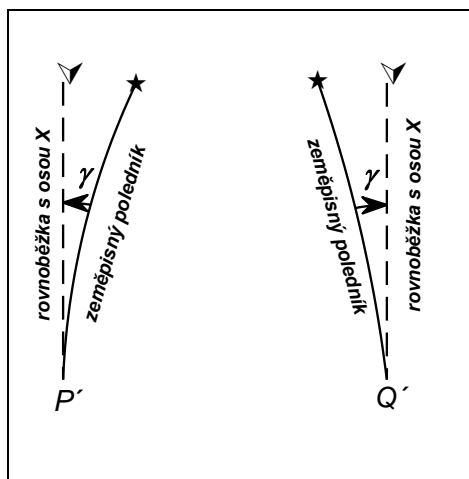
$$\varphi = \varphi_f - \frac{E^2}{2m_0^2 M_f N_{elf}} t_f + \frac{E^4}{24m_0^4 M_f N_{elf}^3} t_f (1 + 3t_f^2 + 5\eta_f^2 - 9t_f^2 \eta_f^2) + \frac{E^6}{720m_0^6 M_f N_{elf}^5} t_f (61 + 91t_f^2 + 45t_f^4 + 107\eta_f^2 - 162t_f^2 \eta_f^2 - 45t_f^4 \eta_f^2) \quad (10-37)$$

$$\lambda = \frac{E}{m_0 N_{elf} \cos \varphi_f} - \frac{E^3}{6m_0^3 N_{elf}^3 \cos \varphi_f} (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) + \frac{E^5}{120m_0^5 N_{elf}^5 \cos \varphi_f} (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2) \quad (10-38)$$

kde N_{el} je opět příčný poloměr křivosti použitého elipsoidu.

10.4 Meridiánová konvergence

Vzhledem k tomu, že většina souřadnicových výpočtů v Gaussově zobrazení používá rovinné pravoúhlé souřadnice, je poměrně často je nutné znát pro daný bod i hodnotu *meridiánové konvergence* γ . Meridiánová konvergence je úhel mezi rovnoběžnou s osou X (N) a obrazem místního zeměpisného poledníku (viz Obr. 10-7).

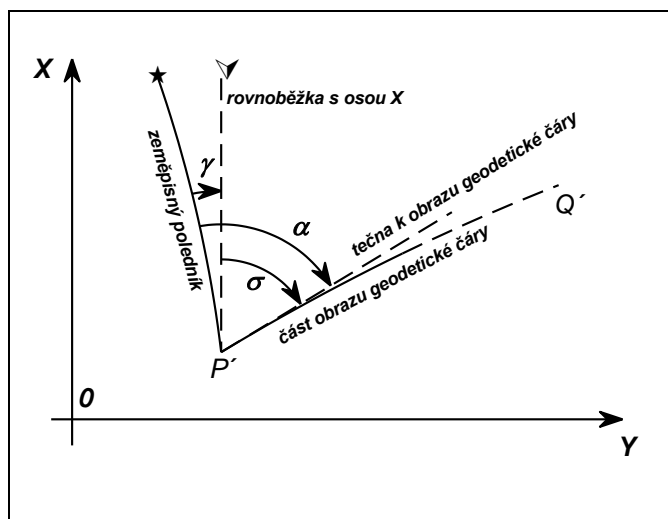


Obr. 10-7 Princip meridiánové konvergence

Její znalost je nutná při převodu *směrníku* na *zeměpisný azimut* a naopak. Podle obrázku (Obr. 10-8) platí:

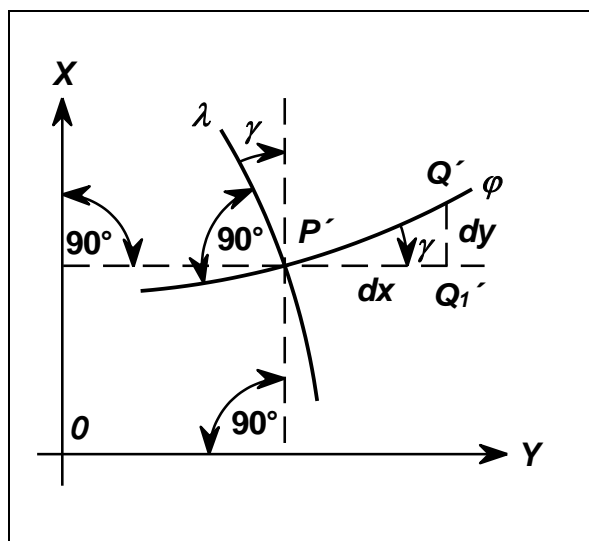
$$\sigma = \alpha - \gamma \quad (10-39)$$

Poznámka: Při výpočtu hodnoty σ je nutné uvážit i *směrovou korekci geodetické čáry*.



Obr. 10-8 Vztah meridiánové konvergence, směrníku a zeměpisného azimutu

Meridiánovou konvergenci je možné vypočítat z rovinných pravoúhlých nebo zeměpisných souřadnic. Při jejím výpočtu ze *zeměpisných souřadnic* lze vyjít z následujícího obrázku (Obr. 10-9), kde je v okolí bodu P' zobrazen jak element poledníku, tak i element rovnoběžky.



Obr. 10-9 Odvození meridiánové konvergence ze zeměpisných souřadnic

Poněvadž se jedná o konformní zobrazení, je možné konvergenci definovat i jako úhel mezi obrazem zeměpisné rovnoběžky a rovnoběžkou s osou Y . V tomto případě je odvození rovnice meridiánové konvergence snazší vzhledem ke tvaru zobrazovacích rovnic, protože hodnota φ bude konstantní. Na rovnoběžce φ je zvolen bod Q' diferenciálně blízko bodu P' . Z trojúhelníka $P'Q'Q_1'$ lze vyplývá:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} \tag{10-40}$$

Hodnoty dx a dy se odvodí derivováním zobrazovacích rovnic (10-20) a (10-21). Protože φ je konstantní, derivace budou pouze pro λ a vzhledem k velikosti jednotlivých členů zobrazovacích rovnic stačí uvažovat výsledné členy nejvýše s λ^3 . Derivace mají tvar:

$$\frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi \sin \varphi \lambda + N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{\lambda^3}{6} \tag{10-41}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = N \cos \varphi + N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \frac{\lambda^2}{2} \quad (10-42)$$

Po dosazení výrazů (10-41) a (10-42) do (10-40) se získá vztah:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N \cos \varphi \sin \varphi \lambda + N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{\lambda^3}{6}}{N \cos \varphi + N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \frac{\lambda^2}{2}} = \frac{\sin \varphi \lambda + \sin \varphi \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{\lambda^3}{6}}{1 + \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \frac{\lambda^2}{2}}$$

Po další úpravě se získá rovnice:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin \varphi \lambda + \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \frac{\lambda^3}{3} \quad (10-43)$$

Hodnotu γ je možné vypočítat přímo, pokud se vzorec (10-43) zjednoduší použitím mocninné řady pro funkci $\operatorname{arctg} z$. Označí-li se $z = \operatorname{tg} \gamma$, potom:

$$\gamma = \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

a tedy:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{\operatorname{tg}^3 \gamma}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 \gamma}{5} - \dots$$

Po dosazení za výraz $\operatorname{tg} \gamma$ z (10-43) a nezbytných úpravách lze meridiánovou konvergenci počítat přímo (v obloukové míře) následujícím vztahem:

$$\gamma = \sin \varphi \lambda + \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \frac{\lambda^3}{3} + \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2) \frac{\lambda^5}{15} \quad (10-44)$$

Pro praktické výpočty, pokud není požadována vysoká přesnost, je možné použít pouze první člen rovnice (10-44).

Meridiánovou konvergenci lze počítat i z rovinných pravouhlych souřadnic X, Y . Pokud se dosadí do výrazu (10-44) vztahy (10-36) a (10-37), získá se po úpravě rovnice:

$$\gamma = \frac{y}{N_f} t_f - \frac{y^3}{3N_f^3} t_f (1 + t_f^2 - \eta_f^2 - 2\eta_f^4) + \frac{y^5}{15N_f^5} t_f (2 + 5t_f^5 + 3t_f^4) \quad (10-45)$$

Uvedený vzorec zabezpečí přesnost výpočtu konvergence v prostoru České republiky (na úrovni zeměpisné rovnoběžky 50°) v jednom poledníkovém pásu $0,0005''$. V případě, že je požadována přesnost výpočtu do $3''$, lze v rozmezí jednoho poledníkového pásu použít i zjednodušený vzorec

$$\gamma = \frac{y}{N} \operatorname{tg} \varphi \quad (10-46)$$

Poznámka: Meridiánová konvergence v rámci jednoho poledníkového pásu nabývá jak kladných (na východní části pásu), tak i záporných hodnot (na západní části pásu). Při $\varphi = 50^\circ$ je její absolutní hodnota na okrajích pásu přibližně $2^\circ 18'$.

10.4.1 Meridiánová konvergence v UTM

Výpočet meridiánové konvergence ze zeměpisných souřadnic je totožný jako v původním Gaussově zobrazení. Pokud se k výpočtům použijí rovinné pravoúhlé souřadnice N , E , je nutné uvážit i měřítkový faktor m_0 . Rovnice (10-45) potom bude mít tvar:

$$\gamma = \frac{E}{N_{ef} m_0} t_f - \frac{E^3}{3N_{ef}^3 m_0^3} t_f (1 + t_f^2 - \eta_f^2 - 2\eta_f^4) + \frac{E^5}{15N_{ef}^5 m_0^5} t_f (2 + 5t_f^5 + 3t_f^4) \quad (10-47)$$

a obdobně zjednodušená rovnice (10-46) ze změny na:

$$\gamma = \frac{E}{N_{ef} m_0} \operatorname{tg} \varphi \quad (10-48)$$

10.5 Zákony zkreslení

V Gaussově zobrazení stačí vypočítat pouze *délkové zkreslení* m . *Plošné zkreslení* bude jeho kvadrátem a *úhlové zkreslení* je zde nulové.

Délkové zkreslení je možné vypočítat ze *zeměpisných* nebo *rovinných pravoúhlých* souřadnic. Pokud se počítá ze *zeměpisných souřadnic*, lze použít obecné výrazy (viz kapitola Zákony zkreslení):

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{M} \quad \text{nebo}$$

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N \cos \varphi}$$

Vzhledem ke tvaru zobrazovacích rovnic (10-20) a (10-21) je zřejmé, že jejich derivace podle λ je jednodušší. S využitím rovnic (10-41) a (10-42) lze po úpravách psát:

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = N^2 \cos^2 \varphi [\sin^2 \varphi \lambda + 1 + \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^2] = N^2 \cos^2 \varphi [1 + \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \lambda^2]$$

Výsledný vzorec pro délkové zkreslení potom bude:

$$m = 1 + \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \frac{\lambda^2}{2} + \cos^4 \varphi (5 - 4t^2) \frac{\lambda^4}{24} \quad (10-49)$$

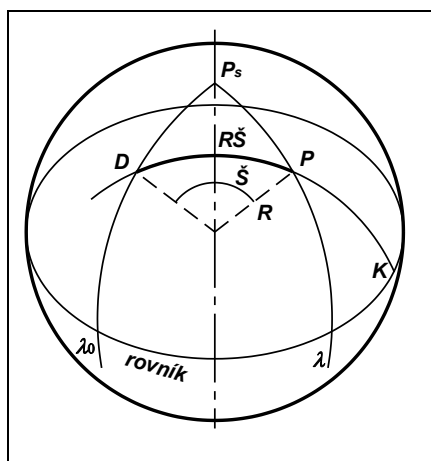
Vzorec (10-49) v rámci jednoho šestistupňového pásu pro hodnotu $\varphi = 50^\circ$ umožní přesnost výpočtu zkreslení na setiny milimetru. Pro tuto hodnotu zeměpisné šířky člen s λ^4 dosahuje hodnoty $4 \cdot 10^{-8}$, tedy $0,04 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-1}$. Proto pokud není požadována taková přesnost výpočtu, je možné tento člen zanedbat. Stejně tak, pokud se pro tuto zeměpisnou šířku zanedbá hodnota výrazu $(1 + \eta^2)$, vzniklá chyba nepřesáhne hodnotu $15 \cdot 10^{-7}$ (tedy $1,5 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-1}$). Proto se často v praxi používá pouze zjednodušený vzorec:

$$m = 1 + \cos^2 \varphi \frac{\lambda^2}{2} \quad (10-50)$$

Délkové zkreslení je možné vypočítat i z rovinných pravouhlych souřadnic. V tomto případě se volí jednodušší cesta, při níž se referenční elipsoid v daném bodě nahradí koulí o poloměru

$$R = \sqrt{MN}$$

a místo Gaussova zobrazení se uvažuje jednoduché válcové konformní zobrazení v příčné poloze (Mercatorovo) (viz Obr. 10-10).



Obr. 10-10 Náhrada referenčního elipsoidu koulí pro výpočet délkového zkreslení Gaussova zobrazení

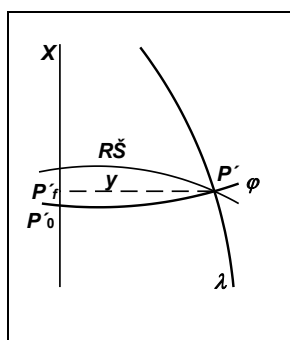
S ohledem na tvar rovnice délkového zkreslení je možné psát:

$$m = \frac{1}{\cos \check{S}}$$

a tento vzorec upravit rozvojem kosinu v řadu:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{\check{S}^2}{2} + \frac{\check{S}^4}{24} - \dots} \quad (10-51)$$

V rámci šestistupňového pásu není příliš velký rozdíl v délce zobrazené části oblouku původní rovnoběžky, části oblouku kartografického poledníku a souřadnice y (viz Obr. 10-11).



