Domácí úkoly ke cvičení č. 7

1. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ najděte ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4, 5)$ do vektorových podprostorů $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ zadaných jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\mathbf{V} = [(3, 3, 2, 1, 3), (5, 1, 4, -1, 1)],$$
$$\mathbf{W} = [(1, -3, 4, -2, 2), (1, 5, -8, -2, 4), (1, -9, 16, 4, -4)].$$

(Doporučení: Ve druhém případě najděte nejprve ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do ortogonálního doplňku $\mathbf{W}^{\perp}$ zadaného vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_5$.)

2. V obou následujících případech jsou v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ dány přímka p a rovina ρ. Přímka p je v obou případech zadána prostřednictvím parametrického popisu, zatímco rovina ρ je v prvním případě zadána rovněž prostřednictvím parametrického popisu, kdežto v druhém případě je zadána implicitně pomocí níže uvedené soustavy lineárních rovnic:

(a) $p: \; X = [3, 5, 7, 4] + r\cdot(4, -2, -2, 1),$
$\rho: \; X = [4, 3, 9, 10] + s\cdot(4, 1, -1, -1) + t\cdot(4, -1, 1, -1).$

(b) $p: \; X = [1, 6, 2, 4] + r\cdot(2, -1, 2, -2),$
$\rho: \; x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 11,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 57.$

V obou případech ověřte, že přímka p a rovina ρ jsou navzájem mimoběžné, a tedy jsou úplně mimoběžné. Dále v obou případech zjistěte vzdálenost přímky p od roviny ρ v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_4$. Nakonec najděte příčku těchto navzájem úplně mimoběžných podprostorů, tedy přímky p a roviny ρ, na níž se realizuje vzdálenost přímky p od roviny ρ. To znamená, najděte ty jednoznačně určené body $C \in p$ a $D \in \rho$ s vlastností, že délka úsečky CD je rovna vzdálenosti přímky p od roviny ρ.

3. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ jsou prostřednictvím parametrického popisu zadány dvě roviny

$$\begin{aligned} \rho &: \quad X = [2, 0, -1, 3] + s\cdot(1, -2, 0, 1) + t\cdot(2, -3, -2, 3), \\ \eta &: \quad X = [2, -1, -2, 9] + u\cdot(3, 6, 6, -10) + v\cdot(4, 5, 4, -8). \end{aligned}$$

Ověřte, že roviny ρ a η jsou navzájem částečně mimoběžné. Zjistěte vzdálenost roviny ρ od roviny η v prostoru $\mathbf{E}_4$. (Doporučení: Vypočtěte nejprve přímo ortogonální projekci vektoru spojujícího rovinu ρ s rovinou η do ortogonálního doplňku součtu zaměření $(\mathcal{Z}(\rho) + \mathcal{Z}(\eta))^\perp$ rovin ρ a η.)

4. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_4$ jsou implicitně pomocí soustav lineárních rovnic zadány dvě roviny

$$\begin{aligned} \rho : \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 37, \\ \eta : \quad & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40, \\ & x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1. \end{aligned}$$

Ověřte, že roviny ρ a η jsou navzájem rovnoběžné, ale nikoliv totožné. Zjistěte vzdálenost roviny ρ od roviny η v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_4$.