(1)

Příklad – vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny

$$\rho: \quad a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0$$

v $\mathbb{R}^4$

Řešení: Tvrzení $\mathrm{dist}(A, \rho) = \| P_{Z(\rho)^\perp} (A - B) \|$

kde $B \in \rho$.

Předpokládejme, že $d \neq 0$. Potom bod

$$B = \left(0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right) \in \rho$$

$$Z(\rho): \quad a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 = 0$$

$$Z(\rho)^\perp = [\underbrace{(a, b, c, d)}_{= v}] \quad \text{neboť} \quad \langle (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, (a, b, c, d)^T \rangle = a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 = 0.$$

$$A - B = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d}\right)$$

$$P_{Z(p)^\perp}(A-B) = p \cdot v = p(a, b, c, d)$$

$$(A-B) - P_{Z(p)^\perp}(A-B) \perp v$$

$$\langle A-B, v\rangle - p\langle v, v\rangle = 0$$

$$p = \frac{\langle A-B, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Na gymnáziu na $\mathbb{R}^3$

$$\|P_{Z(p)^\perp}(A-B)\| = \left\| \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a, b, c, d)\right\| =$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Vzdálenost 2 afinních podprostorů

$\mathcal{M}$: $A + Z(\mathcal{M})$

$\mathcal{N}$: $B + Z(\mathcal{N})$

Definice vzdálenosti $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf \{ \|X - Y\| ; X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N} \}$$

Věta o vzdálenosti 2 afinních podprostorů

(a) Vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $\left(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})\right)^{\perp}$.

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující výroky ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}}(A - B)$

<u>Důkaz</u> (a)

$$\operatorname{dist}(m, n) = \operatorname{dist}(A + Z(m), B + Z(n)) = \operatorname{dist}(A, B + Z(n) + Z(m))$$

podle věty a předchozí nerovnosti $= \| P_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}}(A - B) \|$

(b) (1) $\Rightarrow$ (3) $\quad M = A + u, \; N = B + v, \; u \in Z(m), \; v \in Z(n)$

$\|M - N\| = \|A - B - \underset{Z(m)+Z(n)}{(v - u)}\|$ tento výraz nabývá minima

(viz věta o kolmé projekci a minulé nerovnosti) pro $v - u = P_{Z(m)+Z(n)}(A - B)$

$$M - N = (A - B) - P_{Z(m)+Z(n)}(A - B) = P_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}}(A - B).$$

Dokázali jsme (3).

(5)

(3) ⇒ (2) Jestliže $M-N = P_{(Z(m)+Z(n))^{\perp}}(A-B)$

pak máme

$$M-N \perp Z(m)+Z(n).$$

(2) ⇒ (1) Nechť $M-N \perp Z(m)+Z(n)$. Pro $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$:

$$\|(M+u)-(N+v)\|^2 = \|\underbrace{(M-N)}_{\in (Z(m)+Z(n))^{\perp}} + \underbrace{(u-v)}_{\in Z(m)+Z(n)}\|^2 = \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2$$

Tedy $\operatorname{dist}(m,n) = \inf\{\|(M+u)-(N+v)\|,\ u \in Z(m),\ v \in Z(n)\}$

