Přidružená norma – důkaz:

Norma – spojité zobrazení

$\{x;\ \|x\|_v = 1\}$ je kompaktní $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_0$ že $\|x_0\|_v = 1$ $\|Ax\|_v \leq \|Ax_0\|$ $\forall x: \|x\|_v = 1$

1) $\|A\|_v \geq 0$ – zřejmé

2) $\|A\|_v = 0 \Rightarrow Ax = \sigma$ $\forall x: \|x\|_v = 1 \Rightarrow Ax = \sigma$ $\forall x \neq \sigma$ $\Rightarrow A = 0$

$A = 0 \Rightarrow \|A\|_v = 0$

3) $\|\alpha \cdot A\|_v = \max \|\alpha \cdot Ax\|_v = \max |\alpha| \|Ax\|_v =$
$= |\alpha| \cdot \max \|Ax\|_v = |\alpha| \cdot \|A\|_v$

Souhlasnost:

$\forall x: \|Ax\|_v \leq \|A\|_v \cdot \|x\|_v$?

$x \neq \sigma$ $\|A \frac{x}{\|x\|_v}\| \leq \max\limits_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v = \|A\|_v$ $\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_v} \|Ax\|_v \leq \|A\|_v$

$\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$

4 2-16:04

4) $\|A+B\|_v = \|(A+B)x_0\|_v \leq \|Ax_0\|_v + \|Bx_0\|_v \leq$
$\leq \|A\|_v \cdot \underset{1}{\|x_0\|_v} + \|B\|_v \cdot \underset{1}{\|x_0\|_v} = \|A\|_v + \|B\|_v$

5) $\|A \cdot B\|_v = \|ABx_0\|_v = \|A(Bx_0)\|_v \leq \|A\|_v \cdot \|Bx_0\|_v$
$\leq \|A\|_v \cdot \|B\|_v \cdot \underset{1}{\|x_0\|}$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$

$\|y-x\| = \|x-y\| \geq \|y\| - \|x\|$

$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$

4 2-16:32

Přidruž. norma je nejmenší souhlasná.

Dk: $\|A\|_v$ – přidružená k $\|x\|_v$

$\|A\|$ – souhlasná s $\|x\|_v$

$x \neq 0$ $\|A \cdot \frac{x}{\|x\|_v}\|_v = \frac{1}{\|x\|_v} \|Ax\|_v \leq \frac{1}{\|x\|_v} \|A\| \cdot \|x\|_v = \|A\|$

$\Rightarrow \max \|A \cdot \frac{x}{\|x\|_v}\|_v \leq \|A\|$, kde $\max \|A \cdot \frac{x}{\|x\|_v}\|_v = \|A\|_v$

4 2-16:40

$\forall$ vl. číslo λ a souhl. normu:

$|\lambda| \leq \|A\|$ $x \neq \sigma$

Dk: x – vl. vektor, λ – přísl. vl. číslo

$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$

4 2-16:44

$\|B\| < 1 \Rightarrow E - B$ je regul.

$\|(E-B)^{-1}\| \leq \dfrac{\|E\|}{1 - \|B\|}$ $\|B\|$ – souhlasná

Dk: 1) λ – vl. číslo $B \Rightarrow E - B$ má vl. číslo $1 - \lambda$

$\forall \lambda: |\lambda| \leq \|B\| < 1$

$\Rightarrow$ vl. č. $E - B$ jsou nenulová

$\Rightarrow E - B$ – regulární.

2) $E = (E-B)(E-B)^{-1} = (E-B)^{-1} - B(E-B)^{-1}$

$\|E\| \geq \|(E-B)^{-1} - \|B \cdot (E-B)^{-1}\| \geq \|(E-B)^{-1}\| - \|B\| \cdot \|(E-B)^{-1}\|$
$= \|(E-B)^{-1}\| \cdot (1 - \|B\|)$

$\Rightarrow$ plyne tvrzení

4 2-17:04

$\rho(T) < 1 \Rightarrow E - T$ je regul. a

$(E-T)^{-1} = E + T + T^2 + \dots$

Dk: 1) $E - T$ nemá nulové vl. č. $\Rightarrow E - T$ je regul.

2) $(E-T)(E + T + T^2 + \dots T^k) =$
$= E + T + T^2 + \dots + T^k - T - T^2 - \dots - T^{k+1} = E - T^{k+1}$

$\lim\limits_{k \to \infty}$: $(E-T) \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k = E \Rightarrow$

$\Rightarrow (E-T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$

4 2-17:24

Dk hl. věty o konv. it. procesu:

$$x^{k+1} = T^{k+1}x^0 + (T^k + \dots + T + E)\cdot g$$

$$k \to \infty \quad \lim_{k\to\infty} x^{k+1} = x^* = (E-T)^{-1}\cdot g$$

$$(E-T)x^* = g$$

$$x^* = Tx^* + g$$

4 2-17:29