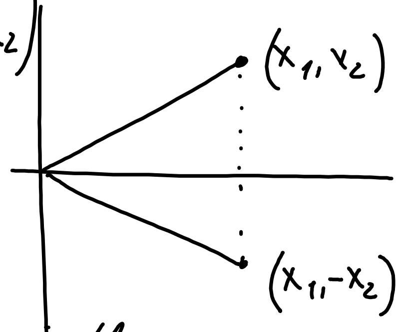
(2) Symetrie podle osy procházející počátkem

osa totožná s osou x_1

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



(3) V $\mathbb{R}^3$ ... otočení kolem osy procházející počátkem

... symetrie podle roviny procházející počátkem

Zachovávání velikostí a úhlů

$$\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \|u\|$$

$$\cos \angle(\varphi(u), \varphi(v)) = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle}{\|\varphi(u)\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Dk. (1) $\Leftrightarrow$ (3) Přepíšeme ekvivalentní podmínky

$$\forall u, v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

V matici ortonorm. báze α to zapíšeme takto.

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\right)^T \cdot \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$(u)_\alpha^T \; (\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}} \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \, \overline{(v)_\alpha}$$

$\forall x, y$

$$x^T \cdot \underbrace{A^T \cdot \overline{A}} \cdot y = x^T \cdot y = x^T \underbrace{E} y$$

$$A^T \cdot \overline{A} = E$$

$$\overline{A}^T \cdot A = E \Leftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^T$$

Poznámka. Jak na matici $n \times n$ poznáme, že je maticí unitárního nebo ortogonálního zobrazení?

její sloupce tvoří ortonormální bázi $e_1, e_2 \dots e_n$ je ortonorm. báze

její řádky tvoří ortonormální bázi

$$\underbrace{Ae_1, Ae_2, \dots Ae_n}_{\text{sloupce matice}}$$

neboť lze odůvodnit tak, že   ortonormální báze

$$\bar{A}^T \text{ je inverze k } A$$

$$A \cdot \bar{A}^T = E \qquad \left(r_i(A) \,\middle|\, \overline{r_j(A)} \right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Zkuste na $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

A unitární.

$$\det A \cdot \det \bar{A}^T = 1$$
$$\det A \; \det \bar{A} = 1$$
$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$
$$|\det A|^2 = 1$$
$$|\det A| = 1$$

Absolutní hodnota determinantu unitární matice je 1.

$\det A = \cos\alpha + i \sin\alpha$ pro nějaké α

Vlastní čísla a vlastní vektory unitárních operátorů

Věta 1. Nechť $\varphi : U \to U$ je unitární operátor.

(a) Každé jeho vlastní číslo má abs hodnotu 1.

(b) Vlastní vektory k různým vl. číslům jsou navzájem kolmé.

Věta 2 Nechť $\varphi: U \to U$ je unitární operátor. Pak v U existuje báze α tvořená vlastními vektory, která je navíc ortonormální vůči V, takže tam

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde λ_j jsou vlastní čísla tvaru

$$\lambda_j = \cos\alpha_j + i \sin\alpha_j$$

Důkaz. Indukcí podle $\dim U$.

$\dim U = 1$ $\quad \varphi(u) = \lambda u$ ..... lze vzít vl. vektor velikosti 1 jako bázi

Nechť platí pro vekt. prostory dimenze $n-1 \geq 1$.

$\dim U = n$, $\varphi: U \to U$ ~~ato~~ unitární

φ má v $\mathbb{C}$ aspoň jedno vlastní číslo, protože char. polynom je stupně ≥ 2 má v $\mathbb{C}$ kořen

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-4i \\ 6+10i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$u = \underbrace{u_1}_{\text{reálná část}} + i \underbrace{u_2}_{\text{imaginární část}}$$

je vlastním číslem $a+ib$, $b \neq 0$

<u>Lemma</u>: Pro vlastní vektor matice A tvaru $u_1 + i u_2$ platí

- $\|u_1\| = \|u_2\|$
- $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

$a+ib$

<u>Důkaz:</u> Je-li $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ vlastní číslo reálné matice A, pak také $\overline{\lambda} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ je vlastní číslo matice A. Příslušné vlastní vektory jsou $u_1 + i u_2$ k λ a $u_1 - i u_2$ k $\overline{\lambda}$.

Lemma $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$. Pak pro reálnou a imaginární složku vlastního vektoru $u_1 + i u_2$ platí, že

$$V = [u_1, u_2]$$

je invariantní podprostor odpovídající zobrazení $\varphi(x) = Ax$.

Důkaz.

$$\varphi(u_1 + i u_2) = (a + ib)(u_1 + i u_2)$$

$$A(u_1 + i u_2) = (a + ib)(u_1 + i u_2)$$

$$\underbrace{Au_1}_{\text{reálná sl.}} + i\,\underbrace{Au_2}_{\text{im. složka}} = \underbrace{au_1 - bu_2}_{\text{reálná složka}} + i\,\underbrace{(au_2 + bu_1)}_{\text{im složka}}$$

$$\left.\begin{aligned} Au_1 &= au_1 - bu_2 \\ Au_2 &= au_2 + bu_1 \end{aligned}\right\}$$ Tedy $[u_1, u_2]$ je invariantní podprostor pro A

Věta. Nechť $\varphi : U \to U$ je ortogonální zobrazení. Pak je U direktní součet navzájem kolmých podprostorů dimenze 1 a 2, které jsou navíc invariantní. V podprostorech dimenze 1 je φ násobení číslem 1 nebo -1, v podprostorech dimenze 2 je φ otočení o nějaký úhel.

Důkaz. Vl. čísla 1 a -1 určují vlastní vektory a ty samy určují jednorozměrné invariantní podprostory, které lze vybrat navzájem kolmé. Vl. číslům $a \pm ib = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$, $b \neq 0$ odpovídají podprostory dimenze 2 generované $[u_1, u_2]$, kde $u_1 + iu_2$ je vlastní vektor k. $a+ib$.

$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ $\cos\frac{\pi}{3}$ $\sin\frac{\pi}{3}$

Důsledek 1 pro $\mathbb{R}^3$

Každá ortogonální matice 3×3 reprezentuje jako zobrazení $\varphi(x) = AX$ otočení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k ose. Ve vhodné $\underbrace{\text{bázi}}^{\text{ortonormální}}$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ u_1 je vlastní vektor k ± 1

Další vlastní čísla jsou $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ...... vl. vektor $u_3 + i u_2$

$\bar{\lambda} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

φ je otočení kolem osy určené vektorem u_1 o úhel $\frac{\pi}{3}$ od u_2 k u_3.