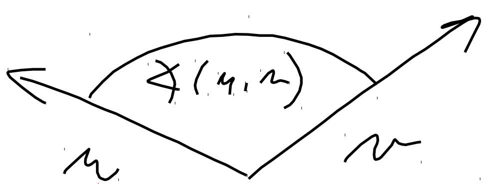
$$= \|M-N\|.$$

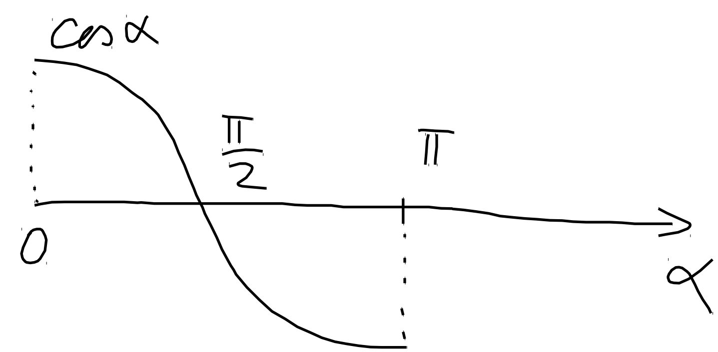
Počítání odchylek afinních podprostorů

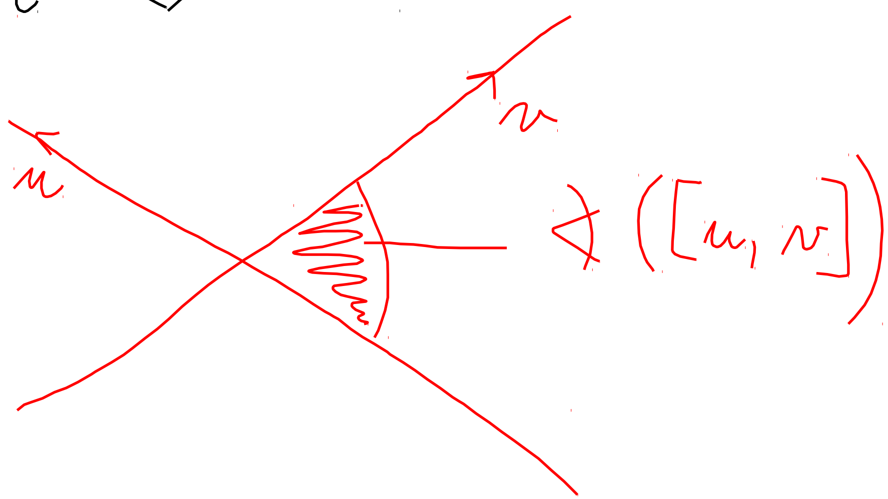
Úhel, který svírají vektory u a v je $\measuredangle(u,v)$, jehož cosinus je

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|},$$

kde $0 \le \measuredangle(u,v) \le \pi$.







Odchylka vekt. podprostorů $[u]$, $[v]$ je $\measuredangle([u],[v])$ taký, že

$$\cos \measuredangle([u],[v]) = \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|},$$

kde $0 \le \measuredangle([u],[v]) \le \frac{\pi}{2}$.

Definice odchylky dvou afinních podprostorů

(1) Nechť $u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$, pak $\measuredangle([u],[v])$ je číslo v intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ splňující

$$\cos \measuredangle([u],[v]) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \, \|v\|} .$$

(2) Nechť U a V jsou vekt. podprostory takové, že $U \cap V = \{\vec{o}\}$. Pak $\measuredangle(U,V)$ je číslo z intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ takové, že

$$\measuredangle(U,V) = \inf \left\{ \measuredangle([u],[v]),\ u \in U,\ v \in V \right\}$$

3 Nechť U a V jsou podprostory takové, že $U \cap V \neq \{\vec{o}\}$.

V tomto případě definujeme

$$\measuredangle(U, V) = \measuredangle\left(U \cap (U \cap V)^{\perp},\ V \cap (U \cap V)^{\perp}\right)$$

Druhý výraz je definován v bodu (2), neboť

$$\left(U \cap (U \cap V)^{\perp}\right) \cap \left(V \cap (U \cap V)^{\perp}\right) = \underbrace{U \cap V} \cap \underbrace{(U \cap V)^{\perp}} = \{\vec{o}\}.$$

4 Pro afinní podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ definujeme

$$\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \measuredangle\left(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\right)$$

9

Při výpočtech budeme používat větu

<u>Věta:</u>

$$\cos \measuredangle([u], V) = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|}$$

Tuto větu jsme již měli v poněkud jiné formě minulou přednášku – věta charakterizující kolmou projekci.

$$\frac{\|P_V u\|}{\|u\|} = \max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \, \|v\|} = \max_{v \in V \setminus \{0\}} \cos \measuredangle([u], [v])$$

