Numerické metody

Jiří Zelinka

Literatura

- Horová I., Zelinka J.: Numrické metody, 2. rozšířené vydání, MU, 2004
- Ralston A.: Základy numerické matematiky, Academia, 1978
- Vitásek E.: Numerické metody, SNTL, 1987
- Mathews, J.H., Fink, K.D.: Numerical methods using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003

Osnova

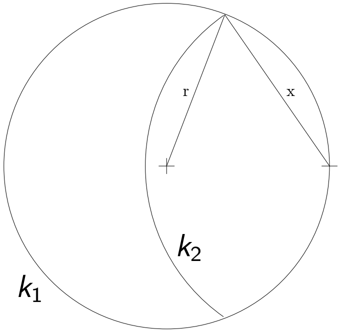
- Řešení nelineárních rovnic
- Polynomy
- Řešení soustav lineárních rovnic – přímé metody
- Řešení soustav lineárních rovnic – iterační metody
- Řešení soustav nelineárních rovnic

Předpoklady

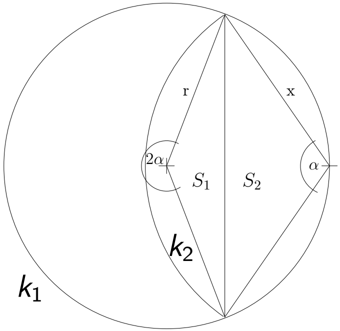
- Lineární algebra
- Diferenciální počet v $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$)
- Integrální počet v $\mathbb{R}$

Motivační příklad

Pro kružnici k_1 o poloměru r sestrojte kružnici k_2 se středem na kružnici k_1 o poloměru x tak, aby oblast ohraničena oběma kružnicemi měla poloviční obsah než vnitřek kružnice k_1.



Uvedenou oblast rozdělíme na dvě kruhové úseče o obsazích S_1 a S_2 a označíme si úhly u středů k_1 a k_2.

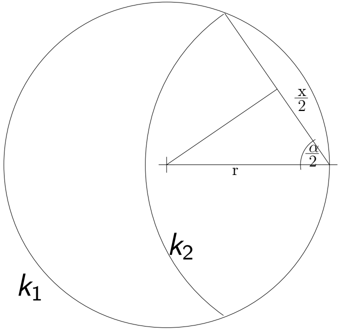


$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}S$$

$$S_1 = \frac{1}{2}x^2(\alpha - \sin\alpha)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}r^2((2\pi - 2\alpha) - \sin(2\pi - 2\alpha))$$

Určíme vztah mezi x a r.



$$\frac{x/2}{r} = \cos\frac{\alpha}{2}$$
$$x = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

Výslednou rovnici neumíme vyřešit přesně:

$$\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha + \pi$$

Chyby

x: přesná hodnota, $\tilde{x}$: aproximace x
$\tilde{x} - x$: *absolutní chyba* aproximace $\tilde{x}$
$|\tilde{x} - x| \leq \varepsilon$: *odhad absolutní chyby*

$\frac{x-\tilde{x}}{x}$: *relativní chyba*
$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \leq \delta$: *odhad relativní chyby*

Řešení nelineárních rovnic

- Řešíme rovnici $f(x) = 0$, funkce f je spojitá na $I = [a, b]$
- $\xi \in I$ je řešení rovnice neboli **kořen** funkce f, jestliže $f(\xi) = 0$
- Dostatečná podmínka pro existenci kořene na I:

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0$$

Proces hledání přibližného řešení

- Separace kořenů – nalezení intervalů, v nich leží právě jeden kořen
- Zpřesnění kořenů – konstrukce posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $x_n \to \xi$

Metoda půlení intervalu – bisekce

- f – spojitá na $I = [a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) \leq 0$
- Položíme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
- Pokud $f(a_0) \cdot f(c_0) \leq 0$ položíme $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$, v opačném případě $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

Obecně:

- Položíme $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$
- Pokud $f(a_i) \cdot f(c_i) \leq 0$ položíme $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = c_i$, v opačném případě $a_{i+1} = c_i$, $b_{i+1} = b_i$

Odhad chyby u metody bisekce

- Kořen ξ leží v $[a_i, b_i]$ pro každé i
- c_i je aproximace kořene ξ
- $|\xi - c_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b-a}{2^{i+1}}$
- $c_i \to \xi$
- Logaritmováním dokážeme předem určit počet iterací potřebných k dosažení požadované přesnosti.

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

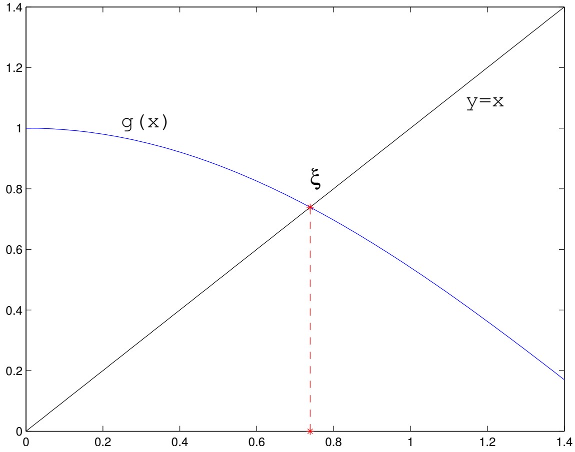
- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{i+1} = g(x_i)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Geometrická interpretace

Pevný bod ξ je průsečík grafu funkce g a přímky $y = x$.



Existence pevného bodu

Věta Jestliže spojitá funkce g zobrazuje interval I do sebe, tj. pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$, pak na intervalu I existuje alespoň jeden pevný bod ξ funkce g.
Důkaz: Položme $f(x) = x - g(x)$. Pak

$$g(a) \geq a \Rightarrow f(a) = a - g(a) \leq 0,$$

$$g(b) \leq b \Rightarrow f(b) = b - g(b) \geq 0$$

Protože f je spojitá, existuje ξ takové, že $f(\xi) = 0$, tedy $\xi - g(\xi) = 0$, neboli $\xi = g(\xi)$.

Jednoznačnost pevného bodu

Definice Funkce g zobrazující interval I do sebe se nazývá kontrakce na I, jestliže existuje taková konstanta L (Lipschitzova konstanta), $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodě

Jestliže funkce g je kontrakce na I, pak g má na tomto intervalu jediný pevný bod.

Důkaz: Existence plyne z předchozí věty. Pokud by existovaly 2 pevné body ξ_1 a ξ_2, pak

$$|\xi_1 - \xi_2| = |g(\xi_1) - g(\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2| < |\xi_1 - \xi_2|$$

Spor.

Poznámka: Tato věta platí obecně v úplných metrických prostorech.