Domácí úkoly ke cvičení č. 3

1. V každém z následujících případů určete vzájemnou polohu afinních podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v prostoru $\mathbb{R}^5$. Každý z podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ je pokaždé zadán buďto parametrickým popisem, anebo implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$. V každém z uvedených případů dále určete dimenzi spojení $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}$ podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$, a nejsou-li tyto podprostory navzájem disjunktní, určete též dimenzi jejich průniku $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

(a)
$$\begin{aligned} \mathcal{P}:\ X &= [0,-7,0,-4,9] \\ &\qquad +s\cdot(1,-1,1,1,3)+t\cdot(1,-2,-1,-2,2), \\ \mathcal{Q}:\ X &= [0,1,0,0,9] \\ &\qquad +u\cdot(1,1,-3,-3,1)+v\cdot(1,2,-1,0,2). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \mathcal{P}:\ X &= [0,-1,0,4,1] \\ &\qquad +s\cdot(1,2,4,0,-2)+t\cdot(4,-1,-4,0,7), \\ \mathcal{Q}:\ X &= [2,-3,1,4,0] \\ &\qquad +u\cdot(2,3,-1,0,4)+v\cdot(1,-5,2,0,-3). \end{aligned}$$

(c)
$$\mathcal{P}:\ X = [2,-6,5,-8,1]+r\cdot(2,-8,3,-5,1),$$
$$\mathcal{Q}:\ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}-4x_4+2x_5} &= 6, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 4. \end{aligned}$$

(d)
$$\mathcal{P}:\ X = [1,1,1,1,1]+r\cdot(1,2,-1,3,1),$$
$$\mathcal{Q}:\ \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 &= 8, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 6. \end{aligned}$$

(e)
$$\mathcal{P}:\ \begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \phantom{{}-3x_5} &= -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= 7, \\ x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}:\quad x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 6,\\
3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \phantom{{}+2x_5} &= 4,\\
4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5.
\end{aligned}
$$

2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť jsou implicitně pomocí soustav lineárních rovnic zadány roviny

$$
\begin{aligned}
\rho:\quad x_1 - 6x_2 - 9x_3 + x_4 &= 7,\\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta:\quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 4,\\
3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 24.
\end{aligned}
$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku p procházející bodem

$$G = [2, -1, 6, 5],$$

rovnoběžnou s rovinou ρ a protínající rovinu η. Najděte také průsečík této přímky p s rovinou η.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nechť jsou prostřednictvím parametrického popisu zadány přímky

$$
\begin{aligned}
q:\ X &= [3, 2, 3, 8] + u\cdot(1, 2, -1, -2),\\
r:\ X &= [1, 1, 9, 5] + v\cdot(2, 1, -2, -1),
\end{aligned}
$$

a dále nechť je implicitně pomocí soustavy lineárních rovnic zadána rovina

$$
\begin{aligned}
\vartheta:\quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 9.
\end{aligned}
$$

Najděte v prostoru $\mathbb{R}^4$ přímku h rovnoběžnou s rovinou ϑ a protínající obě přímky q i r. Najděte také průsečíky této přímky h s oběma přímkami q i r.

4. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ je dána báze

$$\gamma = \big(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5\big),$$

kde

$$\mathbf{g}_1 = (4,1,2,3,1),\ \mathbf{g}_2 = (1,4,1,2,3),\ \mathbf{g}_3 = (3,1,4,1,2),$$
$$\mathbf{g}_4 = (2,3,1,4,1),\ \mathbf{g}_5 = (1,2,3,1,4).$$

Najděte k ní duální bázi γ^* v duálním vektorovém prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R})$ pozůstávajícím ze všech lineárních forem na vektorovém prostru $\mathbb{R}^5$. Každou lineární formu duální báze γ^* přitom zadejte předpisem, podle něhož je možno stanovit hodnotu této lineární formy na libovolném vektoru $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5$.

5. Ve vektorovém prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R})$ duálním k vektorovému prostoru $\mathbb{R}^5$, který pozůstává ze všech lineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$, je dána báze

$$\Delta = \big(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\big),$$

kde lineární formy $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ jsou zadány následujícími předpisy. Hodnoty lineárních forem $h_1,h_2,h_3,$ h_4,h_5 na libovolném vektoru $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5$ jsou dány formulemi:

$$\begin{aligned}
h_1((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5,\\
h_2((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5,\\
h_3((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) &= 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 20x_5,\\
h_4((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) &= 6x_3 + 24x_4 + 60x_5,\\
h_5((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) &= 24x_4 + 120x_5.
\end{aligned}$$

Najděte vektory $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_3,\mathbf{h}_4,\mathbf{h}_5 \in \mathbb{R}^5$ takové, aby

$$\delta = \big(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_5\big)$$

byla báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ s vlastností, že daná báze Δ duálního vektorového prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R})$ je bází k ní duální, tedy taková, aby platilo $\Delta = \delta^*$.