<u>Jiná užitečná věta říká:</u>

Nechť V je nekt. podprostor a u nenulový vektor. Pak

$$\measuredangle(V, [u]^\perp) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(V, [u]).$$

Náznak důkazu:

$$\sphericalangle\left(V,[u]^\perp\right) = \sphericalangle\left(V\cap\left(V\cap[u]^\perp\right)^\perp,\ [u]^\perp\cap\left(V\cap[u]^\perp\right)^\perp\right)$$

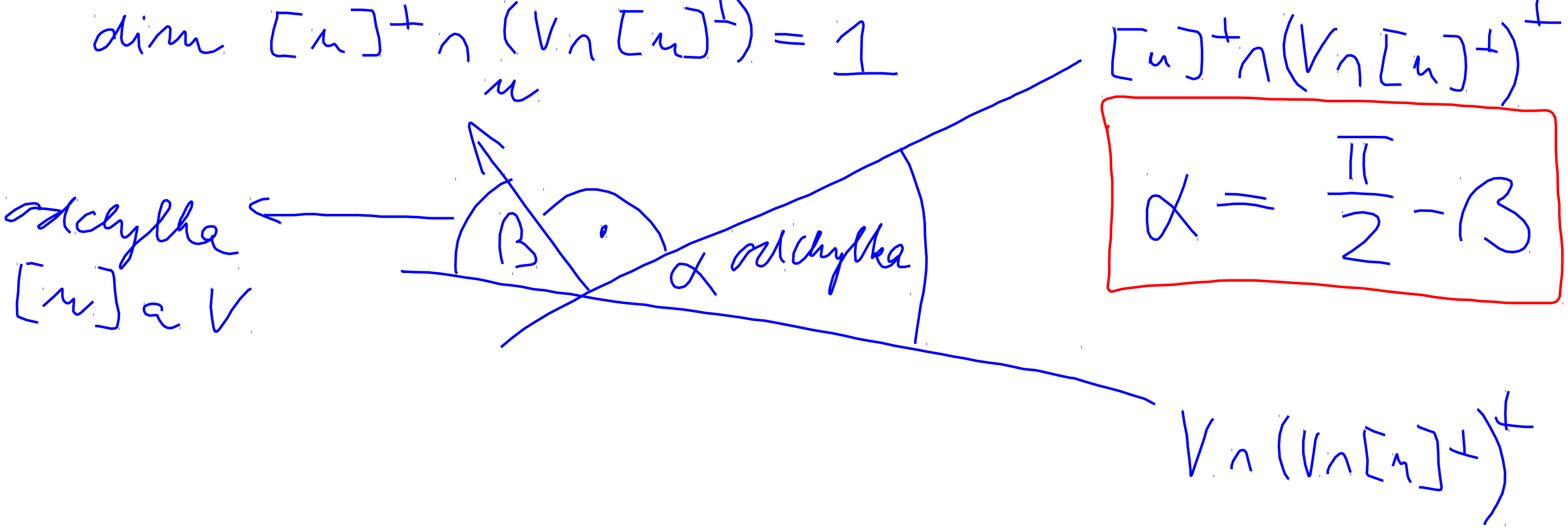
Jsme v prostoru dim n, dim $[u]^\perp = n-1$, dim $V = k$.

Jestliže $u \perp V$, pak $\sphericalangle\left([u]^\perp, V\right) = \frac{\pi}{2}$.

Jestliže u není kolmé na V, pak dim $V\cap[u]^\perp = k-1$.

Pak dim $V\cap\left(V\cap[u]^\perp\right) = 1$

dim $[u]^\perp\cap\left(V\cap[u]^\perp\right)^\perp = 1$



$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta}$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Budeme se zabývat lineárními zobrazeními

$$\varphi : U \to U$$

z vekt. prostoru U do sebe. Často se mluví o

- lineárních endomorfismech
- lineárních transformacích
- lineárních operátorech (zejména na prostoru U)

Definice Vektorový podprostor $V \subset U$ se nazývá invariantní vzhledem ke $\varphi : U \to U$, jestliže

