F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2013- 2014

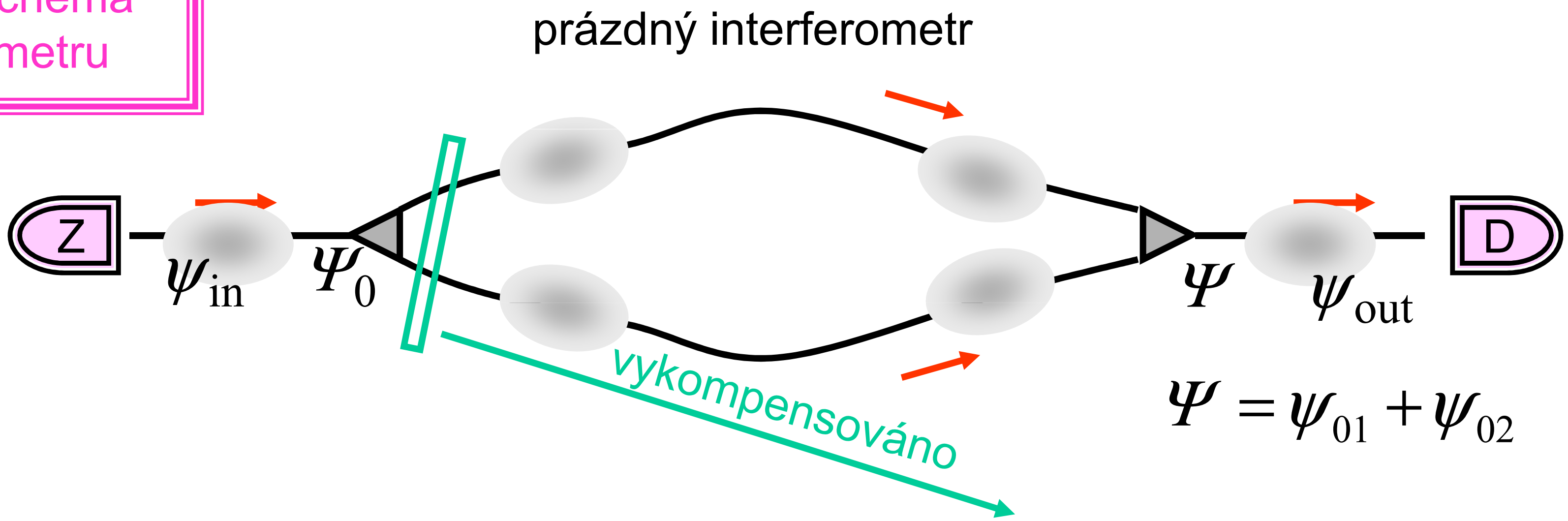
VII.
Neutronová interferometrie II.
cvičení

KOTLÁŘSKÁ 16. DUBNA 2014

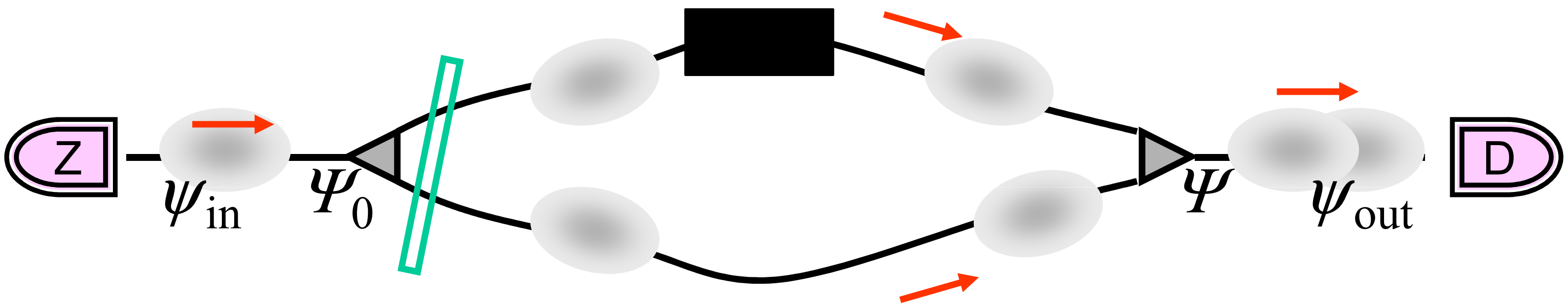
III. krok
Nestacionární popis interferometru:
Průlet vlnových klubek

Intensita na výstupu interferometru III: průlet vlnového klubka

Obecné schema interferometru



$$\Psi = \psi_{01} + \psi_{02}$$



$$\Psi = \psi_1 + \psi_2$$

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Popis svazku pomocí klubek je vlastně propoj mezi částicemi v reaktoru a vlnami v interferometru. Klubko se hodí tak nějak do obojích míst.