Obr. 10-11 Ilustrace výpočtu délkového zkreslení Gaussova zobrazení

Proto lze psát:

$$y = R\check{S}$$

a tento výraz se dosadí do (10-51), přičemž stačí uvažovat pouze do mocniny y^4 . Výsledný vzorec bude:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}} \quad (10-52)$$

Jelikož výraz

$$\frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}$$

dosahuje velmi malých hodnot, lze vzorec dále upravit:

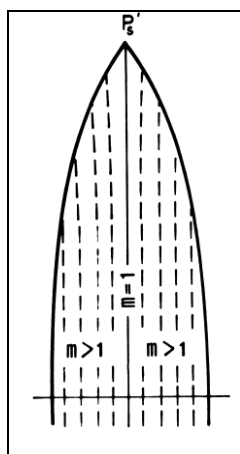
$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \quad (10-53)$$

Pokud se opět v rámci jednoho šestistupňového pásu zanedbá ve vzorci (10-53) třetí člen (y^4), maximální rozdíl na území ČR dosáhne hodnoty $5 \cdot 10^{-8}$ (tedy $0,05 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-1}$). Proto se v praxi často používá pouze zjednodušený výraz:

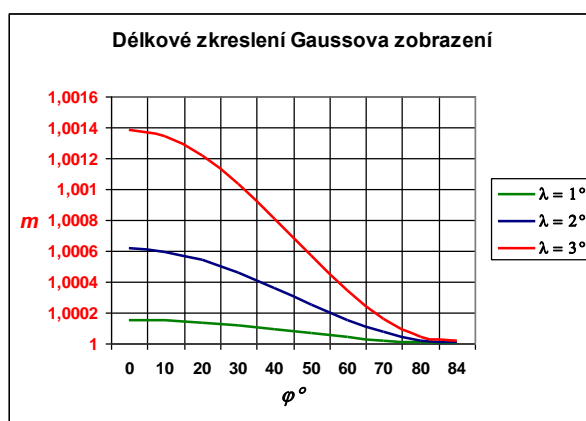
$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} \quad (10-54)$$

Průběh délkového zkreslení v rámci jednoho šestistupňového pásu je zřejmý z obrázku (viz. Obr. 10-12).

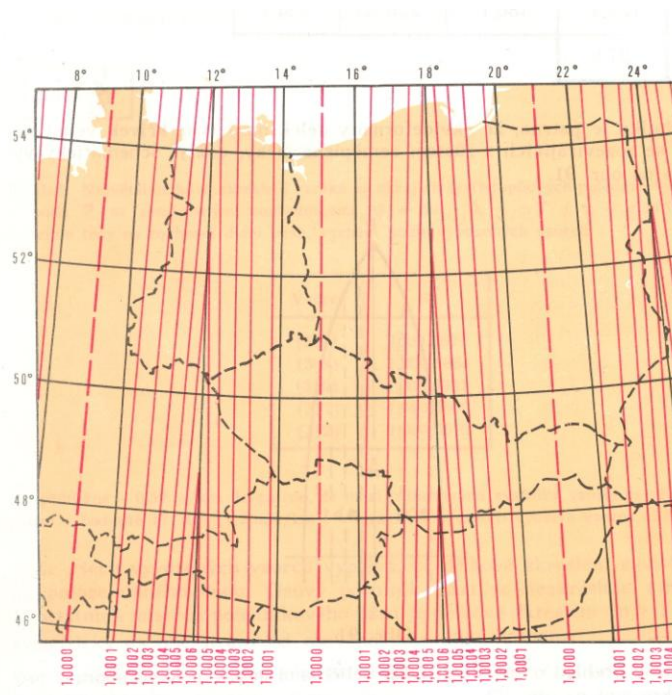
Graf na následujícím obrázku (viz Obr. 10-13) znázorňuje závislost délkového zkreslení na zeměpisné šířce a hodnotě λ . Další obrázek (viz Obr. 10-14) ilustruje průběh ekvideformát délkového zkreslení Gaussova zobrazení na území střední Evropy. Na území ČR dosahuje délkové zkreslení maximálních hodnot na okrajích 3. poledníkového pásu kolem $0,58 \text{ m} \cdot \text{km}^{-1}$.



Obr. 10-12 Zobrazení ekvideformát délkového zkreslení Gaussova zobrazení (převzato z [23])



Obr. 10-13 Graf délkového zkreslení v Gaussově zobrazení



Obr. 10-14 Průběh ekvideformát délkového zkreslení Gaussova zobrazení na území střední Evropy (převzato z [23])

10.5.1 Zákony zkreslení v UTM

V zobrazení UTM se délkové zkreslení ze *zeměpisných souřadnic* počítá podle vzorce:

$$m = m_0 \left[1 + \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \frac{\lambda^2}{2} + \cos^4 \varphi (5 - 4t^2) \frac{\lambda^4}{24} \right] \quad (10-55)$$

Je možné použít i zjednodušený tvar:

$$m = m_0 \left(1 + \cos^2 \varphi \frac{\lambda^2}{2} \right) \quad (10-56)$$

Pro výpočet z *rovinných pravoúhlých souřadnic* se používá následující vzorec:

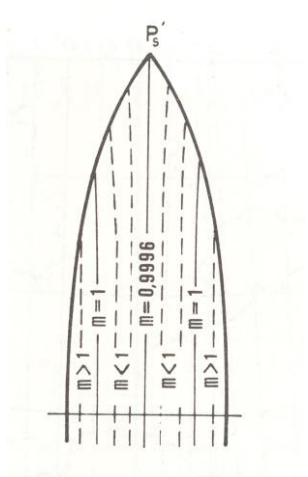
$$m = m_0 \left(1 + \frac{E^2}{2m_0^2 R^2} + \frac{E^4}{24m_0^4 R^4} \right) \quad (10-57)$$

případně opět jeho zjednodušený tvar:

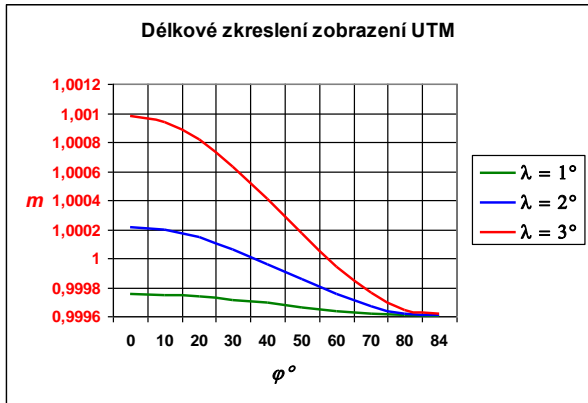
$$m = m_0 \left(1 + \frac{E^2}{2m_0^2 R^2} \right) \quad (10-58)$$

Průběh délkového zkreslení v rámci jednoho šestistupňového pásu je zřejmý z obrázku (viz. Obr. 10-15).

Graf na následujícím obrázku (viz Obr. 10-16) opět znázorňuje závislost délkového zkreslení na zeměpisné šířce a hodnotě λ . Na území ČR dosahuje délkové zkreslení hodnot -0.40 m.km^{-1} uprostřed 3. poledníkového pásu (na poledníku $\lambda = 15^\circ$), na okrajích tohoto pásu kolem potom kolem $0,20 \text{ m.km}^{-1}$.



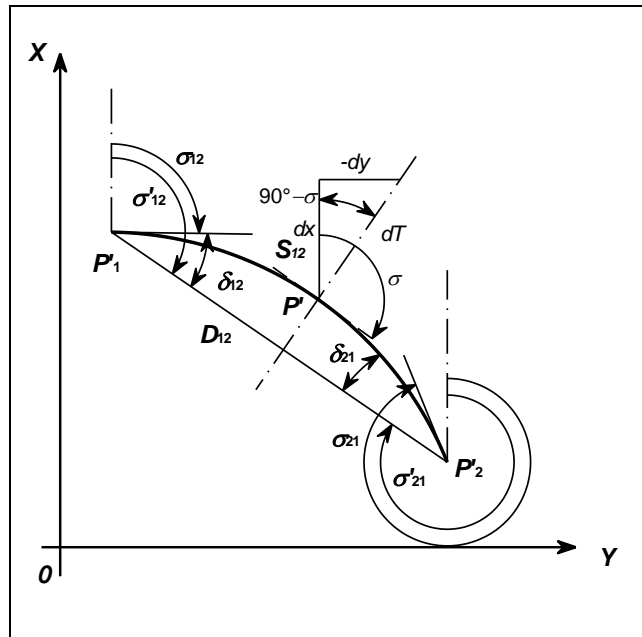
Obr. 10-15 Zobrazení ekvideformát délkového zkreslení zobrazení UTM (převzato z [23])



Obr. 10-16 Graf délkového zkreslení v zobrazení UTM

10.6 Směrová a délková korekce geodetické čáry

Teorie směrové a délkové korekce geodetické čáry v rovině konformních zobrazení je uvedena v odstavci 4.4 V následujícím textu jsou pouze upřesněny postupy výpočtů příslušných korekcí v rovině gaučova zobrazení, resp. zobrazení UTM. K upřesnění postupů je využita kopie obrázku (viz Obr. 4-5) z odstavce 4.4



Obr. 10-17 Směrová korekce geodetické čáry (kopie)

Směrová korekce geodetické čáry v Gaussově zobrazení

Křivost obrazu geodetické čáry lze vyjádřit rovnicí (4-29). Pokud se za m dosadí z rovnice (10-52) a budou se uvažovat pouze první dva členy, bude:

$$\Gamma = \left(1 - \frac{y^2}{2R^2} \right) \frac{dm}{dT}$$

Protože m je funkcí y a y je funkcí T , platí:

$$\frac{dm}{dT} = \frac{dm}{dy} \frac{dy}{dT} \quad (10-59)$$

Z rovnice (10-54) bude:

$$\frac{dm}{dy} = \frac{y}{R^2}$$

Podle obrázku (Obr. 10-17), kde je zobrazen diferenciální úsek obrazu geodetické čáry v bodě P' , bude:

$$\frac{-dy}{dT} = \sin(90^\circ - \sigma), \text{ z čehož}$$

$$\frac{dy}{dT} = -\cos \sigma$$

Po dosazení do (4-29) se obdrží:

$$\Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos \sigma + \frac{y^3}{2R^4} \cos \sigma \quad (10-60)$$

Druhý člen v rovnici (10-60) lze zanedbat a křivost obrazu geodetické čáry v obecném bodě lze vyjádřit jako:

$$\Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos \sigma \quad (10-61)$$

Je tedy možné vypočítat hodnoty Γ v počátečním a koncovém bodě obrazu geodetické čáry:

$$\Gamma_1 = -\frac{y_1}{R^2} \cos \sigma_{12} \quad (10-62)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{y_2}{R^2} \cos \sigma_{21} \quad (10-63)$$

Obraz geodetické čáry se zakřivuje velmi málo, proto je možné při výpočtu uvážit, že:

$$\sigma_{12} \approx \sigma'_{12} \approx \sigma_{21} - \pi$$

a uvedené křivosti počítat

$$\Gamma_1 = -\frac{y_1}{R^2} \cos \sigma'_{12} \quad (10-64)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{y_2}{R^2} \cos \sigma'_{12} \quad (10-65)$$

Hodnota délka přímé spojnice koncových bodů a $\cos \sigma'_{12}$ se vypočítá z jejich rovinných pravoúhlých souřadnic:

$$D_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\cos \sigma'_{12} = \frac{x_2 - x_1}{D_{12}}$$

Ize po dosazení do (4-56) vypočítat směrovou korekci na počátečním bodě:

$$\delta_{12} = \frac{1}{6R^2} (x_1 - x_2)(2y_1 + y_2) \quad (10-66)$$

Obdobně by se určila směrová korekce na koncovém bodě ve tvaru:

$$\delta_{21} = \frac{1}{6R^2} (x_2 - x_1)(2y_2 + y_1) \quad (10-67)$$

kde hodnota R je vztažena ke středu geodetické čáry.

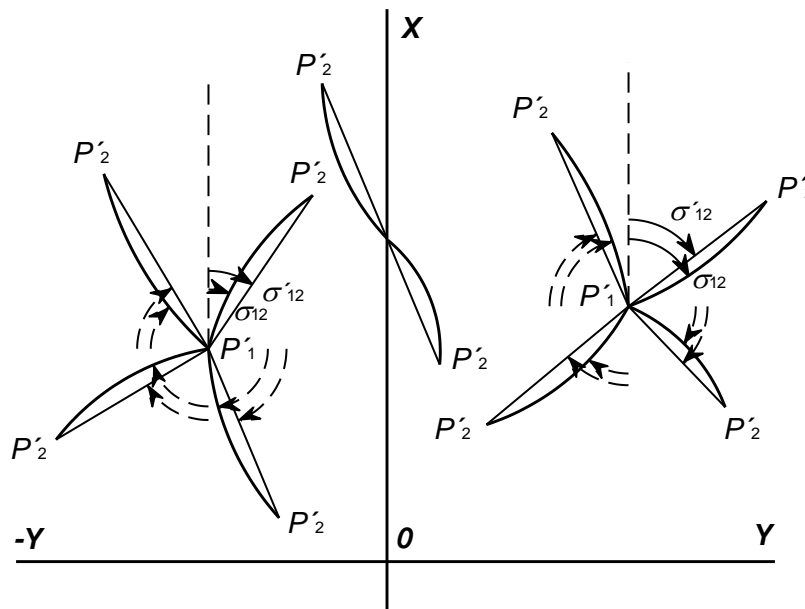
Vzorce (10-66) a (10-67) jsou vhodné pro použití při délce geodetických čar několik desítek kilometrů a jejich přesnost za uvedených podmínek je do $\pm 0,001''$. Pokud by bylo nutné pracovat s delšími čarami, je nutné použít přesnější vzorce uvedené například v [22].