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Věta: Nechť $V \subseteq U$ je invariantní podprostor (pro $\varphi : U \to U$) s bází $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Jestliže tuto bázi doplníme na bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ celého U, pak matice zobrazení φ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Důkaz – opakování definice $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ na $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \; \ldots \; (\varphi(u_n))_\beta \Big)$$

Tuto definici použijeme v důkazu věty.

$$\alpha = (\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_k}_{\text{báze prostoru } V}, u_{k+1}, \dots, u_n) \qquad \text{víme, že } \varphi(V) \subseteq V$$

$$\varphi(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{k1}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_n$$

$$\varphi(u_k) = a_{1k}u_1 + a_{2k}u_2 + \dots + a_{kk}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_n$$

$$\varphi(u_{k+1}) = b_{1k+1}u_1 + b_{2k+1}u_2 + \dots + b_{kk+1}u_k + c_{k+1k+1}u_{k+1} + \dots + c_{nk+1}u_n$$

$$\dots\dots$$

$$\varphi(u_n)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & & a_{1k} & b_{1k+1} & & \dots \\ a_{21} & & a_{2k} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kk} & b_{kk+1} & & \vdots \\ \hline 0 & & 0 & c_{k+1k+1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & c_{nk+1} & & \vdots \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$V = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} \Big]$$

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 + 2u_2$$

$$\varphi(u_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2u_1 + u_2$$

V je invariantní podprostor

$B = (u_1, u_2, e_3, e_4)$

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ a nechť $U = V \oplus W$, kde V i W jsou invariantní podprostory. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \dim V & \dim W \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \} \dim V = k \\ \} \dim W \end{array}$$

Důkaz: Zvolíme bázi $V \ldots (u_1, u_2, \ldots u_k)$ a bázi $W \ldots (u_{k+1}, \ldots, u_n)$. Protože $U = V \oplus W$, tak $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_k, u_{k+1}, \ldots u_n)$ je báze prostoru U a v této bázi má $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ požadovaný tvar.

$$\varphi(u_{k+1}) = c_1 u_{k+1} + \ldots + c_{n-k} u_n \in W$$

Triviální invariantní podprostory pro každé $\varphi: U \to U$ jsou tyto dva

- $\{\vec{o}\}$, neboť $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$
- U, neboť $\varphi: U \to U$.

První zajímavé invariantní podprostory jsou ty, které mají dimenzi 1. Ty jsou generovány jedním nenulovým vektorem:

$$\varphi: U \to U, \quad V = [v], \quad v \neq \vec{o}$$

je invariantní

$$\varphi(V) \subseteq V$$

$$\varphi(v) \in V$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi(v) = \lambda v$$

Nechť av je nějaký násobek vektoru v. Potom

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

Definice: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Pak nenulový vektor $v \in U$ se nazývá vlastní vektor operátoru φ, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo operátoru φ.

Znalost vlastních čísel a vlastních vektorů říká podstatné informace o operátoru φ a jeho dalších invariantních podprostorech.

Výpočet: Nejdříve hledáme vlastní čísla, pak vlastní vektory. Vycházíme z následující ekvivalence:
Nechť α je nějaká báze prostoru U.

Pre $\lambda \in \mathbb{K}$ existuje $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ tak, že

$$\varphi(u) = \lambda u$$

$\iff$ v súradniciach báze α

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = \lambda (u)_\alpha$$

$$A \quad x = \lambda x$$

$\iff$ rovnica $\quad A x = \lambda x$

má nenulové riešenie

$\iff$ Rovnica $\quad \underbrace{(A - \lambda E)}_{\text{matica } n \times n} x = 0 \quad$ má nenulové riešenie

$$\iff \qquad \boxed{\det (A - \lambda E) = 0}$$

<u>Věta:</u> $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem operátoru $\varphi : U \to U$, právě když pro matici A tohoto operátoru v bázi α je

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Determinant $\det(A - \lambda E)$ je polynom stupně $n = \dim U$.

Ten se nazývá <u>charakteristický polynom</u> operátoru φ.

<u>Tedy</u>: λ je vlastní číslo $\iff$ λ je kořenem char. polynomu operátoru φ.