Vlastní čísla a vlastní vektory

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$, lin. operátor $\varphi : U \to U$

$V \subseteq U$ je inv. podprostor $\varphi(V) \subseteq V$.

Invariantní podprostory dimenze 1 — určeny vl. čísly a vl. vektory

Vlastní vektor je $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$, pro který existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ tak, že

$$\varphi(u) = \lambda u. \qquad \lambda \text{ je vlastní číslo}$$

Minule jsme ukázali, že λ je vl. číslo operátoru φ, právě když je kořenem char. polynomu operátoru φ.

Charakteristický polynom operátoru φ

Nechť α je nějaká báze prostoru U, $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$.

Char. polynom operátoru φ je

$$\det(A - \lambda E)$$

Tato definice nezávisí na vybrané bázi α.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = B = (id)_{\beta\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha\beta} = P^{-1}AP$$

$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda E P)$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \underbrace{\det P^{-1} \ \det(A-\lambda E) \ \det P}_{1} =$$

$$= \det(A - \lambda E)$$

Je-li $\dim U = n$, je $\det(A - \lambda E)$ polynom stupně n.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & & & \cdots \\ a_{n1} & & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})}_{\text{char. polynom matice } A \,=\, \text{char. polynom op. } \varphi} + \dots + \det A$$

Kořen polynomu $p \in K[x]$ je číslo x_0 takové, že

$$p(x_0) = 0.$$

Stupeň polynomu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je číslo n, pokud $a_n \neq 0$.
Stupeň nulového polynomu buď nepoužíváme nebo označujeme jako $-\infty$.

$$\mathrm{st}\, p(x)\cdot q(x) = \mathrm{st}\, p + \mathrm{st}\, q$$

Věta: Nechť p je nenulový polynom. Pak x_0 je jeho kořenem, právě když

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x),$$

kde q je polynom stupně $\mathrm{st}\, p - 1$.

Důkaz: $\Leftarrow$ zřejmé.

$\Rightarrow$ nechť $p(x_0) = 0$. Potom

$$p(x) = p(x) - p(x_0) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 - a_n x_0^n - \dots - a_1 x_0 - a_0 =$$

$$= a_n (x^n - x_0^n) + \dots + a_1 (x - x_0) =$$

4

$$=(x-x_0)\left[a_n\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1}\right)+a_{n-1}\left(\qquad\right)+\dots+a_1\right]$$

$$=(x-x_0)\,q(x) \qquad \text{st } q = n-1.$$

Násobnosť koreňa polynomu

x_0 je koreň polynomu p násobnosti k, práve keď

$$p(x)=(x-x_0)^k\,q(x),$$

kde q je polynom taký, že $q(x_0)\neq 0$.

Výpočet vlastných čísel a vlastných vektorov

$U=\mathbb{R}^3 \quad \varphi: U\to U \quad \varphi(x)=Bx \quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$

Prvé nájdeme vlastné čísla – tie sú korene char. polynomu

$$\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 2 & -3\\ 4 & 5-\lambda & -4\\ 6 & 4 & -4-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda)+\dots\dots$$

(5)

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

Vlastní čísla operátoru φ jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Spočítáme vlastní vektory:

Vlastní vektor k λ splňuje

$$Bx = \lambda x$$

$$(B - \lambda E)x = 0$$

$\lambda = 1$

$$(B - E)x = 0 \qquad x \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ je vlastní vektor příslušný vl. číslu 1

Vlastní číslo	vlastní vektor
$\lambda_1 = 1$	$u_1 = (1, 1, 2)^T$
$\lambda_2 = 2$	$u_2 = (1, 0, 1)^T$
$\lambda_3 = 3$	$u_3 = (1, 2, 2)^T$

Uvažujme bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$. Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \; (\varphi(u_2))_\alpha \; (\varphi(u_3))_\alpha \right) = \left((1 \cdot u_1)_\alpha \; (2 \cdot u_2)_\alpha \; (3 u_3)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice φ má v bázi tvořené vlastními vektory diagonální tvar.

<u>Jiný příklad</u> – operátor, ke kterému neexistuje báze tvořená vlastními vektory.

$U = \mathbb{R}_2[x] \qquad \varphi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \qquad \varphi(p) = p'$

Vlastní čísla tohoto operátoru

$\alpha = (1, x, x^2)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((1')_\alpha \;\; (x')_\alpha \;\; ((x^2)')_\alpha \right) = \left((0)_\alpha \;\; (1)_\alpha \;\; (2x)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 = -(\lambda - 0)^3$$

Existuje jediné vl. číslo $\lambda_1 = 0$ algebraické násobnosti 3.

Vlastní vektory k $\lambda_1 = 0$.

8

$$Au = 0u$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{to jsou souřadnice polynomu } 1.$$

Vlastní číslo $\lambda_1 = 0$

vlastní vektor polynom 1

$R_2[x]$ nemá bázi tvořenou z vl. vektorů operátoru $\varphi(p) = p'$.

<u>Věta:</u> Vl. vektory příslušné různým vl. číslům jsou lin. nezávislé.

Důkaz indukcí podle počtu vl. vektorů.

Pro $k = 1$, pak vl. vektor x podle definice $\neq \vec{o}$ a je tedy lin. nezávislý.