Směrovou korekci je nutné zavádět do výpočtů vždy se správným znaménkem daným vzorcem (4-33). Podle vztahu (4-55) je možné sestavit následující tabulku (Tabulka 10-2):

Tabulka 10-2 Tabulka rozdílů souřadnic koncových bodů geodetické čáry a znaménka směrové korekce

		$2y_1 + y_2$	
		+	-
$x_2 - x_1$	+	$-\delta_{12}$	$+\delta_{12}$
		$\sigma'_{12} < \sigma_{12}$	$\sigma'_{12} > \sigma_{12}$
	-	$+\delta_{12}$	$-\delta_{12}$
		$\sigma'_{12} > \sigma_{12}$	$\sigma'_{12} < \sigma_{12}$

Pokud se zobrazí informace z tabulky graficky, je zřejmé, že se obraz geodetické čáry vždy konkávně zakřivuje k osovému poledníku daného pásu (Obr. 10-18).



Obr. 10-18 Zakřivení obrazu geodetické čáry v jednom poledníkovém pásu

10.6.1 Směrová korekce v zobrazení UTM

Směrová korekce v zobrazení UTM se počítá v podstatě podle stejných vzorců jako v Gaussově zobrazení, avšak s uvážením měřítkového faktoru m_0 . Rovnice postačující pro běžnou geodetickou praxi mají tvar:

$$\delta_{12} = \frac{1}{6m_0^2 R^2} (N_1 - N_2)(2E_1 + E_2) \quad (10-68)$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{6m_0^2 R^2} (N_2 - N_1)(2E_2 + E_1) \quad (10-69)$$

Pokud by byla nutná vyšší přesnost, je možné využít přesnější vztahy uvedené například v [16]. Rovněž zakřivení obrazu geodetické čáry je stejné jako na obrázku (viz Obr. 10-18).

10.7 Délková korekce geodetické čáry

Hodnoty délkového zkreslení se počítají podle jednoho ze vzorců (10-52) až (10-54) u Gaussova zobrazení, resp. (10-55) až (10-58) u zobrazení UTM. Pro praktické výpočty za použití rovinných pravouhlých souřadnic lze výrazy pro výpočet délkové korekce dále upravovat.

Vyjádří-li se m pomocí těchto souřadnic, lze pro *Gaussovo zobrazení* psát:

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2R^2}$$

$$m_{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}{2R^2} = 1 + \frac{y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2}{8R^2}$$

$$m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2R^2}$$

a po dosazení například do (4-64) a úpravě se získá rovnice:

$$S_{12} = s_{12} + \frac{s_{12}}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \quad (10-70)$$

kde hodnotu R lze počítat ke středu čáry a zaokrouhlovat ji na celé kilometry. Výsledná rovnice pro výpočet délkové korekce potom získá tvar:

$$\delta_{s_{12}} = S_{12} - s_{12} = \frac{s_{12}}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \quad (10-71)$$

Pokud se v zobrazení *UTM* použije obdobný postup, potom se vypočítá délka obrazu geodetické čáry podle upraveného vztahu (10-72) a z takto určené hodnoty délky obrazu geodetické čáry se vypočítá výsledná délková korekce.

$$S_{12} = m_0 s_{12} + \frac{s_{12}}{6m_0 R^2} (E_1^2 + E_1E_2 + E_2^2) \quad (10-72)$$

Uvedené vztahy pro výpočet délkové korekce jsou použitelné pro běžné geodetické výpočty do vzdálenosti 20 km. Pro delší vzdálenosti nebo k dosažení vyšší přesnosti výpočtu je nutné použít přesnější vzorce uvedené například v [16] a [23].

10.8 Mezipásmové transformace

Protože v Gaussově zobrazení (i v jeho variantě UTM) má každý pás svoji souřadnicovou soustavu, je nutné v praxi poměrně často řešit *transformaci souřadnic* bodů ze souřadnicové soustavy jednoho pásu do souřadnicové soustavy druhého pásu. Tuto transformaci je možné řešit několika způsoby. V dřívějším období se nejčastěji používaly různé varianty *rovinné transformace* (viz. například kapitola *Transformace zobrazení* v [9] a [23]). Pro tyto transformace byly zpracovány i výpočetní tabulky.

K rovinným transformacím lze počítat i *grafickou transformaci* použitou na vojenských topografických mapách, kde v rámu těchto map (v tzv. *překrytovém pásmu*) jsou vykresleny rysky kilometrových čar sousedního poledníkového pásu. Jejich spojením se na mapu vykreslí celá kilometrová síť a pomocí ní je potom možné odečítat souřadnice i v souřadnicovém systému tohoto pásu.

V současné době je nejběžnější *univerzální metoda transformace* podle schématu:

$$x', y' \rightarrow \varphi, \lambda \rightarrow x'', y'', \text{ resp.}$$

$$N', E' \rightarrow \varphi, \lambda \rightarrow N'', E''$$

Pro jednotlivé kroky se použijí vztahy (10-20), (10-21) a (10-35), (10-36) pro Gaussovo zobrazení a pro zobrazení UTM potom vztahy (10-23), (10-22) a (10-37), (10-38).

Poznámka: Při transformaci jednoho bodu do souřadnicového systému jiného pásu je nutné uvážit rychlý nárůst délkového zkreslení, což v důsledku může ovlivnit i přesnost výpočtů v rovinných souřadnicích.

11. Křovákovo zobrazení

Po vzniku Československé republiky v roce 1918 byly budovány i nové geodetické a kartografické základy nového státního mapového díla, které se měly použít i pro katastrální účely. V roce 1922 navrhl *Křovák (Josef Křovák 1884 až 1951) konformní kuželové zobrazení v obecné poloze* jako součást geodetického referenčního systému *jednotné trigonometrické sítě katastrální (S-JTSK)*. Toto zobrazení se využívalo do roku 1938 a bylo znovu zavedeno po druhé světové válce. S výjimkou padesátých a šedesátých let 20. století se používá dodnes. Zobrazení bylo definováno s ohledem na protáhlý a mírně vůči zeměpisným rovnoběžkám stočený tvar území bývalé Československé republiky (včetně tzv. Zakarpatské Ukrajiny) tak, aby minimalizovalo na tomto území délkové zkreslení. Dnes je používáno pouze v České a Slovenské republice.

V současné době jsou v tomto zobrazení vydávána státní mapová díla určená pro státní správu a samosprávu (viz Nařízení vlády ČR č.430/2006 - [17]). Jedná se zejména o Státní mapu v měřítku 1 : 5 000, Základní mapy ČR v měřítkách 1 : 10 000, 1 : 50 000, 1 : 100 000 nebo 1 : 200 000 a Mapu ČR v měřítku 1 : 500 000. V tomto zobrazení jsou také poskytována digitální data z databáze ZABAGED.

11.1 Základní charakteristiky zobrazení

V dále uvedených vzorcích jsou použité původní symboly, které zavedl Křovák. Zejména pro rovinné polární souřadnice se používají symboly R, D' namísto ρ, ε a pro poloměr referenční koule r namísto původního R .

Křovákovo zobrazení je *dvojitě zobrazení*, které je možné vyjádřit schématickým zápisem:

$$\varphi, \lambda \rightarrow U, V \rightarrow \check{S}, D \rightarrow R, D' \rightarrow x, y$$

Výchozí referenční plochou je *Besselův elipsoid*, který je nejprve *konformně zobrazen* na referenční kouli. Na ní jsou definovány *kartografické souřadnice*, pomocí kterých je povrch koule transformován do *zobrazovací roviny* konformním kuželovým zobrazením. Poslední fází je transformace z polárních rovinných souřadnic na pravoúhlé. V následujících odstavcích jsou popsány jednotlivé fáze.

11.2 Zobrazovací rovnice

11.2.1 Zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli

V první fázi je Besselův elipsoid konformně zobrazen na referenční kouli s jednou nezkreslenou rovnoběžkou $\varphi_0 = 49^\circ 30'$, která probíhá přibližně středem území původní Československé republiky. Poloměr referenční koule je

$$r = \sqrt{M_0 N_0}$$

K transformaci souřadnic jsou použity rovnice odvozené v kapitole 5:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) = k \left[\operatorname{tg}^\alpha\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]$$

$$V = \alpha \lambda$$

Konstanty zobrazení jsou:

$$r = 6\,380\,703,6105 \text{ m}$$

$$k = 1,00341\,91640$$

$$\alpha = 1,00059\,7498372$$

Po transformaci odpovídá původní hodnotě φ_0 nezkreslené rovnoběžky hodnota na referenční kouli $U_0 = 49^\circ 27' 35'', 84625$.

11.2.2 Transformace zeměpisných souřadnic na referenční kouli na kartografické souřadnice

Na referenční kouli je definována souřadnicová soustava kartografických souřadnic \check{S}, D . Tato soustava vyhovuje protáhlému a mírně stočenému tvaru původní republiky. Osu území tvoří *základní kartografická rovnoběžka* \check{S}_0 , z jejíhož tvaru byla vypočítána poloha *kartografického pólu* K podle postupu uvedeném v odstavci 1.2.2.a. Na této kartografické rovnoběžce byl za nejvýchodnějším cípem republiky, který tvořil okraj tehdejší speciální mapy 1:75 000, zvolen bod A , jehož zeměpisné souřadnice jsou:

$$\varphi_A = 48^\circ 15'$$

$$\lambda_A = 42^\circ 30' \text{ východně Ferra (} 24^\circ 50' \text{ východně Greenwich).}$$

Tento bod má na referenční kuli souřadnice:

$$U_A = 48^\circ 12' 42'', 69689$$

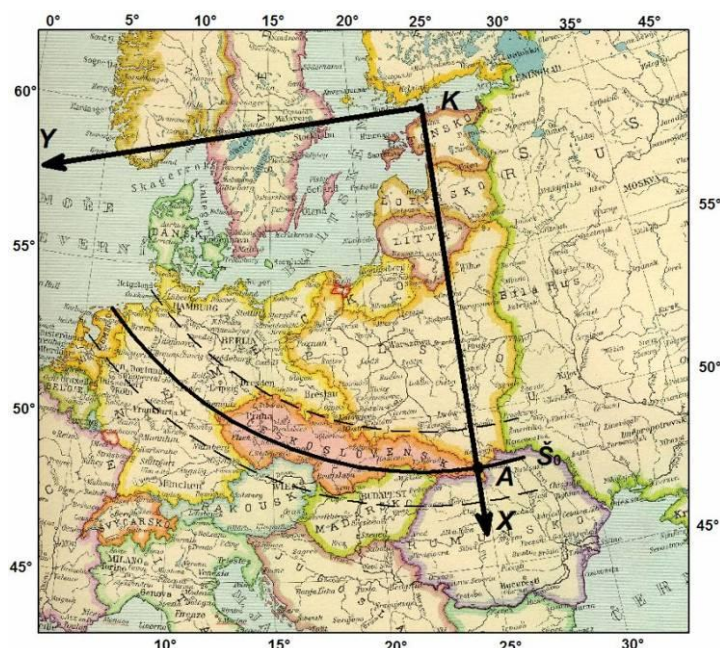
$$V_A = 42^\circ 31' 31'', 41725$$

Z polohy základní kartografické rovnoběžky byla vypočítána poloha *kartografického pólu* K . Pól leží na stejném poledníku jako bod A je od něho na sever o $11^\circ 30'$. Jeho zeměpisné souřadnice na kouli jsou:

$$U_K = 59^\circ 42' 42'', 69689$$

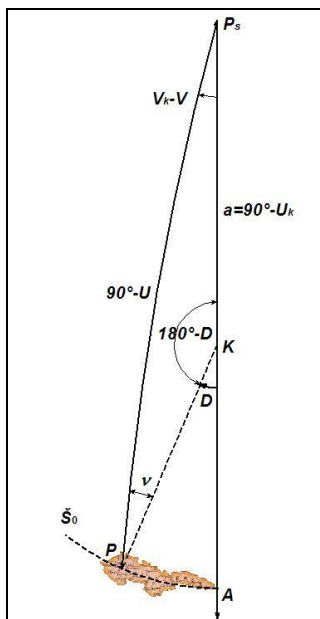
$$V_K = 42^\circ 31' 31'', 41725$$

Základní kartografická rovnoběžka má hodnotu $\check{S}_0 = 78^\circ 30'$. Celé území bývalého Československa leželo potom v úzkém pásu vymezeném dvěma kartografickými rovnoběžkami v relativně malé vzdálenosti $\Delta\check{S} = 2^\circ 31'$, což je asi 280 km. Uvedené hlavní prvky zobrazení dokumentuje obrázek (viz. Obr. 11-1).



Obr. 11-1 Základní prvky Křovákova zobrazení

Zeměpisné souřadnice U , V jsou transformovány na kartografické souřadnice \check{S} , D pomocí rovnic (1-24) a (1-25). Křovák jej pouze upravil zavedením zenitové vzdálenosti a ($a = 90^\circ - U_K$) kartografického pólu (viz Obr. 11-2).



