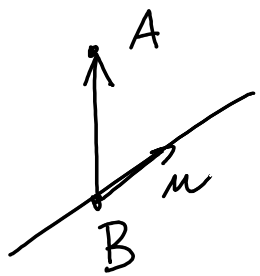
$p: \quad X = B + t u$

$q: \quad Y = C + s v$

$\rho: \quad Z = B + t u + x(A - B)$



$\rho \cap q: \quad C + s v = B + t u + x(A - B)$

Soustava 3 rovnic o neznámých $s, t, x \in \mathbb{R}$

s, t, x řešení $\quad Q = C + s v = B + t u + x(A - B)$

$r: \quad A + \alpha(Q - A)$

Obecně jsme v $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ afinní podprostory

$$Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) = \{\vec{o}\}$$

$\dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} = n - 1$,

$A \in \mathbb{R}^n$, $A \notin \mathcal{M}$, $A \notin \mathcal{N}$

Najděte přímku r procházející bodem A a protínající $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Řešíme stejně: Vezmeme $\mathcal{M} \sqcup A$ a hledáme průnik s $\mathcal{N}$

$$Q \in (\mathcal{M} \sqcup A) \cap \mathcal{N}$$

Pak $r = \overleftrightarrow{AQ}$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

② $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

③ $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$

$$f(ax^2 + bx + c) = A_1 a + A_2 b + A_3 c \qquad A_i \in \mathbb{R} \text{ libovolná}$$

$(x^2, x, 1)$ je báze $\mathbb{R}_2[x]$

$$f(ax^2 + bx + c) = a \underbrace{f(x^2)}_{A_1} + b \underbrace{f(x)}_{A_2} + c \underbrace{f(1)}_{A_3} =$$

Dualni vektorski prostor k prostoru U nad $\mathbb{K}$

je vektorski prostor tvorjen z vsemi linearnimi formami

$$f : U \to \mathbb{K}$$

Označimo ga U^*.

Operacije na U^* : $f, g : U \to \mathbb{K}$ linearni formi, tak

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

je spet linearna forma $\quad + : U^* \times U^* \to U^*$

$$(f, g) \longmapsto f+g$$

Pro $a \in \mathbb{K}$ $\quad (af)(u) = a f(u)$

je af tudi linearna forma. Zaradi $\cdot : \mathbb{K} \times U^* \to U^* : (a, f) \longmapsto af$

s vlastností : $f^i(u_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Taková báze se nazývá duální báze k bázi α

<u>Věta:</u> Nechť U je vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Pak v U^* existuje právě jedna duální báze $\alpha^* = (f^1, f^2, \dots, f^n)$

<u>Existence:</u> Definice pomocí souřadnic. Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je n-tice čísel z $\mathbb{K}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ taková, že

$$u = a^1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a^n u_n$$

Definujme $f^i(u) = a_i$ :: tj. i-tá souřadnice vektoru u v bázi α.

Do této rovnice dosadíme u_i z báze α. Dostaneme

$$f(u_i) = x_1 f^1(u_i) + \dots + x_i \cdot f^i(u_i) + \dots + x_n f^n(u_i)$$

$$f(u_i) = x_1 \cdot 0 + \dots + x_i \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 0$$

$$x_i = f(u_i)$$

Tedy platí

$$f = \underline{f(u_1)}\, f^1 + \underline{f(u_2)}\, f^2 + \dots + \underline{f(u_n)}\, f^n .$$

Důležité pozorování

Pomocí duální báze α^* k bázi α můžeme počítat souřadnice v bázi α vektorů: $f^i(u)$ je i-tá souřadnice vektoru u v bázi α

$E(u)$ je linearni.

$$E(u)(af+bg) = (af+bg)(u) = a\,f(u)+b\,g(u)$$
$$= a\,E(u)(f) + b\,E(u)(g)$$

$E: U \to U^{**}$ je izomorfizmus, jestliže U je prostor konečné dimenze.

$$\dim U = \dim U^* = \dim U^{**}$$

K ukázání, že E je izomorfizmus stačí ukázat, že $\ker E = \{\vec{o}\}$

Nechť $u \in \ker E$. Pak

$$E(u)(f) = 0 \text{ pro všechna } f$$

$$f(u) = 0 \text{ pro všechna } f$$

α báze U, $\alpha^* = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ duální báze

$$0 = f^i(u) = i\text{-tá souřadnice vektoru } u \text{ v bázi } \alpha$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "g\circ\varphi \in U^*"'] & V \arrow[d, "g \in V^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Platí $\forall u \in U$

$$\varphi^*(g)(u) = (g\circ\varphi)(u) = g(\varphi(u))$$

Opakování. Matice lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ v bázích α prostoru U a β prostoru V $\quad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_j \dots u_n) \quad \beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \; \dots\dots \; (\varphi(u_n))_\beta \Big) = A$$

souřadnice vektoru $\varphi(u_i)$ v bázi β ve sloupci

$$B = (\varphi^*)_{\alpha^*, \beta^*} \qquad \begin{array}{ll} \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n) & \beta = (v_1, v_2, \dots, v_k) \\ \alpha^* = (f^1, f^2, \dots, f^n) & \beta^* = (g^1, g^2, \dots, g^k) \end{array}$$

B_{ij} = i-tá souřadnice vektoru $\varphi^*(g^j)$ v bázi α^*

$= \varphi^*(g^j)(u_i) \underset{\text{podle definice } \varphi^*}{=} g^j(\varphi(u_i))$ = j-tá souřadnice vektoru $\varphi(u_i)$ v bázi β

$= A_{ji}$

kde $A = (\varphi)_{\beta, \alpha}$.