Numerické metody
2. přednáška, 26. února 2014

Jiří Zelinka

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

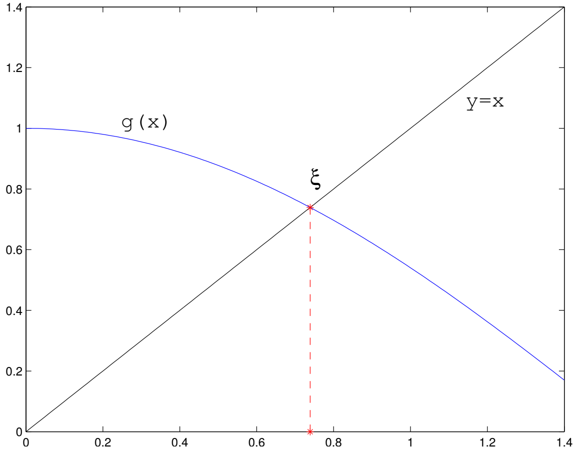
- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Geometrická interpretace

Pevný bod ξ je průsečík grafu funkce g a přímky $y = x$.



Existence pevného bodu

Věta: Jestliže spojitá funkce g zobrazuje interval I do sebe, tj. pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$, pak na intervalu I existuje alespoň jeden pevný bod ξ funkce g.
Důkaz: Položme $f(x) = x - g(x)$. Pak

$$g(a) \geq a \Rightarrow f(a) = a - g(a) \leq 0,$$

$$g(b) \leq b \Rightarrow f(b) = b - g(b) \geq 0$$

Protože f je spojitá, existuje ξ takové, že $f(\xi) = 0$, tedy $\xi - g(\xi) = 0$, neboli $\xi = g(\xi)$.

Jednoznačnost pevného bodu

Definice Funkce g zobrazující interval I do sebe se nazývá kontrakce na I, jestliže existuje taková konstanta L (Lipschitzova konstanta), $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodě

Jestliže funkce g je kontrakce na I, pak g má na tomto intervalu jediný pevný bod.

Důkaz: Existence plyne z předchozí věty. Pokud by existovaly 2 pevné body ξ_1 a ξ_2, pak

$$|\xi_1 - \xi_2| = |g(\xi_1) - g(\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2| < |\xi_1 - \xi_2|$$

Spor.

Konec opakování

Volba počáteční iterace

Věta: Nechť g je kontrakce s Lipschitzovou konstantou L na I a $x_0 \in I$ je libovolné. Pak iterační posloupnost definovaná vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ konverguje k pevnému bodu funkce g.
Důkaz:

$$|x_k - \xi| = |g(x_{k-1}) - g(\xi)| \leq L\,|x_{k-1} - \xi|$$

Indukcí

$$|x_k - \xi| \leq L^k\,|x_0 - \xi| \to 0 \; pro \; L < 1$$

Odhad chyby

Věta: Nechť g je kontrakce s Lipschitzovou konstantou L na I a $x_0 \in I$ je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_0 - x_1|$$

Důkaz:

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq L |x_k - x_{k-1}| \leq \ldots \leq L^k |x_1 - x_0|$$

Dále pro $m > k \geq 1$

$$\begin{aligned}
|x_m - x_k| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| \leq \\
&\leq L^{m-1} |x_1 - x_0| + L^{m-2} |x_1 - x_0| + \cdots + L^k |x_1 - x_0| = \\
&= L^k \left(1 + L + \cdots + L^{m-k-1}\right) |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

$$\lim_{m \to \infty} x_m = \xi$$

$$|\xi - x_k| = \lim_{m \to \infty} |x_m - x_k| \leq L^k \, |x_1 - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} L^n = \frac{L^k}{1 - L} \left| x_1 - x^0 \right|$$

Určení konstanty L pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Bod μ leží mezi x a y.

Pokud pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$ a g zobrazuje I do sebe, je g kontrakce na I.

Řád metody

Mějme posloupnost (x_n) získanou nějakou iterační metodou, $\lim\limits_{n\to\infty} = \xi$.
Chyba k-té iterace: $e_k = x_k - \xi$
Existuje-li nyní reálné číslo $p \geq 1$ takové, že platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \not\equiv 0,$$

řekneme, že daná iterační metoda je **řádu** p.

Věta: Nechť funkce g má v okolí bodu ξ derivace až do řádu $p \geq 1$ včetně. Iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$ je řádu p tehdy a jen tehdy, když platí

$$\xi = g(\xi), \qquad g^{(j)}(\xi) = 0, \qquad 1 \leq j < p, \qquad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Důkaz: Z Taylorova rozvoje.

Klasifikace pevných bodů

Pevný bod ξ funkce g se nazývá

- **přitahující** (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí V tohoto bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in V$ posloupnost iterací $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k bodu ξ.
- **odpuzující** (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí U bodu ξ, že pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in U, x_0 \neq \xi$, existuje takové k, že $x_k \notin U$.

Věta: Nechť $g \in C[a,b], g : [a,b] \to [a,b]$ a nechť ξ je pevný bod.

- Jestliže pro všechna $x \neq \xi$ z nějakého okolí V bodu ξ platí

  $$\left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}\right| < 1,$$

  pak ξ je přitahující pevný bod.
- Jestliže pro všechna $x \neq \xi$ z nějakého okolí U bodu ξ platí

  $$\left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}\right| > 1,$$

  pak ξ je odpuzující pevný bod.

Důsledek: Nechť $g \in C[a, b], g : [a, b] \to [a, b]$ a nechť g má v bodě ξ derivaci.

- Je-li $|g'(\xi)| < 1$, pak ξ je přitahující pevný bod.
- Je-li $|g'(\xi)| > 1$, pak ξ je odpuzující pevný bod.

Hledání vhodného tvaru iterační funkce

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad g(x) = x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{k}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$