Obr. 11-2 Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické

Upravené rovnice potom budou:

$$\sin \check{S} = \sin U \cos a + \cos U \sin a \cos(V - V_k) \quad (11-1)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k) \quad (11-2)$$

11.2.3 Transformace do zobrazovací roviny

Pro zobrazení referenční koule je použito jednoduché konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou, která se z důvodů zmenšení absolutní hodnoty zkreslení dodatečně zkresluje pomocí měřítkového faktoru $m_0 = 0,9999$. Pro výpočty se používají vztahy (7-31), (7-5), (7-34) a (7-15). Protože se však jedná o obecnou polohu zobrazení, mají zobrazovací rovnice a další vztahy následující tvary:

$$R = R_0 \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}}{2} + 45^\circ \right)} \right]^n \quad (11-3)$$

$$D' = nD \quad (11-4)$$

kde:

$$R_0 = m_0 r \cotg \check{S}_0 \quad (11-5)$$

$$n = \sin \check{S}_0 \quad (11-6)$$

Hodnota $R_0 = 1\,298\,039,0046$ m a $n = 0,97992\,47046$.

Poznámka: Použitím měřítkového se zobrazení mění v zobrazení se dvěma nezkreslenými kartografickými rovnoběžkami o hodnotách $\check{S}_1 = 79^\circ 18' 03''$ a $\check{S}_2 = 77^\circ 40' 50''$.

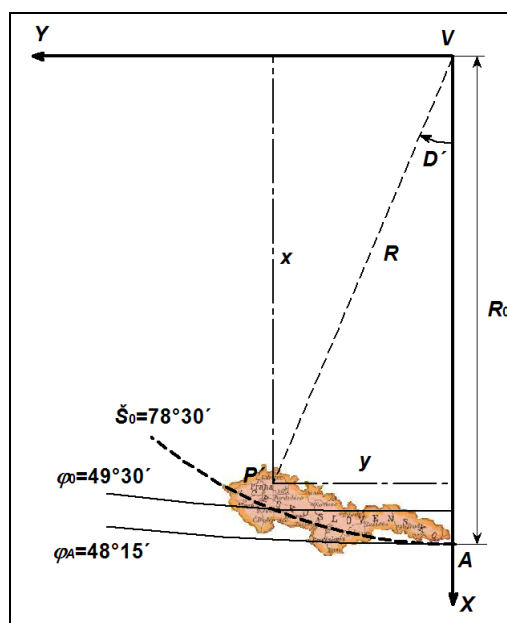
11.2.4 Převod rovinných polárních souřadnic na pravoúhlé

Polární souřadnice R , D' jsou transformovány na rovinné pravoúhlé x , y v souřadné soustavě, kde osa X je umístěna v obraze poledníku λ_k a její počátek je v obraze kartografického pólu K . *Kladný směr* osy je na *jih*. Osa Y je na ní kolmá a její *kladná orientace* je na *západ*. Polární souřadnice jsou transformovány podle vzorců:

$$x = R \cos D' \quad (11-7)$$

$$y = R \sin D' \quad (11-8)$$

Celé území republiky potom leží v prvním kvadrantu (viz Obr. 11-3).



Obr. 11-3 Poloha rovinného pravoúhlého systému v Křovákově zobrazení

Obrazem kartografických poledníků jsou polopřímky vycházející z obrazu kartografického pólu, obrazem kartografických rovnoběžek jsou soustředné kružnice se středem opět v obraze kartografického pólu. Obrazem zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složité křivky, které však na zobrazovaném území České a Slovenské republiky mohou být na mapách středních měřítek nahrazeny přímkami (poledníky) nebo soustřednými kružnicemi (rovnoběžky), jejichž zakřivení je téměř totožné se zakřivením obrazu rovnoběžek u Gaussova zobrazení.

11.3 Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím

Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím se řeší postupně podle schématu (Kratochvíl: Polohové geodetické sítě, 2000):

$$x, y \rightarrow R, D' \rightarrow \check{S}, D \rightarrow U, V \rightarrow \varphi, \lambda$$

Nejprve se ze vztahů (11-7) a (11-8) vypočítají polární souřadnice:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11-9)$$

$$D' = \arctg \frac{y}{x} \quad (11-10)$$

Poté se s využitím vztahů (7-31) a (7-5) vypočítají kartografické souřadnice na referenční kouli:

$$\check{S} = 2 \left\{ \arctan \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^\circ \right) \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right] - 45^\circ \right\} \quad (11-11)$$

$$D = \frac{D'}{\sin \check{S}_0} \quad (11-12)$$

Transformaci kartografických souřadnic na zeměpisné lze řešit pomocí vztahů ze sférické trigonometrie (viz. Obr. 11-2):

$$U = \arcsin(\cos a \sin \check{S} - \sin a \cos \check{S} \cos D) \quad (11-13)$$

$$V = V_k - \arcsin \left(\frac{\cos \check{S}}{\cos U} \sin D \right) \quad (11-14)$$

Výpočet zeměpisné šířky je nutné provést v několika iteracích, protože argument φ je na obou stranách rovnice. Jeden z možných postupů je následující:

$$\varphi^{(0)} = 2 \left\{ \arctan \left[\frac{1}{k} \left(\tan \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \right) \left(\frac{1 + e \sin U}{1 - e \sin U} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45^\circ \right\} \quad (11-15)$$

$$\varphi^{(i)} = 2 \left\{ \arctan \left[\frac{1}{k} \left(\tan \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi^{(i-1)}}{1 - e \sin \varphi^{(i-1)}} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 45^\circ \right\},$$

kde $i = 1, 2, \dots$

$$\lambda = \frac{V}{\alpha} \quad (11-16)$$

Zpravidla po třetí iteraci ve vzorci (11-15) se získá dostatečně přesná hodnota zeměpisné šířky. Vypočítaná hodnota zeměpisné délky λ je opět vztažena k poledníku Ferra.

11.4 Meridiánová konvergence

Podle obrázku (Obr. 11-4) lze odvodit přesný vzorec pro výpočet *meridiánové konvergence* γ ve tvaru:

$$\gamma = D' - \nu. \quad (11-17)$$

Za D' je možné dosadit z rovnice (11-10). Úhel ν je možné vypočítat ze sférického trojúhelníku P_s, K, P (viz Obr. 11-2). Tento úhel se vzhledem k tomu, že se jedná o konformní zobrazení, nezkrsluje. Potom:

$$\sin \nu = \frac{\sin a}{\cos U} \sin D = \frac{\sin a}{\cos \check{S}} \sin(V_k - V) \quad (11-18)$$

Vzhledem k tomu, že sklon obrazu zeměpisných poledníků vůči základnímu poledníku Křovákova zobrazení se příliš neliší od sklonu obrazu poledníků vůči osovému poledníku šestistupňového pásu Gaussova zobrazení, je možné pro výpočet, kdy není nutná vysoká přesnost, použít i první dva členy ze vzorce (10-44) z kapitoly 10:

$$\gamma = \sin \varphi \lambda \quad (11-19)$$

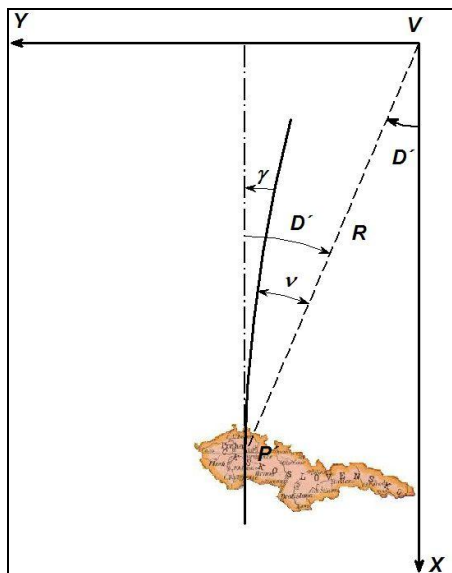
ovšem s tím, že λ je odečítána od poledníku $\lambda_k = 42^\circ 30'$ východně Ferru.

Konvergenci je možné vypočítat i z rovinných pravoúhlých souřadnic pomocí empirického vzorce:

$$\gamma = 0,008255y + 2,362 \frac{y}{x} \quad (11-20)$$

Souřadnice se dosazují v kilometrech a jeho přesnost je 2'.

Na celém území bývalého Československa konvergence má pouze *záporné znaménko*. Protože tato skutečnost je obecně známá, hodnota se konvergence často uvádí bez znaménka. Na území ČR konvergence dosahuje hodnot od $-4^\circ 33'$ na východě území do $-9^\circ 35'$ na jeho západě.



Obr. 11-4 Meridiánová konvergence Křovákova zobrazení

11.5 Zákony zkreslení

V Křovákově zobrazení opět stačí vypočítat pouze *délkové zkreslení m*. *Plošné zkreslení* bude jeho kvadrátem a *úhlové zkreslení* je zde nulové. Délkové zkreslení vzniká jednak při zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli, jednak při zobrazení referenční koule do roviny.

Zkreslení při zobrazení referenčního elipsoidu na referenční kouli v rozsahu území bývalého Československa je v podstatě zanedbatelné a činí maximálně $0,07 \text{ mm.km}^{-1}$ v absolutní hodnotě. V běžných výpočtech se neuvažuje.

Při zobrazení referenční koule do zobrazovací roviny kuželového zobrazení má v případě Křovákova zobrazení tvar:

$$m = \frac{nR}{r \sin \tilde{S}} \quad (11-21)$$

Při odvozování Křovákova zobrazení byl požadavek takový, aby na celém území bývalého Československa dosahovalo délkové zkreslení v absolutní hodnotě maximálně 10 cm na 1 km. Tento požadavek se nepodařilo úplně splnit. Na základní kartografické rovnoběžce je zkreslení -10 cm.km^{-1} , na severních a jižních výběžcích republiky je dosaženo hodnot 14 cm.km^{-1} . Nezkreslené rovnoběžky jsou vzdálené od základní rovnoběžky 89 km na sever a 91 km na jih. Ekvideformáty jsou soustředné kružnice se středem v obraze kartografického pólu.

Křovákovo zobrazení je vhodné pro území bývalého Československa, případně pro území ležící v úzkém pásu kolem základní kartografické rovnoběžky. Ve větší vzdálenosti od této rovnoběžky zkreslení velmi rychle narůstá (viz teorie kuželového zobrazení) a již ve vzdálenosti 20 km dosahuje jeho hodnota $0,5 \text{ m.km}^{-1}$. Proto je toto zobrazení pro jiná území nevhodné.

12. Používaná zobrazení v Armádě České republiky a v NATO

Následující text pojednává o standardních zobrazeních používaných v *Armádě České republiky (AČR)* a v armádách *Organizace atlantické smlouvy (NATO)*.

Výchozí referenční plochou pro všechna zobrazení je elipsoid WGS84. Zobrazení většiny map středních měřítek je buďto *UTM* nebo *UPS*. Pro přehledné a letecké mapy je v souladu se standardy mezinárodní organizace pro civilní letectví (*International Civil Aviation Organization – ICAO*) používáno *Lambertovo konformní kuželové zobrazení (Lambert Conformal Conic Projection – LCC)* o dvou nezkreslených rovnoběžkách. Teoretické principy všech zobrazení byly uvedeny v příslušných předchozích kapitolách. V následujících odstavcích jsou proto pouze tato zobrazení upřesněna.

12.1 Zobrazení UTM

Základní zobrazení používané v AČR je zobrazení UTM v geodetickém referenčním systému WGS84. Jeho podrobný popis je uveden v kapitole 10. Zobrazení UTM je používáno pro všechny topografické mapy, dále pro speciální (tematické) mapy, které mají podklad topografickou mapu, a pro většinu grafických výstupů z digitálních modelů území, které jsou v AČR používány. V tomto zobrazení (a v celém geodetickém referenčním systému) pracuje i většina systémů velení a řízení, pokud používají lokalizační data.

Toto zobrazení je jedním ze standardních zobrazení používaných v rámci NATO. Je používáno pro stejné účely tak, jak je popsáno v předchozím textu. Zobrazení UTM se používá od 84° severní zeměpisné šířky (od $84^\circ 30'$ z důvodů překrytu se zobrazením UPS na severní polokouli) po 80° jižní zeměpisné šířky (po $80^\circ 30'$ opět z důvodů překrytu se zobrazením UPS na jižní polokouli).

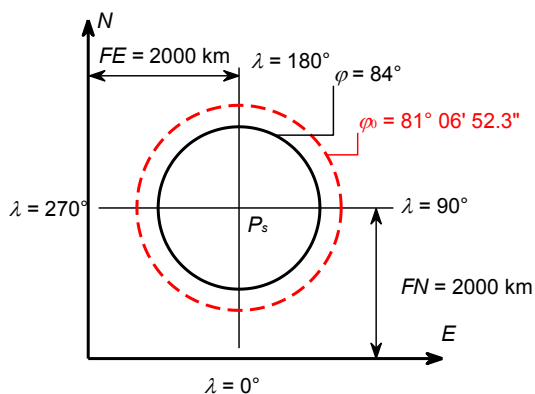
12.2 Zobrazení UPS

Pro polární oblasti kolem severního a jižního zeměpisného pólu je standardizované zobrazení konformní azimutální zobrazení s konstantním zkreslením na pólu. Toto zobrazení se nazývá *Universal Polar Stereographic (UPS)* a je používáno od 84° (od $83^\circ 30'$) do 90° severní zeměpisné šířky a od 80° (od $79^\circ 30'$) do 90° jižní zeměpisné šířky.

