Seminář z matematiky II – jaro 2014 – opravná písemka

Všechna svoje tvrzení dokažte.

1. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $W_1, \dots, W_n$ jeho vektorové podprostory. Dokažte, že potom

$$\{ w_1 + \cdots + w_n \mid w_1 \in W_1, \dots, w_n \in W_n \}$$

je nejmenší vektorový podprostor V obsahující všechny podprostory $W_1, \dots, W_n$.

2. Pro libovolná čísla $c \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme zobrazení $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f(a + b \cdot \mathrm{i}) = c \cdot b + n \cdot a \cdot \mathrm{i}\,.$$

Rozhodněte, pro která c a n je toto zobrazení lineární, chápeme-li $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (respektive nad $\mathbb{C}$) s obvyklými operacemi.

3. Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ neexistuje. (Notace $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ značí celou část čísla $\frac{1}{x}$.)

4. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a splňuje $f(0) = f(1) = 0$ a $f'(0) = f'(1) > 0$. Z definice limity a derivace dokažte, že potom existuje $x \in (0, 1)$ takové, že $f(x) = 0$.

5. Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda korektně definuje uspořádání ρ na množině $\mathbb{Q}$:

   (a) $\frac{a}{b} \,\rho\, \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$,

   (b) $\frac{a}{b} \,\rho\, \frac{c}{d} \iff a + d = b + c \wedge a \leq c$,

   pro $a, c \in \mathbb{Z}$ a $b, d \in \mathbb{N}$.

6. Nechť ρ je tranzitivní binární relace na množině A. Dokažte, že potom $\rho \setminus \rho^{-1} \cup \mathrm{id}_A$ je uspořádání na A.