TŘI KROKY (1D klubka)

krok 1. stojící klubko

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

krok 2. klubko s nenulovou hybností

$$\psi(x) = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_0)x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot \underbrace{a(k-k_0)}_{c(k)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

krok 3. klubko uvedeme do pohybu

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot c(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$$

Toto platí pro každou volbu počáteční vlnové funkce.

Co je "klubko"? Má omezený rozsah v *k*-prostoru

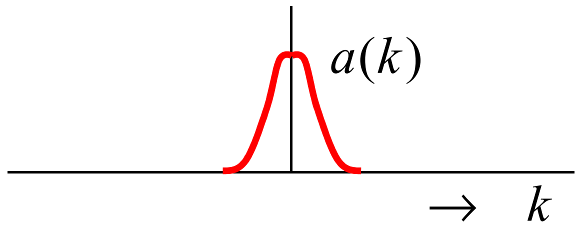
Interference vlnových klubek: samotné klubko

Popis svazku pomocí klubek je vlastně propoj mezi částicemi v reaktoru a vlnami v interferometru. Klubko se hodí tak nějak do obojích míst.

TŘI KROKY (1D klubka)

krok 1. stojící klubko

$$\varphi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

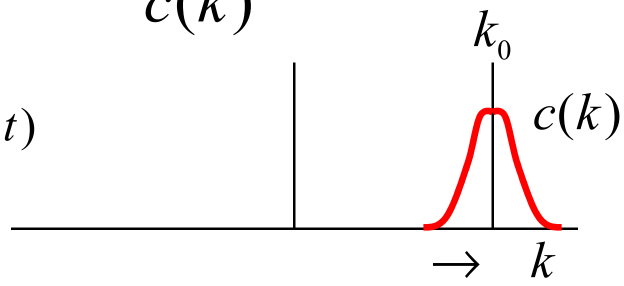


krok 2. klubko s nenulovou hybností

$$\psi(x) = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot a(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_0)x} = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot \underbrace{a(k-k_0)}_{c(k)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

krok 3. klubko uvedeme do pohybu

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot c(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$$



Toto platí pro každou volbu počáteční vlnové funkce.

Co je "klubko"? Má omezený rozsah v *k*-prostoru

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformaci

$$\boxed{\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m}\cdot k^2}$$

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\cdot c(k)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot c(k_0+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x-\omega(k_0+q)t)}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q(x-v_0t)-\cancel{\omega(q)t})}$$

zanedbáme rozplývání: linearisace v (malém) q

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x-v_0t)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}\times\phi(x-v_0t)}$$

$$(k_0+q)x-\omega(k_0+q)t = (k_0+q)x-\frac{\hbar}{2m}\cdot(k_0+q)^2$$

$$= (k_0x-\frac{\hbar}{2m}k_0{}^2)+qx-\frac{\hbar}{m}k_0q-\frac{\hbar}{2m}q^2$$

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformaci

$$\Psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \cdot c(k) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)}$$

$$\boxed{\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m} \cdot k^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot c(k_0 + q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x - \omega(k_0+q)t)}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q(x - v_0 t) - \cancel{\omega(q)}t)}$$

zanedbáme rozplývání: linearisace v (malém) q

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x - v_0 t)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0 t)}$$

nosná vlna	$\times$	obálka klubka
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(x - u_0 t)}$	$\times$	$\varphi(x - v_0 t)$
$u_0 = \dfrac{\omega(k_0)}{k_0} = \dfrac{\hbar}{2m} k_0$		$v_0 = \dfrac{\mathrm{d}\omega(k_0)}{\mathrm{d}k_0} = \dfrac{\hbar}{m} k_0 = 2u_0$
fázová rychlost		grupová rychlost