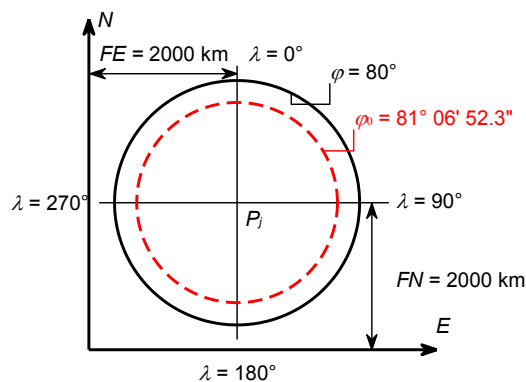
Zobrazení se používá z elipsoidu WGS84. Zobrazovací rovnice vycházejí z teorie konformního azimutálního zobrazení popsaného v odstavci 8.4 modifikovaného ovšem na zobrazení z elipsoidu. Při jeho definici se použila verze konstantního délkového zkreslení na pólech v hodnotě $m_0 = 0,994$, což odpovídá variantě jedné nezkreslené rovnoběžky s hodnotou $\varphi_0 = 81^\circ 06' 52.3''$ severní nebo jižní zeměpisné šířky.

Poznámka: Na severní polokouli tím dochází k situaci, že nezkreslená rovnoběžka je mimo zobrazované území [12].

Počátek rovinné souřadnicové soustavy je položen do obrazu severního (jižního) pólu a souřadnicové osy leží v obrazech poledníků 0° a 180° - osa N a 90° a 270° osa E , přičemž poloha osy N je na severní a jižní polokouli vzájemně otočená. K rovinným pravoúhlým souřadnicím jsou připočítávány konstanty o velikosti 2000 km tak, aby celé zobrazované území leželo v 1. kvadrantu. Tyto konstanty jsou označeny FN (False Northing) a FE (False Easting) (viz. Obr. 12-1 a Obr. 12-2).



Obr. 12-1 Zobrazení UPS a poloha souřadnicových os na severní polokouli



Obr. 12-2 Zobrazení UPS a poloha souřadnicových os na jižní polokouli

12.2.1 Zobrazovací rovnice zobrazení UPS

Vzhledem k vysokým zeměpisným šířkám se v zobrazovacích rovnicích počítá se „zenitovou vzdáleností“ z , která v tomto případě je však *doplňkem izometrické šířky* q do 90° . Její rovnice bude mít tvar:

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (12-1)$$

Vlastní zobrazovací rovnice potom budou:

$$\rho = m_0 C_0 \operatorname{tg} \frac{z}{2} \quad (12-2)$$

$$\varepsilon = \lambda$$

kde konstanta C_0 je počítána podle vztahu:

$$C_0 = \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{e/2} \quad (12-3)$$

Konstanty a , e v rovnicích (12-1) (12-3) jsou parametry elipsoidu.

Transformace do rovinných pravoúhlých souřadnic je již stejná jako u všech azimutálních zobrazení. S použitím výše uvedených označení souřadnic bude mít tvar:

$$\begin{aligned} N &= FN - \rho \cos \varepsilon, && \text{pro severní polokouli} \\ N &= FN + \rho \cos \varepsilon, && \text{pro jižní polokouli} \\ E &= FE + \rho \sin \varepsilon, && \text{pro obě polokoule} \end{aligned} \quad (12-4)$$

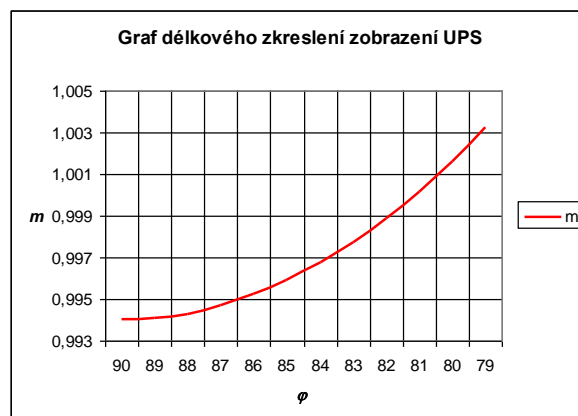
Poledníková konvergence γ je velikostí rovna zeměpisné délce. Na severní polokouli má i stejné znaménko, na jižní má znaménko opačné.

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda, && \text{pro severní polokouli} \\ \gamma &= -\lambda, && \text{pro jižní polokouli} \end{aligned} \quad (12-5)$$

Délkové zkreslení je počítáno podle vztahu:

$$m = \frac{\rho}{N_{el} \cos \varphi} \quad (12-6)$$

kde N_{el} je příčný poloměr křivosti elipsoidu. Na následujícím obrázku (Obr. 12-3) je jeho graf.



Obr. 12-3 Graf délkového zkreslení zobrazení UPS

12.2.2 Inverzní funkce k zobrazovacím rovnicím

V případě výpočtu zeměpisných souřadnic γ , λ z rovinných pravoúhlých E , N se postupuje následujícím způsobem:

Vypočítají se rovinné pravoúhlé souřadnice vztažené k pólům:

$$\begin{aligned} \Delta N &= N - FN \\ \Delta E &= E - FE \end{aligned} \quad (12-7)$$

a z nich je možné vypočítat přímo zeměpisnou délku λ . Přitom je však nutné uvážit, zda se počítá na severní nebo na jižní polokouli a zda počítaný bod neleží na poledníku 90° východní

nebo západní délky. Pokud je počítaný bod současně zeměpisným pólem, potom zeměpisnou délku není pochopitelně možné vypočítat. Z tohoto vyplývá následující postup:

- pokud $\Delta N = 0$ a $\Delta E \neq 0$, potom $\lambda = 90^\circ$ v.d. nebo $\lambda = 90^\circ$ z.d. podle znaménka ΔE (viz. Obr. 12-1 nebo Obr. 12-2);
- pokud $\Delta N = 0$ a $\Delta E = 0$, potom λ není definovaná;
- pokud $\Delta N \neq 0$, potom:

$$\lambda' = \operatorname{arctg} \frac{\Delta E}{-\Delta N} \quad \text{pro severní polokouli} \quad (12-8)$$

$$\lambda' = \operatorname{arctg} \frac{\Delta E}{\Delta N} \quad \text{pro jižní polokouli} \quad (12-9)$$

V případě, že se pro výpočet použije funkce arctg s jedním argumentem (do výpočtu vstupuje přímo podíl), výsledkem je úhel λ' , jenž je v rozsahu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Zeměpisná délka se potom určí podle schématu:

$$\lambda = \lambda', \quad \text{pokud jmenovatel ve zlomku je kladný} \quad (12-10)$$

$$\lambda = \pi + \lambda', \quad \text{pokud } \Delta E > 0 \text{ a } \lambda' < 0 \quad (12-11)$$

$$\lambda = -\pi + \lambda', \quad \text{pokud } \Delta E < 0 \text{ a } \lambda' > 0 \quad (12-12)$$

V případě, že se pro výpočet použije funkce arctg se dvěma argumenty (čitatel i jmenovatel vstupují do výpočtu samostatně), potom λ je přímo rovna λ' v rozsahu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Zeměpisná šířka φ se počítá postupně s výjimkou hodnoty $\Delta N = 0$, kdy $\varphi = 90^\circ$. Nejprve se vypočítá ρ podle jednoho z vztahů:

$$\rho = |\Delta E|, \quad \text{jestliže } \Delta N = 0 \quad (12-13)$$

$$\rho = |\Delta N|, \quad \text{jestliže } \Delta E = 0 \quad (12-14)$$

$$\rho = \left| \frac{\Delta E}{\sin \lambda} \right|, \quad \text{ve všech ostatních případech} \quad (12-15)$$

Dále se vypočítá hodnota z a izometrické šířky q :

$$z = 2 \operatorname{arctg} \frac{\rho}{m_0 C_0} \quad (12-16)$$

$$q = \frac{\pi}{2} - z \quad (12-17)$$

Výsledná zeměpisná šířka se potom vypočítá podle vztahu:

$$\varphi = q + A_1 \sin 2q + B_1 \sin 4q + C_1 \sin 6q + D_1 \sin 8q \quad (12-18)$$

kde hodnoty A_1 , B_1 , C_1 a D_1 včetně konstanty C_0 platné pro elipsoid WGS84 jsou uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 12-1 Konstanty zobrazení UPS pro elipsoid WGS84

C_0	12 713 600,099 m
A_1	$3,356\ 551\ 469 \cdot 10^{-03}$

B₁	6,571 872 711.10 ⁻⁰⁶
C₁	1,764 564 339.10 ⁻⁰⁸
D₁	5,328 478 445.10 ⁻¹¹

12.3 Lambertovo konformní kuželové zobrazení

Třetím standardizovaným zobrazením pro mapy v AČR a NATO je *Lambertovo konformní kuželové zobrazení o dvou nezkreslených rovnoběžkách*. Zobrazení je vždy v pólové poloze, přičemž v zásadě se používají dvě varianty pro rovnoběžkové vrstvy široké 4° a 8°. Každá vrstva je samostatně zobrazena se dvěma předem danými nezkreslenými rovnoběžkami vzdálenými 1°20' od okrajů vrstvy. Základní rovnoběžka je střední rovnoběžka příslušné vrstvy.

V některých případech je požíváno i zobrazení s jinak definovanými vrstvami a nezkreslenými rovnoběžkami tak, aby celé zobrazované území státu leželo v jednom mapovém listě. To je i případ *letecké orientační mapy 1:500 000 (LOM500)* (viz. Tabulka 12-2).

Princip zobrazení z referenční koule je uveden v odstavci 7.4.2 . Pokud se použije referenční elipsoid, budou zobrazovací rovnice (7-32) a (7-5) ve tvaru:

$$\rho = \rho_0 e^{n(q_0 - q)} \quad (12-19)$$

$$\varepsilon = n\lambda \quad (12-20)$$

kde q je izometrická šířka na referenčním elipsoidu. Konstanty zobrazení se v tomto případě počítají podle výrazů:

$$n = \frac{\ln(N_1 \cos \varphi_1) - \ln(N_2 \cos \varphi_2)}{q_1 - q_2} \quad (12-21)$$

$$\rho_0 = \frac{N_1 \cos \varphi_1 \Phi_1^n}{n\Phi_0^n} = \frac{N_2 \cos \varphi_2 \Phi_2^n}{n\Phi_0^n} \quad (12-22)$$

kde:

$$\Phi = e^q = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \quad (12-23)$$

Konstanty zobrazení jsou počítány pro každou vrstvu samostatně, a to jak pro vrstvy s intervalem 8°, tak pro vrstvy s intervalem 4°. Pro vrstvy, ve kterých leží Česká republika, parametry a konstanty zobrazení mají následující hodnoty:

Tabulka 12-2 Hodnoty základních parametrů pro Lambertovo konformní kuželové zobrazení pro území ČR

Interval vrstvy	φ_0	φ_1	φ_2	ρ_0 [m]	n
4°	50°	49°20'	50°40'	5361951	0,76606192
8°	52°	49°20'	54°40'	4986320	0,78829865
nestandardní (LOM500)	50°	48°40'	51°20'	5360498	0,76611438

K vyjádření zákonů zkreslení se použijí vztahy (7-33), která zde nabudou tvaru:

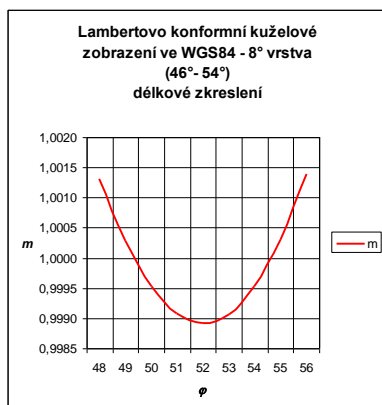
$$m = \frac{n\rho}{N \cos \varphi}$$

$$m_{pl} = m^2$$

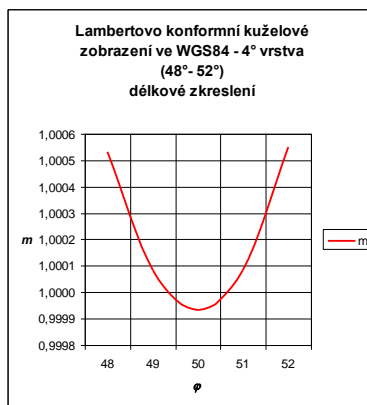
$$\Delta\omega = 0$$

(12-24)

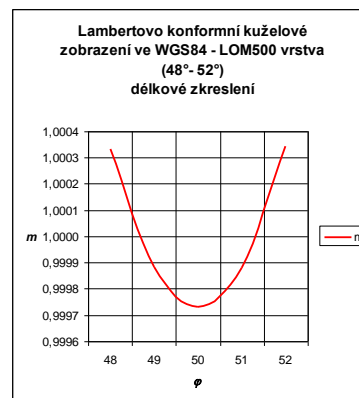
Na následujících obrázcích jsou grafy délkového zkreslení pro varianty zobrazení z předcházející tabulky (Tabulka 12-2).



Obr. 12-4 Graf zkreslení Lambertova konformního kuželového zobrazení pro 8° vrstvu z prostoru ČR



Obr. 12-5 Graf zkreslení Lambertova konformního kuželového zobrazení pro 4° vrstvu z prostoru ČR



Obr. 12-6 Graf zkreslení Lambertova konformního kuželového zobrazení pro LOM500 z prostoru ČR

Toto zobrazení je používáno u přehledných map jako například mapy World série 1404 1:500 000.

13. Transformace zobrazení

V kartografické praxi (obecně v zeměměřické nebo geografické praxi) může nastat situace, kdy je nutné na stejném území použít různé geodetické referenční systémy a různá zobrazení. Pro převod souřadnic z jednoho geodetického referenčního systému a jednoho zobrazení do jiného geodetického referenčního systému a jiného zobrazení se používají postupy obecně nazývané *transformace souřadnic*.

Podstata transformace souřadnic spočívá ve změně souřadnic bodů, aniž by došlo ke změně jejich polohy na zemské povrchu. Transformovat lze jak souřadnice reálných objektů a jevů tak i souřadnice fiktivních bodů, například rohů mapových listů, uzlových bodů zeměpisné sítě apod.

