Prostory se skalárním součinem – pokračování

Věta: Nechť U je konečně rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem. Potom

(a) V U existují ortonormální báze

(b) Je-li $(u_1, u_2, \dots u_n)$ ortonormální báze v U, pak vektor $u \in U$ má v této bázi souřadnice

$$(\langle u, u_1\rangle, \langle u, u_2\rangle, \dots, \langle u, u_n\rangle)^T$$

(c) V souřadnicích ortonormální báze α se skalární součin spočítá takto:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = (u)_\alpha^T \, \overline{(v)_\alpha}, \text{ kde}$$

$$(u)_\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \quad (v)_\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

$$= (\langle u, u_1\rangle, \dots, \langle u, u_n\rangle)^T \qquad = (\langle v, u_1\rangle, \dots, \langle v, u_n\rangle)^T$$

Důkaz: (a) Nechť $v_1, v_2, \dots, v_n$ je nějaká báze prostoru U. Vezmeme vektory získané z této báze pomocí GSOP. Ty jsou navzájem kolmé a nenulové ..... $u_1, u_2, \dots, u_n$

Potom $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$ je ortonormální báze

$$\left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{\langle u_i, u_j\rangle}{\|u_i\| \, \|u_j\|} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\left[\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right] = [u_1, u_2, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_n] = U$$

(b) Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je ortonormální báze.

Nechť $$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Chceme určit a_i. Rovnici vynásobíme skalárně u_i

$$\langle u, u_i \rangle = \underbrace{\langle a_1 u_1, u_i \rangle}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{\langle a_i u_i, u_i \rangle}_{= a_i \langle u_i, u_i \rangle = a_i} + \dots \underbrace{\langle a_n u_n, u_i \rangle}_{=0}$$

Dostáváme

$$\langle u, u_i \rangle = a_i,$$

což jsme chtěli dokázat.

(c) Nechť $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i a_i u_i, \sum_j b_j u_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{b_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}.$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad (i \neq j), \qquad \langle u_i, u_j \rangle = 1 \quad (i = j)$$

Tedy znamená: Je-li α ortonormální báze vekt. prostoru U nad $\mathbb{C}$, pak lineární zobrazení

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{C}^n : u \longmapsto (u)_\alpha$$

zachovává skalární součin

$$\langle u, v \rangle_U = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$V \subset U$ je jeho podprostor

<u>Definice</u> Ortogonální doplněk podprostoru V v U je množina

$$V^\perp = \{ u \in U : \forall v \in V \ \underbrace{\langle u, v \rangle = 0}_{u \perp v} \}$$

<u>Pozorování</u> $V^\perp$ je vektorový podprostor:

$\vec{0} \in V^\perp$

$u_1, u_2 \in V^\perp$ $\quad \langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle$

$\Downarrow$ $\quad = 0$ pro všechna $v \in V$

$a_1 u_1 + a_2 u_2 \in V^\perp$

Věta: Nechť $V \subset U$ je netr. podprostor. Pak platí

$$V \oplus V^{\perp} = U.$$

Důkaz: Prvně dokážeme, že $V \cap V^{\perp} = \{\vec{o}\}$. Nechť $v \in V \cap V^{\perp}$. Potom podle definice je

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{o}.$$

Nechť $u \in U$. Ve V zvolme ortonormální bázi $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Potom

$$u = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle u, u_i \rangle u_i}_{\in V} + \underbrace{\left(u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, u_i \rangle u_i \right)}_{\text{Dokážeme, že tento vektor leží ve } V^{\perp}}$$

Stačí dokázat, pro $j = 1, 2, \ldots, k$, že

$$\left\langle u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, u_i \rangle u_i , u_j \right\rangle = 0$$

Levá strana je:

$$\langle u, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{0 \;\; i \neq j, \quad 1 \;\; i = j} = \langle u, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle$$

$$= \langle u, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0.$$

$\blacksquare$

Definice: Protože $V \oplus V^{\perp} = U$, existuje ke každému $u \in U$ právě jeden vektor $P_V u \in V$ tak, že

$$u = P_V u + \underset{\in V^{\perp}}{(u - P_V u)}$$

Vektor $P_V u$ nazýváme kolmou projekcí vektoru u do vekt. podprostoru V.

