Zlatošova skripta www.math.muni.cz/~cadek/LA/

Lekce 11, 12, ..., 24.pdf

Označení: U vekt. prostor na $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$f : U \times U \to \mathbb{K}$ bilineární

$$f(au_1 + bu_2, v) = a\, f(u_1, v) + b\, f(u_2, v)$$

$$f(u, av_1 + bv_2) = \ldots$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

$$= x^T A y \qquad A = (a_{ij})$$

V U báze α, matice bilin. formy f v bázi α je

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) \qquad f(u,v) = \sum A_{ij} x_i y_j$$

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Změna matice při změně báze

Báze α matice A

β B

$$B = P^T A P \qquad P = (id)_{\alpha\beta}$$

Kongruentní matice

Symetrická bilineární forma – bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ s vlastností

$$f(u,v) = f(v,u)$$

f je <u>symetrická</u> bilineární forma, právě když její matice v některé (ve všech) bázi (bázích) je symetrická.

$$f(u,v) = f(v,u) \Longrightarrow \quad A_{ij} = f(u_i,u_j) = f(u_j,u_i) = A_{ji}.$$

Antisymetrická bilin. forma

$$f(u,v) = -f(v,u)$$

Pro její matici platí

$$A_{ij} = -A_{ji} \qquad \text{(antisymetrická)}$$

Každou bilin. formu můžeme napsat jako součet symetrické a antisymetrické bilin. formy

$$f(u,v) = \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(u,v) + f(v,u)\big)}_{g(u,v)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(u,v) - f(v,u)\big)}_{h(u,v)}$$

g je symetrická bilin. forma a h je antisymetrická bilin. forma

Nyní se budeme zabývat pouze symetrickými bilin. formami a symetrickými maticemi.

Naším cílem bude ukázat algoritmus, který k dané symetrické matici najde kongruentní diagonální matici.

$$D = P^T A P$$

diagonální

Řádkové a sloupcové elementární operace a jejich realizace pomocí násobení element. maticemi

Výměna řádků matice $A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_2(A) \\ r_1(A) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2(A) & s_1(A) \end{pmatrix}$$

Násobení 1. řádku číslem $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a\, r_1(A) \\ r_2(A) \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, s_1(A) & s_2(A) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K 1. řádku přičteme a-násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_1(A) + a\, r_2(A) \\ r_2(A) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(A) + a\, s_2(A) & s_2(A) \end{pmatrix}$$

Provedením stejných elem. řádk. a sloupcových operací dostaneme z matice A matici

$$P_k^T\Big(\dots \big(P_2^T \big(P_1^T A P_1 \big) P_2 \big) \dots \Big) P_k = \big(P_k^T \cdots P_2^T P_1^T\big) A \big(P_1 P_2 \cdots P_k\big)$$

$$= \big(P_1 P_2 \cdots P_k\big)^T A \big(P_1 P_2 \cdots P_k\big) = P^T A P$$

Algoritmus, který k symetrické matici A najde kongruentní diagonální matici

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{a sloupcové operace}]{\text{stejné řádkové}} \left(\begin{array}{c|c} P^TAP & P^TE \\ \hline EP & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P^TAP & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

z ní přečteme sloupcové operace

z ní přečteme řádkové operace

Operace lze provádět tak, že

$$D = P^TAP \text{ je diagonální}$$

Ukážeme si na příkladu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

K 1. ř. přičteme 2. řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

K 1. s. přičteme 2. s. $\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

2×2. ř.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

2×2. s.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

9

2 × 3.ř.
2 × 3.s
~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

2.ř − 1.ř
3.ř − 5 × 1.ř
~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

teď již ne dlouho
~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

3.ř + 2ř
~
+ teď již ne dlouho

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \cancel{4}^{0} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

(upper left block $= P$, upper right block $= P^T$, lower left block $= P$)

$$D = P^T A P -$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak tento postup použijeme na bilin. formy?

Věta: Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ existuje báze B taková, že matice formy f v bázi B je diagonální. Jinými slovy: v souřadnicích báze B má f vyjádření

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} x_i y_i, \quad \text{kde } (u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; (v)_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Důkaz a naznačme návod, jak bázi β hledat: Vezmeme nějakou bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

$$
\begin{array}{cccc|c}
f(u_1,u_1) & f(u_1,u_2) & \cdots & f(u_1,u_n) & u_1 \\
f(u_2,u_1) & f(u_2,u_2) & \cdots & f(u_2,u_n) & u_2 \\
 & & & & \vdots \\
 & f(u_i,u_j) & & & u_i \\
 & & & & \vdots \\
f(u_n,u_1) & \cdots & & f(u_n,u_n) & u_n \\
\hline
u_1 & u_2 & u_j & u_n &
\end{array}
$$