Z hlediska *matematické kartografie* je potřeba transformace souřadnic způsobena zejména následujícími příčinami:

1. Změna referenčního tělesa (zpravidla referenčního elipsoidu) v novém souřadnicovém systému při zachování použitého zobrazení. V důsledku toho se mění jak zeměpisné, tak i rovinné souřadnice.
2. Změna zobrazení polohy bodů do roviny při použití stejného referenčního tělesa v původním i novém souřadnicovém systému. V tomto případě se nemění zeměpisné souřadnice, mění se však rovinné souřadnice.

3. Změna zobrazení polohy bodů do roviny při současné změně i referenčního tělesa v původním i novém souřadnicovém systému. V tomto případě se mění jak zeměpisné, tak i rovinné souřadnice.

Poznámka: V geodetické praxi lze najít i další příčiny transformace souřadnic, které jsou uvedeny například v [14].

Podle charakteru změn a podle požadované přesnosti výstupních souřadnic lze v zásadě použít dvou metod transformací:

- prostorové transformace,
- rovinné transformace.

Vstupem a výstupem *prostorových transformací* jsou buďto *geocentrické souřadnice* nebo *zeměpisné souřadnice*. V obou případech je možné v těchto transformacích uvažovat i výšky bodů – nadmořské nebo elipsoidické – nebo uvažovat polohu bodů pouze na povrchu referenčních elipsoidů, resp. referenčních koulí. Do tohoto typu transformací se zařazují:

- tříprvková transformace
- sedmiprvková transformace,
- Moloděnského transformace,
- zjednodušená Moloděnského transformace.

Vlastní *prostorová transformace souřadnic* zpravidla probíhá podle následujícího *schématu*:

1. Výpočet zeměpisných souřadnic z rovinných pravoúhlých v původním zobrazení a v původním referenčním systému.
2. Výpočet zeměpisných souřadnic v novém referenčním systému při použití vhodného typu prostorové transformace. Použijí-li se tříprvková nebo sedmiprvková transformace, je nutné počítat i prostorové pravoúhlé souřadnice v původním a novém referenčním systému.
3. Transformace zeměpisných souřadnic do nového zobrazení v novém referenčním systému.

U *rovinných transformací* jsou vstupem i výstupem rovinné pravoúhlé souřadnice. Z hlediska použití v matematické kartografii lze do tohoto typu transformací zařadit:

- shodnostní transformaci,
- podobnostní transformaci,
- afínní transformaci.

K rovinným transformacím je možné zařadit i *interpolační metody* v pravidelných mřížkách, v jejichž uzlových bodech jsou předem vypočítány rozdíly mezi oběma systémy.

U všech transformací je nejprve nutné vypočítat jejich *parametry* – konstanty v transformačních rovnicích, tzv. *transformačních klíčích*. Parametry transformačních klíčů se počítají z dostatečného množství *identických bodů*, u nichž jsou známé souřadnice v obou systémech. Minimální počet identických bodů a znalost jejich souřadnic jejich jsou závislé na počtu proměnných v transformačních klíčích. Například pro tříprvkovou transformaci prostorových pravoúhlých souřadnic, kde jsou tři neznámé, je nutná znalost minimálně tří identických souřadnic. Teoreticky by stačilo mít pouze jeden identický bod se známými souřadnicemi X , Y a Z v obou systémech. Protože je však nutná kontrola správnosti výpočtu transformačního klíče, používají se vždy *nadbytečné počty* identických bodů, zpravidla vhodně rozmístěných po celém transformovaném území. Vypočtené parametry transformačního klíče se potom *vyrovnávají* vhodnou metodou, nejčastěji *metodou nejmenších čtverců (MNC)*.

13.1 Prostorové transformace

13.1.1 Prostorové pravouhlé souřadnice

V kapitole *Referenční plochy a souřadnicové soustavy* byly uvedeny základní souřadnicové soustavy v prostoru, v nichž se poloha bodu může vyjádřit v zeměpisných souřadnicích. Polohu bodu v prostoru lze však určit i v *prostorových pravouhlých souřadnicích* x , y , z . Reálně však určované body leží na zemském povrchu (někdy i nad ním či pod ním). Pokud se pracuje s reálnými body v terénu (se získanou polohou například z měření pomocí přijímače GPS), je nutné uvážit jejich výšky.

V praxi se nejčastěji pracuje s *nadmořskými výškami* H , tedy s výškami vztaženými k *základní hladinové ploše* daného výškového systému (například Baltského, Jaderského apod.). Tyto výšky si lze zjednodušeně představit jako vzdálenost od *střední hladiny* daného *moře* definovaného systému, která se nazývá *geoid* nebo *kvazigeoid* (viz Obr. 1-1).

Geoid ani kvazigeoid však nejsou jednoduše matematicky definovatelné plochy, neboť jejich tvar je dán fyzikálními zákony (rotací Země, gravitačními silami Země a okolního terénu). Proto se geoid nebo kvazigeoid nahrazují *referenčním elipsoidem*. Vzdálenost těchto dvou ploch pro daný bod se nazývá *výška kvazigeoidu (geoidu) nad elipsoidem* ζ . Vzdálenost bodu P od povrchu elipsoidu se potom nazývá *elipsoidická výška* H_{el} a lze ji počítat jako:

$$H_{el} = H + \zeta \quad (13-1)$$

Pro transformaci zeměpisných souřadnic na prostorové pravouhlé je někdy nutné tyto výšky zahrnout do výpočtů.

Prostorové pravouhlé souřadnice jsou definovány pro daný referenční elipsoid (nebo i referenční kouli). Počátek souřadnicového systému je ve středu elipsoidu, osa X leží v rovině rovníku a její kladná větev prochází průsečíkem rovníku a Greenwichského poledníku, osa Y leží též v rovině rovníku a je kolmá na osu X , její kladná větev prochází průsečíkem rovníku a poledníku 90° východní délky, osa Z prochází osou rotace elipsoidu a její kladná větev směřuje k severnímu pólu (Obr. 13-1).

Pokud se budou transformovat zeměpisné souřadnice φ , λ a výška H_{el} bodu P na souřadnice prostorové pravouhlé, bude platit podle [14]:

$$\begin{aligned} x &= (N + H_{el}) \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= (N + H_{el}) \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= [N(1 - e^2) + H_{el}] \sin \varphi \end{aligned} \quad (13-2)$$

Zpětný převod lze provést podle vzorců (13-3), kde se hodnoty φ , H_{el} a N počítají iteracemi:

$$\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 - e^2}\right)$$

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}$$

$$H_{el_0} = \frac{x}{\cos \varphi_0 \cos \lambda} - N_0 = \frac{y}{\cos \varphi_0 \sin \lambda} - N_0$$
(13-3)

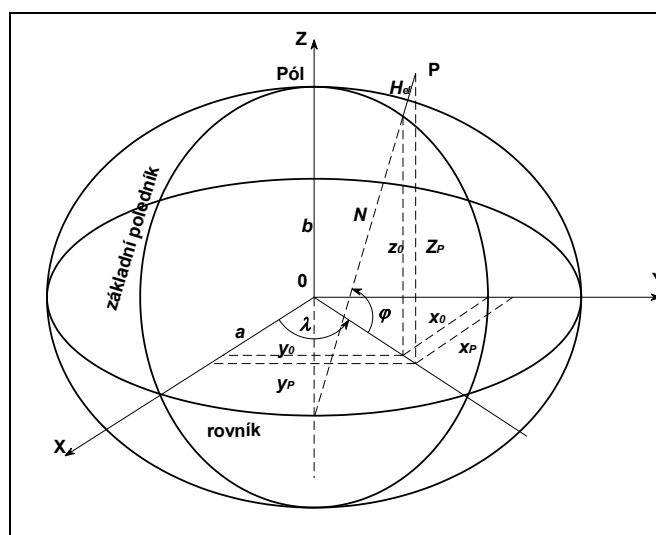
Hodnoty φ , H_{el} a N se dále počítají pro i -tou iteraci následovně:

$$\varphi_i = \operatorname{arctg}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{N_{i-1} + H_{eli-1}}{N_{i-1}(1 - e^2) + H_{eli-1}}\right]$$

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}}$$

$$H_{el_i} = \frac{x}{\cos \varphi_i \cos \lambda} - N_{i-1} = \frac{y}{\cos \varphi_i \sin \lambda} - N_{i-1}$$
(13-4)

Při prvním výpočtu zeměpisné šířky φ_0 je možné zanedbat elipsoidickou výšku bodu P . Pomocí φ_0 se vypočítají první aproximace N_0 a H_{el0} . Jejich dosazením do rovnic (13-4) se získají zpřesněné hodnoty φ_i , N_i a H_{eli} . Iterační výpočet se ukončí, pokud je rozdíl mezi předcházející a počítanou hodnotou menší než požadovaná přesnost výpočtu.



Obr. 13-1 Prosotorové pravoúhlé souřadnice

Obdobné vztahy jako (13-2) a (13-3) platí i pro transformaci zeměpisných souřadnic U , V a výšky H na referenční kouli o poloměru R na prostorové pravoúhlé souřadnice. Výšku H je možné uvažovat pouze jako nadmořskou, protože tato transformace se používá především pro méně přesné úlohy. Pokud se uvažuje stejná poloha a orientace souřadnicových os jako v případě referenčního elipsoidu, lze transformaci vyjádřit vzorci:

$$\begin{aligned}x &= (R + H)\cos U \cos V \\y &= (R + H)\cos U \sin V \\z &= (R + H)\sin U\end{aligned}\quad (13-5)$$

Zpětný převod je potom možný podle vztahů:

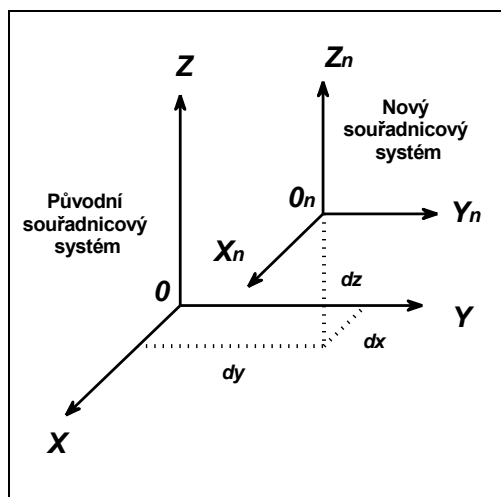
$$\begin{aligned}V &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\U &= \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\H &= \frac{z}{\sin U} - R = \frac{1}{\cos U}\sqrt{x^2 + y^2} - R\end{aligned}\quad (13-6)$$

13.1.2 Tříprvková prostorová transformace

Nejjednodušší transformací mezi referenčními systémy je *tříprvková prostorová transformace*. Rozdíl mezi původním a novým referenčním systémem geocentrických souřadnic je pouze v lineárním posunu počátků obou systémů. Počátek nového souřadnicového systému je pouze vzhledem k původnímu systému posunut o hodnoty dx , dy a dz . Vlastní transformaci lze vyjádřit vztahem (13-7):

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\quad (13-7)$$

Graficky lze podstatu transformace vyjádřit následujícím obrázkem (Obr. 13-2):



Obr. 13-2 Tříprvková prostorová transformace

Hodnoty souřadnic i lineárních posunů se vyjadřují v metrech.

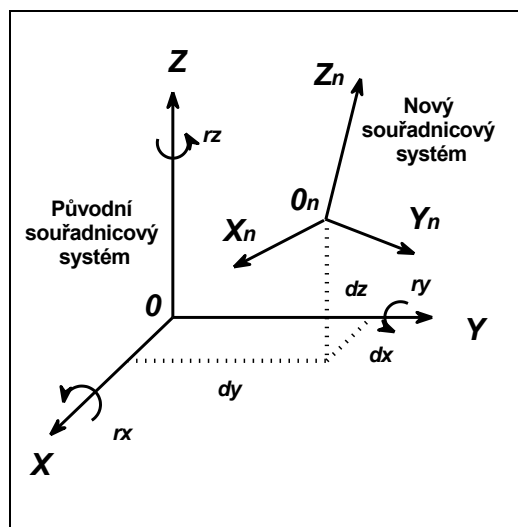
13.1.3 Sedmiprvková prostorová transformace

Přesnější a komplexnější transformace využívající prostorové pravoúhlé souřadnice je *sedmiprvková prostorová transformace*, někdy nazývaná i jako *prostorová podobnostní transformace*. Vedle lineárních posunů je zde uvažováno i se třemi rotacemi kolem původních os (r_x , r_y a r_z) a se změnou měřítka - měřítkovým faktorem $m=1+\mu$.

Transformaci je možné vyjádřit následující rovnicí (13-8):

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_z & -r_y \\ -r_z & 1 & r_x \\ r_y & -r_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (13-8)$$

Graficky lze podstatu transformace opět vyjádřit následujícím obrázkem (Obr. 13-3):



Obr. 13-3 Sedmiprvková prostorová transformace

Hodnoty souřadnic a lineárních posunů se opět uvádějí v metrech, hodnoty rotací v desetinách vteřin a měřítkový faktor bývá v řádech 10^{-6} až 10^{-5} . V anglické literatuře bývá uváděn v jednotkách *ppm* (*parts per milion*).

Hodnoty rotací jsou definovány dvojím způsobem. Pokud se díváme směrem k původním osám X, Y, Z, je rotace jsou buďto ve směru nebo proti směru hodinových ručiček. Přitom je možné přiřadit kladné nebo záporné znaménko oběma směrům. Například v Austrálii byla pro rotace při definici referenčního souřadnicového systému použita kladná znaménka pro směry otáčení hodinových ručiček, v Evropě tomu bylo naopak [10]. Před použitím popsané transformace je nutné zjistit, jaký systém rotací byl použit. Pokud by byl použit nesprávný, výsledné transformované hodnoty jsou chybné.