Zobrazení $P : U \longrightarrow V$ je lineární.

Poznámky k definici

(1) Je-li $P_V u$ kolmá projekce vektoru u do V, pak

$$u - P_V u = P_{V^\perp} u$$

je kolmá projekce vektoru u do $V^\perp$.

neboť (1) $u - P_V u \in V^\perp$

(2) $u - (u - P_V u) = P_V u \perp V^\perp$

(2) Výpočet kolmé projekce

Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots u_n$ je ortonormální báze prostoru U takovou, že $u_1, u_2, \dots u_k$ je báze V a $u_{k+1}, \dots, u_n$ je báze $V^\perp$.
V tomto případě podle důkazu předchozí věty je

$$P_V u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_k \rangle u_k$$

$$P_{V^\perp} u = \langle u, u_{k+1} \rangle u_{k+1} + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n$$

3 Přímý výpočet kolmé projekce:
Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ je nějaká báze podprostoru V.

$$P_V u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

pro kterou platí, že $\quad u - P_V u \perp V$

tj $\quad u - P_V u \perp u_1, u_2, \dots, u_k$

Dokážeme soustavu rovnic pro neznámé $a_1, a_2, \dots a_k$:

$$\left\langle u - \sum_{i=1}^{k} a_i u_i , u_j \right\rangle = 0$$

k rovnic pro k neznámých

Lze ji přepsat takto:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_2, u_1 \rangle & \dots & \langle u_k, u_1 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_k, u_2 \rangle \\ & & & \\ \langle u_1, u_k \rangle & \dots & & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix}}_{\text{Grammova matice}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_k \rangle \end{pmatrix}$$

Jsou-li $u_1, u_2, \dots, u_k$ lin. nezávislé, pak má Grammova matice determinant různý od 0 a tedy soustava má jediné řešení.

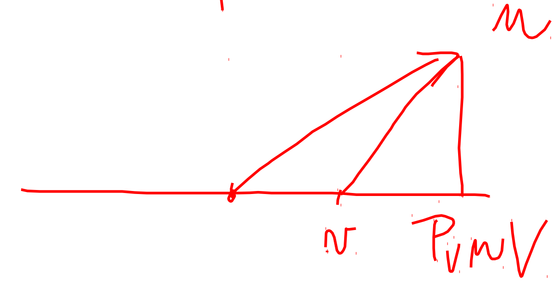
Charakterizace kolmé projekce

Věta: Nechť V je vekt. podprostor v U, nechť $u \in U$. Potom

(A) $P_V u$ je jediný vektor z V s vlastností

$$\|u - P_V u\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$

Ze všech vektorů $v \in V$ je $P_V u$ nejblíže k u.



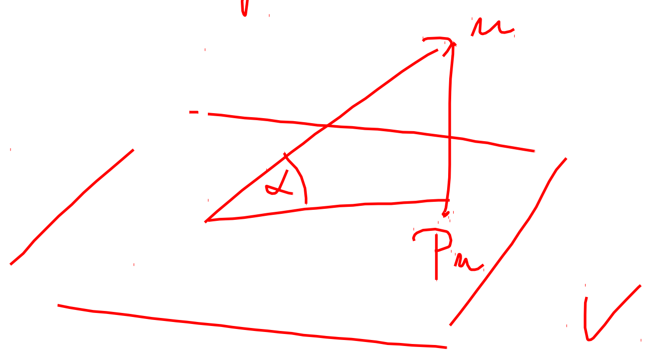
B $P_V u$ je až na násobek jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\|P_V u\|}{\|u\|} = \max_{v \in V} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \overbrace{\max \cos \sphericalangle (u, v)}^{\text{nad } \mathbb{R}}$$

Poznámky:

Odchylka vektorů je úhel α takový, že $\cos\alpha = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$.

