Výsledky domácích úkolů ke cvičení č. 4

1. Duální báze $\alpha^* = \big(f_0,\, f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4\big)$, kde

$$\begin{aligned}
f_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) &= e - d + c - b + a,\\
f_1(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) &= d - 2c + 3b - 4a,\\
f_2(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) &= c - 3b + 6a,\\
f_4(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) &= b - 4a,\\
f_5(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) &= a.
\end{aligned}$$

2. Báze $\beta = \big(q_0(x),\, q_1(x),\, q_2(x),\, q_3(x),\, q_4(x)\big)$, kde

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1,\\
q_1(x) &= x - 1,\\
q_2(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2},\\
q_3(x) &= \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6},\\
q_4(x) &= \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{24}.
\end{aligned}$$

3. Například vzhledem k bázi

$\alpha = \big((\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0),(\tfrac{1}{4},-1,\tfrac{1}{4},0),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,0),(\tfrac{3}{20},1,-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{10})\big)$

v souřadnicích

$(\mathbf{x})_\alpha = \begin{pmatrix} u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix},\ (\mathbf{y})_\alpha = \begin{pmatrix} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$

má bilineární forma f diagonální tvar

$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 - u_4v_4.$

Obdobně vzhledem k bázi

$\beta = \big((\tfrac{1}{4},0,\tfrac{1}{4},0),(\tfrac{1}{4},1,-\tfrac{1}{4},0),(\tfrac{1}{4},0,-\tfrac{1}{4},0),(\tfrac{3}{20},1,-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{10})\big)$

v souřadnicích

$(\mathbf{x})_\beta = \begin{pmatrix} s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix},\ (\mathbf{y})_\beta = \begin{pmatrix} t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix}$

má bilineární forma f diagonální tvar

$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = s_1t_1 + s_2t_2 - s_3t_3 - s_4t_4.$

4. Matice bilineární formy g ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

$\begin{pmatrix} 0&0&0&6\\0&0&2&12\\0&2&8&24\\6&12&24&48\end{pmatrix}.$

Například vzhledem k bázi

$\gamma = \big(\tfrac{\sqrt{2}}{4}x^2,\, \sqrt{3}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{12}x^3,\, \sqrt{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{4}x^2,\, \tfrac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \tfrac{\sqrt{3}}{12}x^3\big)$

v souřadnicích

$\big(p(x)\big)_\gamma = \begin{pmatrix} c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\ \big(q(x)\big)_\gamma = \begin{pmatrix} d_0\\d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

má bilineární forma g diagonální tvar

$g\big(p(x),q(x)\big) = c_0d_0 + c_1d_1 - c_2d_2 - c_3d_3.$