Jordanův kanonický tvar

Obecně pro operátor $\varphi : U \to U$ neexistuje báze tvořená vlastními vektory. Naším cílem bude ukázat, že za jistých předpokladů existuje báze α taková, že matice

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je „jednoduchá" ≅ „blízká diagonální matici"

Tvar této matice se nazývá Jordanův.

Definice Matice $n \times n$ je v Jord. kanonickém tvaru, jestliže je blokově diagonální a na diagonále má tzv. Jordanovy buňky.

②

Jordanova buňka a matice tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Jord. buňka dimenze k pro vl. číslo λ

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad (k \times k)$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$

③

VĚTA o JKT Ⓐ Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vlastních čísel je roven $\dim U$.
Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je matice v JKT. Tento tvar je určen jednoznačně, až na pořadí buněk.

Věta o JKT nad $\mathbb{C}$ Ⓑ Nechť U je netriv. prostor nad $\mathbb{C}$ a $\varphi : U \to U$ lin. operátor. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je matice v JKT a tento tvar je až na pořadí buněk určen jednoznačně

Ⓐ $\Rightarrow$ Ⓑ neboť každý char. polynom má nad $\mathbb{C}$ tolik kořenů včetně

4

násobnosti, kolik činí jeho stupeň.

C **Věta o JKT pro matice:** Nechť A je matice $n \times n$, která má n vlastních čísel počítáno s násobností (algebraickými). Pak existuje matice J v Jordanově kanonickém tvaru, která je podobná matici A

$$J = P^{-1} A P$$

Přitom J je určena až na pořadí buněk jednoznačně.

A $\Rightarrow$ C Vezmeme za $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ zobrazení $\varphi(x) = Ax$.
Vl. čísla φ jsou shodná s vl. čísly matice A, proto jsou předpoklady věty 4 splněny. Proto v $\mathbb{K}^n$ existuje báze α tak, že

5

$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice v Jord. kan. tvaru. Pak platí

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \cdot \underbrace{(id)_{\varepsilon,\alpha}} = P^{-1} A P$$

Tedy $P = (id)_{\varepsilon,\alpha}$ $\blacksquare$

Najít JKT pro matici A a najít matici P, která zprostředkovává podobnost

$$J = P^{-1} A P$$

znamená najít bázi α.

6

Mějme bázi $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

je Jordanova buňka dimenze k.

Chceme zjistit, co pro takovou bázi platí a jak ji podle těchto vlastností hledat

$$\varphi(v_1) = \lambda v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k$$
$$\varphi(v_2) = 1 \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(v_k) = 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_{k-1} + \lambda v_k$$

$\Longleftrightarrow$

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\, v_1 = 0$$
$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\, v_2 = v_1$$
$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\, v_3 = v_2$$
$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\, v_k = v_{k-1}$$

$\boxed{v_1 \text{ je vlastní vektor pro vl. číslo } \lambda}$

(7)

Tyto rovnice schematicky zapisujeme takto

$$\vec{0} \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_3 \quad \cdots \longleftarrow v_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_k \qquad (R)$$

Řetězec vektorů pro vlastní číslo λ.

Označení: nechť $v_1, v_2, \ldots v_k$ jsou nenulové vektory tvořící řetězec (R)

Pak $v_1, v_2, \ldots v_k$ tvoří bázi a v této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

8

Dokažeme, že nenulové vektory řetízce jsou lin. nezávislé. Indukcí podle počtu vektorů (k).

Pro $k = 1$ je to zřejmé.

Nechť tvrzení platí pro $k-1 \geq 1$. Nechť

$$(*) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} + a_k v_k = \vec{o} \quad / \ \varphi - \lambda id$$

$$a_1 \underbrace{(\varphi - \lambda id) v_1}_{0} + \dots + a_k \underbrace{(\varphi - \lambda id) v_k}_{v_{k-1}} = \vec{o}$$

$$a_2 v_1 + a_3 v_2 + \dots + a_k v_{k-1} = 0$$

Podle ind. předpokladu jsou $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ lin. nezávislé, a proto $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$. Dosazením do (*) $a_1 v_1 = 0$, $v_1 \neq \vec{o} \Rightarrow a_1 = 0$.

Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou LN.

9

Hledání JKT spočívá v hledání řetězců pro jednotlivé buňky.

$$\det\left(J-\lambda\,\mathrm{id}\right) = \det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1-\lambda & 1 & \\ & \lambda_1-\lambda & 1 \\ & & \lambda_1-\lambda\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2-\lambda & 1 & \\ & \lambda_2-\lambda & 1 \\ & & \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda & 1 & & \\ & \lambda_1-\lambda & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1-\lambda)^{k_1}\cdot(\lambda_2-\lambda)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda_{k_r}-\lambda)^{k_r}$$

Pravidlo 1 Na diagonále JKT stojí vlastní čísla operátoru, každé tolikrát, kolikrát činí jeho algebraická násobnost.

Příklad 1a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \qquad \begin{array}{l} \varphi(x) = Ax \\ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Na začátku každého řetězce stojí vlastní vektor. Takže začneme počítáním vlastních vektorů

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ vl. vektor k vl. číslu 2 je $v_1 = (1,-2,3)^T$

(11)

Vl. vektory k vl. číslu 1 pro $a v_2 + b v_3$

$v_2 = (3,6,-8)^T \quad v_3 = (1,-1,1)^T$

v_1, v_2, v_3 lin. nezávislé vlastní vektory

Tedy hledaná báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 řetězce

$$v_1 \xrightarrow{A-2E} \vec{o}$$
$$v_2 \xrightarrow{A-E} \vec{o}$$
$$v_3 \xrightarrow{A-E} \vec{o}$$

12

Příklad 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

vl. vektor k vl. číslu 2 je $v_1 = (1,0,0)^T$

vl. vektor k vl. číslu 1 je $v_2 = (1,-1,0)^T$

Zde neexistuje báze tvořená vl. vektory.