13.1.4 Moloděnského transformace

Moloděnského transformace umožňuje přímou transformaci zeměpisných souřadnic definovaných v souřadnicových systémech, aniž je nutný jejich převod do prostorových pravoúhlých souřadnic. K této transformaci je nutná znalost parametrů původního elipsoidu

(velikost poloos a , b), lineárních posunů dx , dy a dz a rozdílů parametrů použitých referenčních elipsoidů (původního a nového) – velké poloosy Δa a zploštění Δf .

Transformace je dána vztahy (13-9):

$$\Delta\varphi = \left[\begin{array}{l} -\sin\varphi \cos\lambda dx - \sin\varphi \sin\lambda dy + \cos\varphi dz + \frac{e^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \Delta a \\ + \sin\varphi \cos\varphi \left(M \frac{a}{b} + N \frac{b}{a} \right) \Delta f \end{array} \right] / (M + H_{el}) \quad (13-9)$$

$$\Delta\lambda = (-\sin\lambda dx + \cos\lambda dy) / (N + H_{el}) \cos\varphi$$

$$\Delta h = \cos\varphi \cos\lambda dx + \cos\varphi \sin\lambda dy + \sin\varphi dz - (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \Delta a + \frac{a(1-f)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \sin^2\varphi \Delta f$$

13.1.5 Zjednodušená Moloděnského transformace

Pro méně přesné práce, například pro navigační účely, je možné použít *zjednodušenou Moloděnského transformaci*, jejíž rovnice je možné vyjádřit následovně (13-10):

$$\Delta\varphi = [-\sin\varphi \cos\lambda dx - \sin\varphi \sin\lambda dy + \cos\varphi dz + (a\Delta f + f\Delta a) 2 \sin\varphi \cos\varphi] / M$$

$$\Delta\lambda = (-\sin\lambda dx + \cos\lambda dy) / N \cos\varphi \quad (13-10)$$

$$\Delta h = \cos\varphi \cos\lambda dx + \cos\varphi \sin\lambda dy + \sin\varphi dz + (a\Delta f + f\Delta a) \sin^2\varphi - \Delta a$$

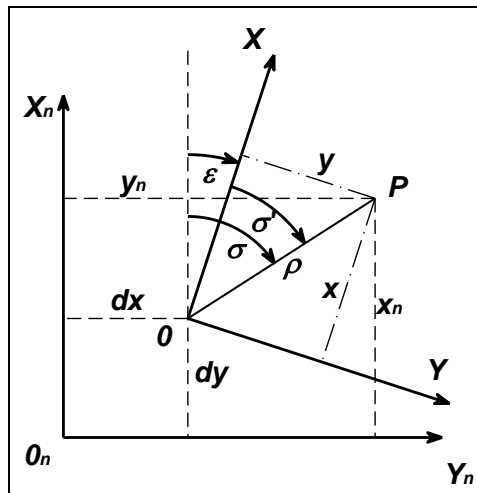
13.2 Rovinné transformace

Rovinné transformace umožňují přímo transformovat rovinné pravoúhlé souřadnice z jednoho zobrazení do druhého. Použití rovinných transformací je však limitováno územním rozsahem. V těchto transformacích není možné zahrnout vlivy všech druhů zkreslení a proto jejich použití pro větší rozsah území nevhodné. S výhodou se dají použít zejména pro transformace na malých územích, případně pro transformace v rámci sítí identických bodů, pokud tato síť je dostatečně hustá.

13.2.1 Shodnostní transformace

Shodnostní transformace je základním typem rovinných transformací. Výchozí souřadnicová soustava (O, X, Y) se transformuje do nové soustavy (O_n, X_n, Y_n) podle následujících rovnic (Obr. 13-4)

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13-11)$$



Obr. 13-4 Princip shodnostní transformace

Hodnoty dx , dy jsou lineární posuny původního počátku vyjádřené v nové soustavě, ε je úhel mezi kladnými osami X_n a X měřeno ve směru chodu hodinových ručiček od nové k původní soustavě.

V soustavě rovnic (4-47) vystupují tři neznámé transformační parametry – lineární posuny dx a dy a rotace ε . Pro výpočet neznámých parametrů shodnostní transformace je tedy nutná znalost tří společných veličin, například souřadnice jednoho identického bodu v obou soustavách a jednu společnou souřadnici nebo hodnotu směrníku rotace ε .

13.2.2 Podobnostní transformace

Pokud se do rovnic shodnostní transformace zavede změna měřítka pomocí měřítkového faktoru m definovaného stejně jako u sedmiprvkové prostorové transformace, získají se rovnice *podobnostní transformace* (13-12):

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13-12)$$

K výpočtu parametrů podobnostní transformace je nutná znalost nejméně čtyř společných veličin, je nutná tedy znalost minimálně u dvou identický bodů souřadnic v obou souřadnicových systémech.

13.2.3 Afinní transformace

Poměrně často používanou transformací je *afinní transformace*. Afinní transformace zachovává přímky a rovnoběžky, mění však úhly (není konformní). Její základní rovnici lze vyjádřit vzorcem (13-13):

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13-13)$$

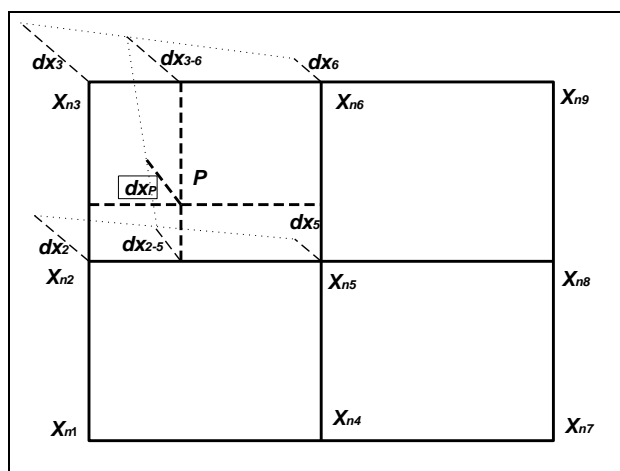
Koeficienty a, b, c, d, e, f se opět vypočítají ze souřadnic identických bodů. K jejich výpočtu je nutná znalost šesti společných hodnot, tedy je třeba mít minimálně tři identické body se známými souřadnicemi v obou systémech.

13.2.4 Interpolační metody

Pro použití *interpolační metody* se transformované území rozdělí do pravidelné sítě s konstantním přírůstkem buďto v zeměpisných nebo v rovinných pravoúhlých souřadnicích. V uzlových bodech sítě se vypočítají některou z předchozích metod (zpravidla prostorových transformací) *diference mezi oběma systémy* (viz Obr. 13-5, kde jsou uvedeny pouze diference pro souřadnici x). Například pomocí *bilineární interpolace* se pro požadovaný bod vypočítají příslušné diference pomocí vzorců (13-14):

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \text{ kde}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{01} & a_{11} \\ b_{00} & b_{10} & b_{01} & b_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \\ x_n y_n \end{bmatrix} \quad (13-14)$$



Obr. 13-5 Princip plošné interpolační metody

Pro výpočet osmi neznámých v této transformaci je nutná znalost souřadnic v obou systémech nejméně u čtyř identických bodů.

Transformace je použitelná i pro výpočet zeměpisných souřadnic, pokud se v rovnicích (13-14) pravoúhlá souřadnice nahradí zeměpisnými. Je však samozřejmě nutné koeficienty transformace vypočítat pro zeměpisné souřadnice.

Bilineární interpolace je zjednodušená *obecná transformace*, při níž se uvažují pouze lineární členy. Popis celé obecné transformace je uveden například v [14].

Přesnost interpolační metody závisí jednak na přesnosti výpočtu diferencí v uzlových bodech, jednak na hustotě uzlových bodů, tedy velikosti souřadnicového přírůstku pravidelné sítě.

14. Aplikace zobrazení v nástrojích GIS

Metody soudobé kartografie jsou zpravidla založeny na využívání informačních technologií, jejichž součástí jsou i programové nástroje GIS. Jednou ze sad těchto nástrojů jsou i nástroje používané pro tvorbu matematického základu trvalých nebo virtuálních vizualizovaných modelů terénu. Tyto nástroje využívají teorii matematické kartografie a spolu s nástroji pro práci s geodetickými referenčními systémy umožňují řešit v podstatě všechny úlohy, které jsou uvedeny v předchozím textu nebo které jsou využívány v při kartografické interpretaci dat a informací uložených v GIS.

Využívání programových nástrojů je poměrně snadné a zpravidla je doplňováno poměrně podrobnými návody ve formě průvodců (*wizard, guide*) a návodů (*Help*). Avšak ani průvodci, ani návody většinou neobsahují podrobnou teorii nebo rozbor jednotlivých zobrazení, stejně tak zpravidla neumožňují zobrazit například hodnoty zkreslení použitého zobrazení pro dané území. Z tohoto důvodu je proto vhodné teorii zobrazení znát.

Nástroje GIS zpravidla obsahují:

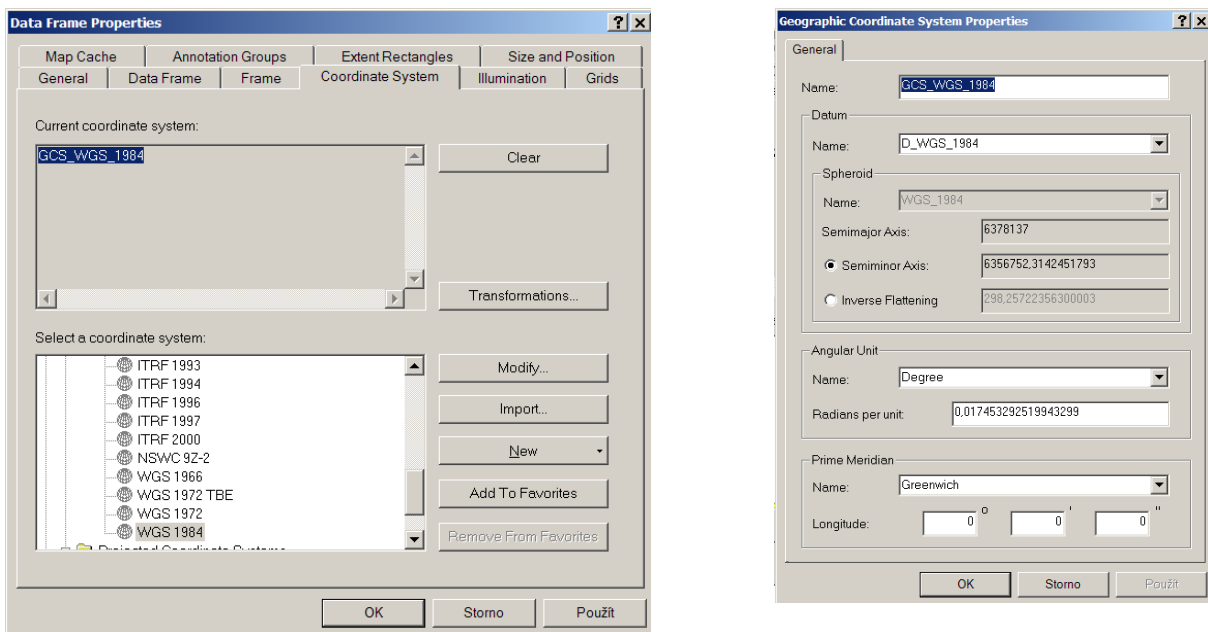
- *volbu geodetického referenčního systému z vestavěné nabídky nebo s možností tvorby vlastního,*
- *transformační postupy mezi geodetickými referenčními systémy,*
- *volbu zobrazení zpravidla z vestavěné nabídky s možností volby jeho parametrů,*
- *tvorbu a vizualizaci matematických prvků mapy – souřadnicová síť rovinných pravoúhlých nebo/a zeměpisných souřadnic, měřítko mapy, rám mapy.*

Poznámka: Vizualizace matematických prvků mapy je již součástí kartografie, avšak vzhledem k tomu, že přímo souvisí s používanými nástroji, je stručně uvedena i v těchto studijních textech.

V dalších odstavcích jsou stručně popsány uvedené postupy tak, jak jsou aplikovány v nástrojích programového systému ArcGIS® [1].

14.1 Volba geodetického referenčního systému

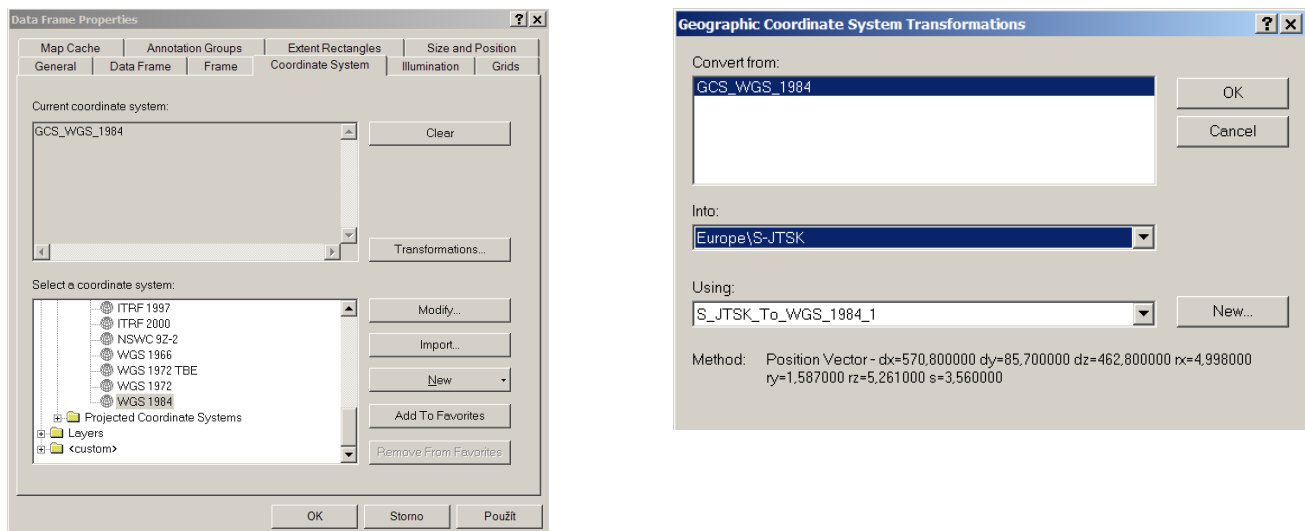
Volba geodetického referenčního systému je dána geografickou polohou zobrazovaného území nebo je předem dána požadavky daného projektu. Z vestavěné nabídky je možné vybrat vhodný systém nebo vytvořit nový. Uložené systémy mají zadány všechny potřebné parametry (elipsoid, základní poledník, úhlové jednotky). Pokud by bylo nutné definovat vlastní systém, všechny tyto parametry je nutné zadat ručně (viz. Obr. 14-1).