12

Při provádění řádk. a sloupc. úprav zůstane toto schéma zachováno:

Ukážeme na příklad: k 1. řádku přičteme a-násobek 2. řádku

$f(u_1+au_2, u_1)$ $\quad$ $f(u_1+au_2, u_2)$ $\quad \dots\dots$ $\quad$ u_1+au_2

$f(u_1,u_1)+af(u_2,u_1)$, $\quad$ $f(u_1,u_2)+af(u_2,u_2)$ $\quad \dots\dots$

$f(u_2,u_1)$ $\quad$ $f(u_2,u_2)$ $\quad \dots\dots$ $\quad$ u_2

u_n

u_1 $\quad$ u_2 $\quad$ u_n

Skupnim postopkom kot v primeru dobimo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 & v_3 \\ \cdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & d_{nn} & v_n \\ \hline v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ \hline (u_1 \ldots u_n) P & \end{array}\right)$$

Torej je matrika f v bazi $(v_1, v_2, \ldots v_n) = \mathcal{B}$.

$$(v_1\ v_2 \ldots v_n) = (u_1, \ldots u_n) P$$

$$P = (id)_{\alpha\mathcal{B}}$$

<u>Příklad</u> Najděte bázi $\mathcal{B}$, v níž má bilin. forma

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

matici v diag. tvaru

$\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ stand. báze $\mathbb{R}^3$ matice f v bázi α je

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & e_1 \\ 2 & 0 & 6 & e_2 \\ 4 & 6 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & \\ 0 & -4 & 0 & P^T\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & -96 & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{(e_1\, e_2\, e_3)P} & \\ \multicolumn{3}{c|}{\|} & \\ \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}} & \end{array}\right) = \mathcal{B}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

V bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ má f vyjádření

$$f(u,v) = 4\,\overline{x}_1\,\overline{y}_1 - 4\,\overline{x}_2\,\overline{y}_2 - 96\,\overline{x}_3\,\overline{y}_3$$

kde $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix}$ jsou souřadnice vektoru u v bázi B.

<u>Polární báze</u> pro sym. bilin. formu f je taková báze, v níž má f diagonální matici.

Pozor – polární báze NENÍ určena jednoznačně, je jich nekonečně mnoho.

Kvadratická forma g na vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ je zobrazení

$$g : U \to \mathbb{K}$$

takové, že existuje symetrická bilineární forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ a

$$g(u) = f(u,u)$$

Příklad:

$$g(x) = x_1^2 - \underline{6}x_1x_2 + \underline{3}x_1x_3 - \underline{2}x_2x_3 + x_2^2$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x_1y_1 \cancel{- 6x_1y_2 - 6x_2y_1} - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + \tfrac{3}{2}x_1y_3 + \tfrac{3}{2}x_3y_1$$

$$- x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 + 0 \cdot x_3y_3$$

symetrická bilin. forma

$$f(x,x) = g(x)$$

Sym. bilin. forma $f \longrightarrow$ kvadr. forma g

Toto přiřazení je prosté. Máme-li kvadr. formu g pak

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big)$$

Je-li g kvadr., existuje $\tilde{f}$ sym. bilin. tak, že

$$g(u) = \tilde{f}(u,u) \qquad \tilde{f}(u+v,u+v)$$

$$\frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big) = \frac{1}{4}\Big(\cancel{\tilde{f}(u,u)} + \cancel{\tilde{f}(v,v)} + \underline{\tilde{f}(u,v)} + \tilde{f}(v,u)$$
$$- \cancel{\tilde{f}(u,u)} - \cancel{\tilde{f}(v,v)} + \underline{\tilde{f}(u,v)} + \tilde{f}(v,u)\Big) = \frac{1}{4}\Big(2\tilde{f}(u,v) + 2\tilde{f}(v,u)\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(4\tilde{f}(u,v)\Big) = \tilde{f}(u,v)$$

Matice kvadr. formy $g: U \to \mathbb{K}$ v bázi α je matice příslušné sym. bilin. formy f, která zadává g

$$g(u) = f(u,u),$$

v bázi α.

<u>Příklad</u>

$$g(x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3$$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

V bázi $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ má g matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & +6 \\ 4 & +6 & 0 \end{pmatrix}$$

Řekneme, že kvadr. forma $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ je v bázi B v diagonálním tvaru, jestliže matice g v bázi B je diagonální, tj. v souřadnicích báze B má g tvar

$$g(u) = d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2 + \dots + d_{nn} x_n^2 \qquad (u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Věta: Ke každé kvadr. formě g existuje báze B (tzv. polární báze), v jejíž souřadnicích je

$$g(u) = d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2 + \dots + d_{nn} x_n^2 .$$