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hledáme v_3 tak, abychom dostali v_3 při řešení soustavy

$$(A-E)v_3 = v_2$$

$$v_1 \xrightarrow{A-2E} \vec{o}$$

$$v_3 \xrightarrow{A-E} v_2 \xrightarrow{A-E} \vec{o}$$

řetězec

Soustava má více řešení. Nám stačí vybrat jedno: $v_3 = (1, p, -1)^T$

13

Zvolme bázi $\alpha = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Pak $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ a platí $J = P^{-1}AP$, kde

$P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zkouška $PJ = AP$. Za <u>dú</u>.

$\boxed{\text{Pravidlo 2}}$

JKT má tolik buněk s vl. číslem λ, kolik činí geometrická násobnost tohoto vl. čísla.

14

Dk: Každý řetízek začíná vl. vektorem a určuje jednu buňku

Příklad 2

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = Ax, \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

char polynom $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$

Vl. čísla $\lambda = 2$ má vl. vektor $u_1 = (2,1,2)^T$.

Alg násobnost vl. čísla 2 je 3, ale geometrická je 1. Tedy JKT má jedinou buňku.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chceme najít řetízec délky 3

$$u_3 \xrightarrow{A-2E} u_2 \xrightarrow{A-2E} u_1 \xrightarrow{A-2E} 0$$

15

$$(A-2E)u_2 = u_1 \qquad (A-2E)u_3 = u_2$$

$$\underbrace{u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a u_1}_{\text{všechna}} \qquad \underbrace{u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{jedno z mnoha}} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy u_1, u_2, u_3 hledaná báze

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = P^{-1}AP$$

Zkouška.

$$\boxed{PJ = AP}$$

Báze α není určena jednoznačně, a tím ani matice P.

Příklad 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = Ax$

char. polynom $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$

Vl. číslo $\lambda = 2$ má alg. násobnost 3 a geom. násobnost 2 s lin. nez. vlastními vektory

$u = (2,-1,0)^T$ a $v = (0,0,1)^T$

Jak vypadá J? To zjistíme už z výše uvedených údajů.

Na diagonále 2, 2, 2 a J má dvě buňky.

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Chceme najít řetězec délky 2 pro vl. číslo 2

17

Musíme zjistit, pro které volby vektoru

$$au+bv$$

má soustava $$(A-2E)\,x = au+bv \qquad (1)$$

řešení. Takové vektory pak stojí na začátku řetízce délky 2.

Matice soustavy (1) je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right)$$

Má řešení právě když

$$2a+b=0$$

Zvolme $a=1$, $b=-2$

$u-2v = (2,-1,-2)^T$, $x = (-1,1,1)^T$

18

Řetězec $\qquad x \longrightarrow u-2v \xrightarrow{A-2E} \vec{o}$

Báze celého $\mathbb{R}^3$ je tvořena dvěma řetězci

$$v \longrightarrow o$$

$$x \longrightarrow u-2v \longrightarrow o$$

$$\alpha = (\underline{v}, \underline{u-2v}, x) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

19

U matic 3×3 stačí spočítat vl. čísla a jejich alg. a geom. násobnosti, abychom mohli určit JKT. U matic 4×4 to v případě, že máme vl. číslo λ_0 alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2 určit nelze, jsou 2 možnosti (λ_0 na diagonále + 2 buňky)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & & \lambda_0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}\right)$$

1. možnost $\qquad$ 2. možnost

20

Zbývají 2 možnosti rozlišíme tím, že spočítáme řetězce

1. možnost .... 2 řetězce délky 2

2. možnost .... 1 řetězec délky 3

Příklad 4

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = Ax, \quad \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\det(A + \lambda E) = (1+\lambda)^4$

Vl. čísla $\lambda = -1$ má alg. násobnost 4 a geom. násobnost 2

Vlastní vektory. $u = (1,0,3,0)^T \quad v = (0,0,1,-2)^T$

21

Které vl. vektory stojí na začátku řetězce délky > 1

$$(A+E)w = au + bv$$

Matice soustavy, upravíme do schod. tvaru a zjistíme že soustava má řešení pro všechna a i b.

Tedy u je začátkem řetězce $w_2 \to u \to 0$

i v je začátkem řetězce $v_2 \to v \to 0$

Tedy máte příslušné 2 řetězce délky 2, kde vl. vektory jsou lin. nezávislé. Tedy

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right)$$

JKT má 2 buňky velikosti 2

22

Zbývá spočítat u_2 a v_2 jako řešení soustav

$$(A+E)u_2 = u$$

$$(A+E)v_2 = v$$

$u_2=(0,-1,0,3)^T$, $v_2=(0,-2,0,5)^T$

V bázi $\alpha=(u,u_2,v,v_2)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}=J=\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad P=(id)_{\varepsilon,\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Zkouška:</u> $PJ=AP$.

23

Tuto úlohu lze řešit i metodou „slepé střelby" = „hádáním"

Vezme nějaký vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} v_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Toto můžeme provádět JENOM, když všechna vl. čísla jsou stejná.