Věta říká, že kolmá projekce je až na násobek jediný nenulový vektor, jehož odchylka od u je minimální.



$$\cos\alpha = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|} = \frac{\langle u, Pu\rangle}{\|u\|\,\|Pu\|}$$

Důkaz (A): Pro každý vektor $v \in V$ platí

$$\|u-v\|^2 = \|\underbrace{u - P_V u}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V u - v}_{\in V}\|^2 = \|u - P_V u\|^2 + \|P_V u - v\|^2$$

Odtud

$$\|u-v\| \geq \|u - P_V u\|$$

a rovnost nastane, právě když $\|P_V u - v\| = 0$, tj. $v = P_V u$.

(B) $v \in V$

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle \overbrace{P_V u}^{V} + \overbrace{u - P_V u}^{V^\perp}, \overset{V}{v}\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle P_V u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \overset{\text{Cauch. nerovnost}}{\leq}$$

$$\leq \frac{\|P_V u\| \, \|v\|}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|}$$

Rovnost nastane tehdy, když v je násobkem $P_V u$.

Tedy – chceme-li najít vektor $v \in V$, který má nejmenší odchylku od vektoru u, pak $v = k P_V u$.

EUKLEIDOVSKÁ AFINNÍ GEOMETRIE

V ní počítáme vzdálenosti a odchylky afinních podprostorů. Afinní podprostor

$$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}) \qquad A \in \mathcal{U} \text{ je bod}$$

$Z(\mathcal{M})$ je vekt. podprostor

Vzdálenosti

① Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{U}$ je velikost vektoru $B-A$.

$$\operatorname{dist}(A,B) = \|B-A\|$$

② Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru

$$\mathcal{R} = B + Z(\mathcal{R})$$

je

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{R}) = \inf_{X\in\mathcal{R}} \operatorname{dist}(A,X) = \inf_{X\in\mathcal{R}} \|X-A\|$$

VĚTA 1 $\operatorname{dist}(A,\mathcal{R}) = \|P_{Z(\mathcal{R})^{\perp}}(B-A)\|$

Důkaz: nechť $X \in \mathcal{N}$, $X = B + v$, $v \in Z(\mathcal{N})$

$$\|X-A\| = \|B+v-A\| = \|B-A+v\| \geq \|B-A-P_{Z(\mathcal{N})}(B-A)\|$$

zde jsme použili předchozí větu

$$= \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(B-A)\| = \operatorname{dist}(A,\mathcal{N})$$

DODATEK K VĚTĚ 1 Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(A,\mathcal{N}) = \|A-M\|$ pro nějaké $M \in \mathcal{N}$

(2) $A-M \perp \mathcal{N}$

(3) $M = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A-B)$

Důkaz: (1) $\Rightarrow$ (3) Nechť M je takový, že $\operatorname{dist}(A, n) = \|M - A\|$.

Platí

$$\|M - A\| = \|B + (M - B) - A\| = \|(B - A) - (B - M)\| = \|(A - B) - \underbrace{(M - B)}_{\in Z(n)}\| = \text{vzdálenost vektoru } A - B \text{ od } Z(n)$$

Podle věty - charakterizace kolmé projekce

$$M - B = P_{Z(n)}(A - B)$$

Odtud

$$M = B + P_{Z(n)}(A - B)$$

Dokázali jsme (3).

(18)

(3) $\Rightarrow$ (2) zřejmé

(3) $M = B + P_{Z(n)}(A-B) \Rightarrow A - M = (A-B) - P_{Z(n)}(A-B)$

$= P_{Z(n)^\perp}(A-B)$

Tedy $A - M \perp Z(n)$. (2)

(2) $\Rightarrow$ (1) nechť $A - M \perp Z(n)$. $\forall v \in Z(n)$

$$\| A - \underbrace{(M+v)}_{\in \mathcal{N}} \|^2 = \| A - M - v \|^2 = \| \underbrace{(A-M)}_{Z^\perp(n)} - \underset{\substack{\cap \\ Z(n)}}{v} \|^2 = \|A-M\|^2 + \|v\|^2$$

M realizuje vzdálenost od A k $\mathcal{N}$.

Příště spočítáme vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny

$$a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0$$

v $\mathbb{R}^4$.