(9)

Nechť tvrzení platí pro $k \geq 1$ vl. vektorů a my mějme $k+1$ vl. vektorů

$u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$. $\qquad \varphi(u_i) = \lambda_i u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Chceme ukázat, že $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ jsou LN. Nechť

$$(1) \qquad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} = 0$$

Aplikujme na (1) operátor φ:

$$a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \ldots + a_k \varphi(u_k) + a_{k+1} \varphi(u_{k+1}) = 0$$

$$(2) \qquad a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + a_k \lambda_k u_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0$$

Od (2) odečteme λ_{k+1}-násobek rovnice (1):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) u_1 + \ldots + a_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) u_k = 0$$

Z ind. předpokladu víme, že $u_1, \ldots, u_k$ jsou LN. Potom

$$\underbrace{a_1}_{} (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0 = \ldots = a_k (\lambda_k - \lambda_{k+1})$$

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \neq 0 \qquad (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \neq 0$$

Dostáváme $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$. Z (1) dostaneme $a_{k+1} = 0$.

Tedy $u_1, \dots, u_{k+1}$ jsou lin. nezávislé. $\blacksquare$

ALGEBRAICKÁ A GEOMETRICKÁ NÁSOBNOST VLASTNÍHO ČÍSLA

$\varphi: U \to U$ λ_0 je vl. číslo

Algebraická násobnost vl. čísla λ_0 je násobnost λ_0 jako kořene char. polynomu.

Geometrická násobnost vl. čísla λ_0 je

$$\dim \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})}$$

nenulové vektory z tohoto prostoru jsou právě všechny vlastní vektory příslušné vl. číslu λ_0.

Připomeneme příklad

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \qquad \varphi(p) = p'$

Vl. číslo $\lambda_0 = 0$ mělo alg. násobnost 3, ale geom. násobnost byla

$$\dim\{p \in \mathbb{R}_2[x],\ p'(x) = 0\} = \dim[1] = 1.$$

Algebraická a geometrická dimense vlastního čísla mohou být různé.

Věta: Algebraická násobnost vl. čísla $\lambda_0 \geq$ geom. násobnost vl. čísla λ_0.

Důkaz: Nechť báze $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$ je dána vl. vektory $u_1, u_2, \dots u_k$.

Tyto vektory doplníme na bázi celého prostoru U

$$\alpha = (u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n).$$

(12)

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\alpha \cdots (\varphi(u_k))_\alpha \; (\varphi(u_{k+1}))_\alpha \cdots (\varphi(u_n))_\alpha \Big)$$

$$= \Big((\lambda_0 u_1)_\alpha \; (\lambda_0 u_2)_\alpha \cdots (\lambda_0 u_k)_\alpha \; (\varphi(u_{k+1}))_\alpha \cdots (\varphi(u_n))_\alpha \Big)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & 0 & C \\ 0 & 0 & \ddots\ \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right)$$

Char. polynom bude

$$\det\big((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\big) =$$

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & 0 & \\ & \lambda_0-\lambda & & C \\ 0 & & \ddots\ \lambda_0-\lambda & \\ \hline & \underbrace{\hphantom{\lambda_0-\lambda\quad\lambda_0-\lambda}}_{k} & & B-\lambda_0 E \end{array} \right) =$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \det(B - \lambda_0 E)$$

Dokázali sme: ak λ_0 geom. násobnosť $= k$, tak alg. násobnosť $\geq k$.

(13)

Věta: Je-li součet geom. násobností všech vlastních čísel operátoru $\varphi: U \to U$ roven dim U, pak v U existuje báze tvořená vlastními vektory a v této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ jsou všechna vl. čísla, každé tolikrát, kolik činí jeho alg. násobnost.

Program ① které operátory mají bázi tvořenou vl. vektory
– unitární, samoadjungované
② nenastane-li taková situace – nejjednodušší možný tvar matice je tzv. Jordanův kanonický tvar.

UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem na $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Operátor $\varphi : U \to U$ s vlastností

$$\forall u, v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Tato vlastnost znamená, že φ zachovává skalární součin.

se nazývá ortogonální, je-li $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

unitární, je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Speciálně: $\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$

φ zachovává velikosti vektorů. φ zachová rovněž odchylky vektorů

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{\|\varphi(u)\| \|\varphi(v)\|}$$

Navíc toto zobrazení je prosté: jestliže $\varphi(u) = O$, pak $\|u\| = \|\varphi(u)\| = 0$ a tedy $u = \vec{O}$.

<u>Věta</u> Následující vlastnosti jsou ekvivalentní

(1) $\varphi : U \to U$ je unitární (ortogonální)

(2) φ zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi

(3) Pro matici φ v ortonormální bázi α platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}^{-1} = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}^{T} \qquad \left((\varphi)_{\alpha,\alpha}^{-1} = (\varphi)_{\alpha,\alpha}^{T} \text{ nad } \mathbb{R} \right)$$

Důkaz:

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\quad \forall u,v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

α ortonormální báze, v ní má φ matici A

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \left((\varphi)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha \right)^T \cdot \overline{\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha \right)} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = \langle u, v \rangle$$

$$(Ax)^T \cdot \overline{(Ay)} = x^T \overline{y} \qquad \forall x,y$$

$$x^T \underline{A^T \overline{A}}\, \overline{y} = x^T \underline{E}\, \overline{y}$$

$$A^T \overline{A} = E$$

$$\overline{A}^T A = E \Leftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^T$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ je zřejmé $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(2) $\Rightarrow$ (1) $u_1, \dots, u_m$ je ortonormální a $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ je ortonormální.

$u = \sum x_i u_i$, $v = \sum y_j u_j$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \left\langle \sum x_i \varphi(u_i), \sum y_j \varphi(u_j) \right\rangle = \sum x_i y_j \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = \sum x_i y_j \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum x_i u_i, \sum y_j u_j \right\rangle$$

$$= \langle u, v \rangle.$$

Příklady:

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$ $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Geometrické příklady ortogonálních zobrazení

- otočení kolem počátku v rovině

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- symetrie podle přímky procházející počátkem v rovině
- otočení kolem přímky procházející počátkem v prostoru
- symetrie podle roviny nebo přímky procházející počátkem v prostoru