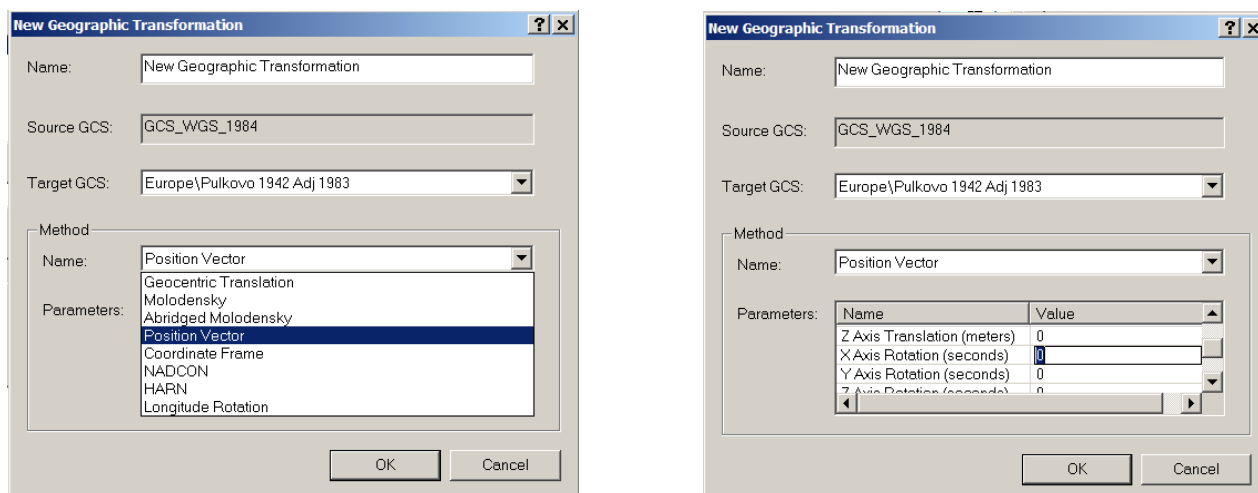
Obr. 14-1 Ukázky volby geodetického referenčního systému v programu ArcGIS z vestavěné nabídky

14.2 Transformace mezi geodetickými referenčními systémy

Rovněž k transformaci mezi různými geodetickými referenčními systémy je možné využít vestavěné nabídky, kde jsou již pro jednotlivé případy zvoleny vhodné transformace (viz. Obr. 14-2). V případě, že je nutné vlastní transformaci řídit, je možné volit vlastní postup volbou typu transformace a zadání jejích parametrů (viz. Obr. 14-3).



Obr. 14-2 Ukázka výběru přednastavené transformace (zde sedmiprvková podobnostní transformace) mezi různými geodetickými systémy v programu ArcGIS

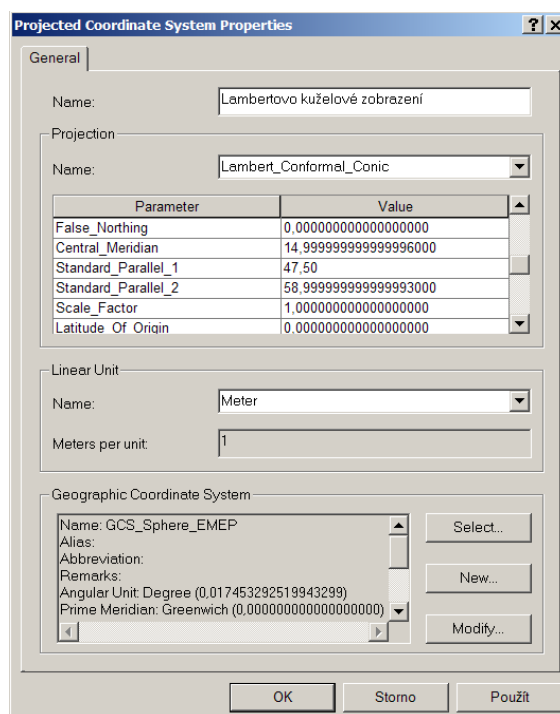


Obr. 14-3 Ukázka výběru vhodné metody transformace (zde sedmiprvková podobnostní transformace) mezi různými geodetickými systémy a způsobu zadávání jejich parametrů v programu ArcGIS

Poznámka: Pro transformaci souřadnic mezi referenčními systémy jsou dostupné i jiné postupy, které nemusí být součástí žádného komplexního systému. V České republice je to například program MATKART [5].

14.3 Volba zobrazení

Nástroje GIS mají zpravidla opět vestavěnou širokou nabídku různých zobrazení a projekcí, ze kterých je možné si vybírat a zadávat nebo akceptovat předem dané jejich parametry (základní poledník, poloha nezkreslených rovnoběžek, apod.). Před volbou zobrazení je nutné mít zvolen odpovídající geodetický referenční systém. Příklad systému zadávání parametrů zobrazení je uveden na následujícím obrázku (viz. Obr. 14-4).

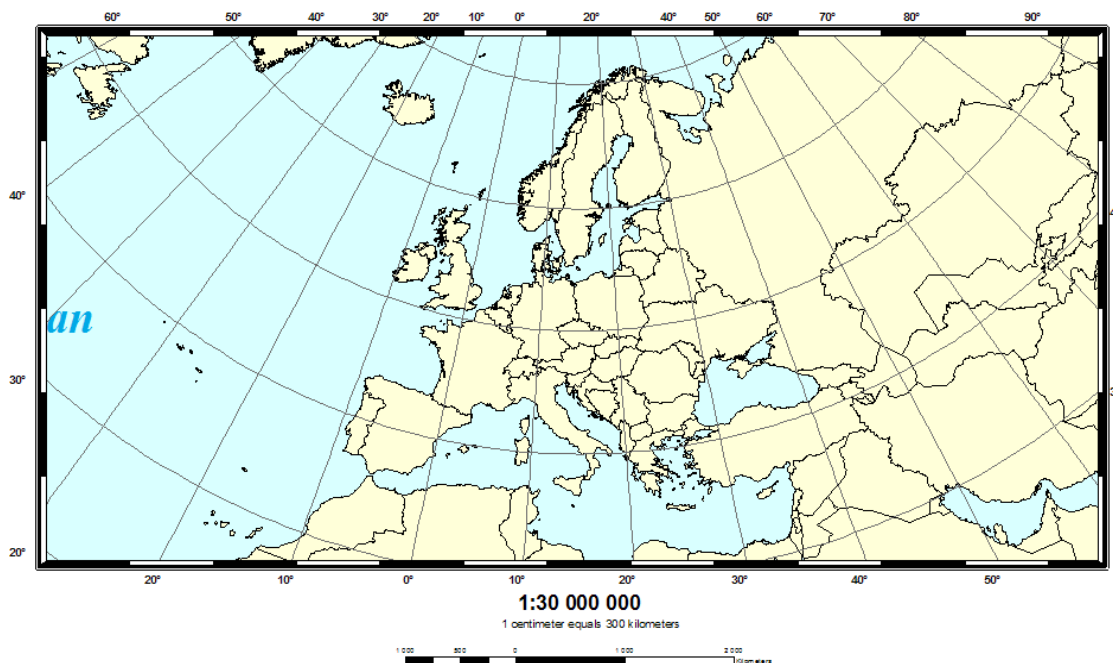


Obr. 14-4 Volba zobrazení a zadávání jeho parametrů v programu ArcGIS

Konkrétní hodnoty parametrů zobrazení je nutné vypočítat předem na základě jeho požadovaných vlastností a polohy zobrazovaného území na Zemi.

14.4 Vizualizace matematických prvků

Matematické prvky, zpravidla rám mapy s hodnotami zeměpisných nebo rovinných pravoúhlých souřadnic, síť poledníků a rovnoběžek nebo pravoúhlou síť ve zvoleném intervalu, různé druhy vyjádření měřítka mapy, výsledné editované mapy je možné též generovat pomocí vestavěných nástrojů. Pokud není nutné vytvářet vlastní grafický styl zobrazení, k editaci se opět používají vestavěné nástroje a systém průvodce. Příklad výsledné vizualizace matematických prvků je uveden na obrázku (viz. **Chyba! Chybný odkaz na záložku.**).



Obr. 14-5 Příklad vizualizace matematických prvků mapy v programu ArcGIS. Poznámka - hodnoty měřítek odpovídají originálnímu zobrazení; na obrázku jsou jiné, dané zmenšením obrázku a slouží pouze pro ilustraci funkčnosti programu.

Literatura

- [1] ArcGIS 9.2, Environmental System Research Institute, Inc. 2007
- [2] BÖHM, J.: Vyšší geodesie II, Souřadnicové soustavy, učební texty vysokých škol, České vysoké učení technické v Praze, SNTL Praha 1966, 186 s.
- [3] BANDROVA T.: Kartografija 1 (Kartni proekcii), UASG Sofia, 235 s.
- [4] BUCHAR, P.: Matematická kartografie 10, ČVUT Praha 2002
- [5] ČECHUROVÁ, M., VEVERKA, B.: Software MATKART – současný stav a vývojové trendy, Kartografické listy, Ročenka k artografickej spoločnosti Slovenskej republiky, č. 15/2007, ISBN 80-89060-10-8, Bratislava 2007, s. 34-40
- [6] DMA Technical Manual – The Universal Grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS), Edition 1, Defense Mapping Agency, Sign. DMATM 8358.2, September 1989
- [7] EGELTOFT, T., STOIMENOV G.: Map Projections, Royal Institute of Technology, Department of Geodesy and Photogrammetry, Stockholm, Sweden, April 1997, ISSN 1400-3155, 83 s.
- [8] FIALA, F.: Matematická kartografie, SNTL Praha 1955, s.
- [9] HOJOVEC, V. a kol.: Kartografie, GKP Praha 1987, 660 s.
- [10] <http://www.nga.mil/>
- [11] <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/map/>
- [12] <http://en.wikipedia.org/>
- [13] KENNEDY, M., KOPP, S.: Understanding Map Projection, Publikace ESRI 200x
- [14] KRATOCHVÍL, V.: Polohové geodetické sítě, Aplikace metody nejmenších čtverců a transformace souřadnic, VA v Brně 2000, PČT S-464, 214 s.
- [15] KUSKA, F.: Matematická kartografia, SVTL, Edícia technickej literatúry, Bratislava 1960, 475 s.
- [16] LEICK, A.: GPS satellite surveying, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1995, ISBN 0-471-30626-6, 560 p.
- [17] Nařízení vlády ČR č. 430/2006 Sb. O stanovení geodetických systémů a státních mapových děl závazných na území státu a zásadách jejich používání
- [18] NOVÁK, V., MURDYCH, Z.: Kartografie a topografie, SPN Praha 1988, 320 s.
- [19] OLŠOVSKÝ, V.: Globální systém určování polohy – GPS, úvod do studia, VA v Brně 1999, 176 s.
- [20] OPERATIONAL NAVIGATION CHARTS (ONC), MIL-O-89102 NOT 1, The National Geospatial-Intelligence Agency, 1995, revised 2004, <http://www.nga.mil/>
- [21] PORTER, W., McDONNELL, Jr.: Introduction to map projections, Marcel Dekker, INC., 270 Madison Avenue, New York and Basel 1979, ISBN 0-8247-6830-2
- [22] REKTORYS, K. a kol.: Přehled užití matematiky, 5. vydání, SNTL – nakladatelství technické literatury, Praha 1988, 1140 s.
- [23] SRNKA, E.: Matematická kartografie, VAAZ Brno 1986, 302 s.

- [24] VESELÁ, I.: Systém vizualizace zkreslení vybraných zobrazení v prostředí ArcGIS 9.x, (bakalářská práce), Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Geografický ústav Brno 2006, 50 s.
- [25] VYKUTIL, J.: Vyšší geodézie, Kartografie, Praha 1982, 544 s.

Název:	Základy matematické kartografie
Autor:	plk. doc. Ing. Václav TALHOFER, CSc.
Vedoucí katedry:	plk. doc. Ing. Václav TALHOFER, CSc.
Rok vydání:	2007
Náklad:	50
Počet stran:	164, počet příloh: 0, počet obrázků: 122
Vydavatel:	Univerzita obrany
Tiskne:	Vydavatelská skupina UO
Číslo zakázky:	
Číslo EP:	...
Cena pro vnitřní potřebu:	

Publikace neprošla jazykovou úpravou.