Interference vlnových klubek: zpožděné klubko ve vnějším potenciálu

Známe $\Delta\Phi(k)$; ***k*** snadno přepočteme na energii pomocí

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k)/\hbar = \frac{\hbar}{2m}\cdot k^2$$

$$\boxed{\Psi_1(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0 t)}$$

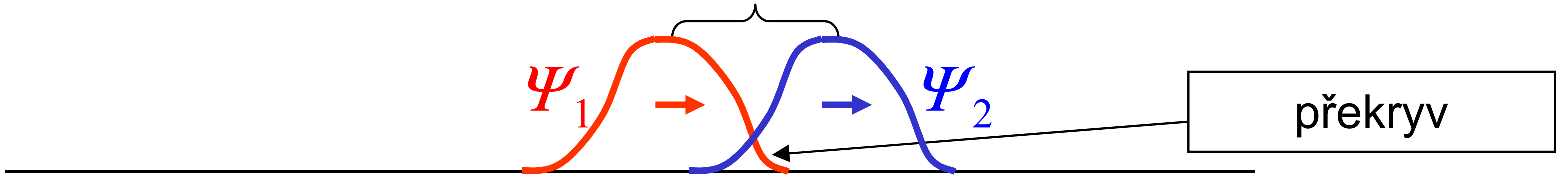
$$\Psi_2(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\cdot c(k)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx + \Delta\Phi(k) - \omega(k)t)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot c(k_0+q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}((k_0+q)x + \Delta\Phi(k_0+q) - \omega(k_0+q)t)}$$

$$\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\cdot a(q)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}$$

$$\boxed{\Psi_2(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}$$

DRÁHOVÝ POSUN Δx



Interference vlnových klubek: výpočet intensity

Časově závislá intensita

$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\,\Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \tfrac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}$$

spektrální intensita klubka

TO ODVODÍME

Interference vlnových klubek: výpočet intenzity

$$I(t) = |a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)|^2 = \underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2 + |a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int \mathrm{d}x |\Psi_{1,2}(t)|^2 = 1} + \underbrace{2a_1 a_2}_{V} \mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

$$\int \mathrm{d}t \left|\Psi_1(x_{\mathrm{OBS}}, t)\right|^2 = \int \mathrm{d}t \left|\varphi(x_{\mathrm{OBS}} - \upsilon_0 t)\right|^2 = \upsilon_0^{-1} \int \mathrm{d}\xi \left|\varphi(\xi)\right|^2$$

$$\int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)] = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \varphi^*(x - v_0 t)\varphi(x + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)]$$

$$= \int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x - v_0 t)} \int \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}]$$

$$= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \int \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)} \boxed{\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q - \bar{q})(x - v_0 t)}}] \quad \frac{2\pi}{\upsilon_0}\delta(q - \bar{q})$$

$$= \frac{1}{\upsilon_0} \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot \left|a(q)\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)}$$

Interference vlnových klubek: výpočet intensity

$$I(t) = |a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)|^2 = \underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2 + |a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int \mathrm{d}x |\Psi_{1,2}(t)|^2 = 1} + \underbrace{2a_1a_2}_{V}\mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

$$\int \mathrm{d}t \left|\Psi_1(x_{\mathrm{OBS}}, t)\right|^2 = \int \mathrm{d}t \left|\varphi(x_{\mathrm{OBS}} - \upsilon_0 t)\right|^2 = \upsilon_0^{-1} \int \mathrm{d}\xi \left|\varphi(\xi)\right|^2$$

$$\int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)] = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\varphi^*(x - v_0 t)\varphi(x + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)]$$

$$= \int \mathrm{d}t\, \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x - v_0 t)} \int \frac{\mathrm{d}\overline{q}}{2\pi} \cdot a(\overline{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{q}(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}]$$

$$= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \int \frac{\mathrm{d}\overline{q}}{2\pi} \cdot a(\overline{q}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)} \boxed{\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q - \overline{q})(x - v_0 t)}}] \quad \frac{2\pi}{\upsilon_0}\delta(q - \overline{q})$$

$$= \frac{1}{\upsilon_0}\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |a(q)|^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &\propto 1 + V\, \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\Phi(k_0)}\, \Gamma(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\Delta\Phi(k_0))] \\ \Gamma(x) &= \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \end{aligned}}$$

The end