Numerické metody
3. přednáška, 5. března 2014

Jiří Zelinka

Opakování

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Podmínky konvergence

1. Pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$
2. Existuje L, $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí

   $$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

   nebo:
   Pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$.

Pak $x_0 \in I$ může být libovolné, iterační proces konverguje.

Řád metody

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \not\equiv 0,$$

p - řád metody

Volba iterační funkce

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad g(x) = x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{k}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}$$

Příklad

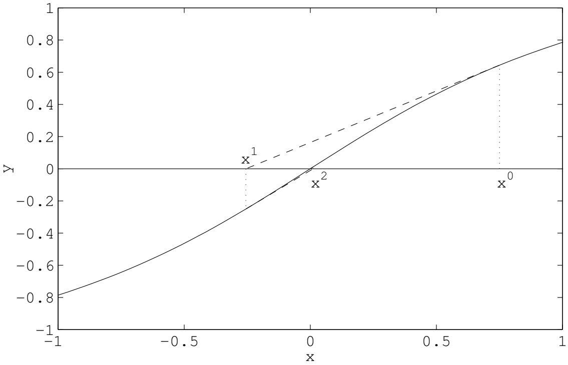
Výpočet $\sqrt[3]{10}$: $f(x) = x^3 - 10$, $x \in I = [2, 3]$
Položíme $g(x) = x - \frac{x^3-10}{k}$, hledáme k tak, aby g byla kontrakce.

1. Do I se musí zobrazit extremální hodnoty g, ty mohou být v krajních bodech nebo v lokálních extrémech:
$$2 \leq g(2) = 2 + \frac{2}{k} \leq 3 \quad \Rightarrow k \geq 2$$
$$2 \leq g(3) = 3 - \frac{17}{k} \leq 3 \quad \Rightarrow k \geq 17$$
Lokální extrém:
$g'(x) = 1 - \frac{3x^2}{k} = 0$, extrém je v bodě $\sqrt{k/3}$, leží v I pro $k \leq 27$, hodnota g v tomto bodě leží v I.
2. $|g'(x)|L < 1$: $g'(x) = 1 - \frac{3x^2}{k}$.
Extrémy mohou být v krajních bodech intervalu I nebo v lokálních extrémech (ten je v 0):
$$-1 < 1 - \frac{3 \cdot 2^2}{k} < 1 \quad \Rightarrow \quad k > 6$$
$$-1 < 1 - \frac{3 \cdot 3^2}{k} < 1 \quad \Rightarrow \quad k > 13.5$$

Konec opakování

Newtonova metoda

Uvažujme opět rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x.



Podobně pokračujeme dál: x_{i+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_i s osou x.

Rovnice tečny:

$$y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Máme tedy iterační funkci

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newtonova metoda se také nazývá **metoda tečen**.

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$. Nechť $\xi \in [a, b]$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že posloupnost $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$.

Důkaz

Ukážeme, že na $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ je funkce $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ kontrakcí.

Důsledek:

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:
$f(x) = x^3 - 10,\ x \in I = [2, 3]$

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 10}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3x^2}$$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.1667, \quad x_2 = 2.1545, \quad x_3 = 2.1544$$

Chování chyby u Newtonovy metody

Věta

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty, $M = \max_{x\in I} |f''(x)|$, $m = \min_{x \in I} |f'(x)| > 0$, $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$. Pak pro posloupnost $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovanou Newtonovou metodou platí

$$\begin{aligned} \text{a)}\ \left|x^{k+1} - \xi\right| &\leq \frac{M}{2m}(x^k - \xi)^2 \\ \text{b)}\ \left|x^{k+1} - \xi\right| &\leq \frac{M}{2m}(x^{k+1} - x^k)^2 \end{aligned}$$

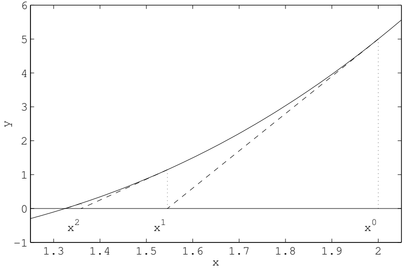
Důkaz

Z Taylorova rozvoje.

Fourierovy podmínky

Věta

Nechť $f \in C^2[a,b]$ a nechť rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ. Nechť f', f'' nemění znaménka na intervalu $[a,b]$, přičemž $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$. Nechť počáteční aproximace x^0 je ten z krajních bodů a, b, v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a,b]$. Pak posloupnost $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ.



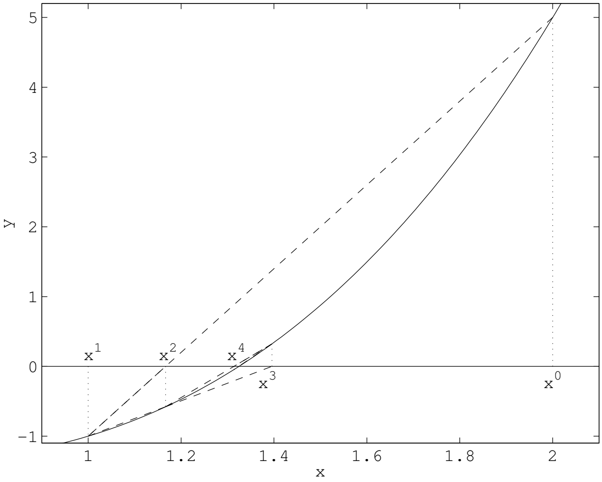
Metoda sečen

Derivaci v bodě x_i u Newtonovy metody nahradíme poměrnou diferencí

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i), \qquad i = 1, 2, \dots$$



y
x
5
4
3
2
1
0
−1
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x^1
x^2
x^4
x^3
x^0

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f', f'' jsou spojité v okolí bodu ξ, přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ, pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:
$f(x) = x^3 - 10$, $x \in I = [2, 3]$ Volíme $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, pak $x_2 = 2.1053$, $x_3 = 2.1391$, $x_4 = 2.11548$, $x_5 = 2.11544$.

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a,b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak aby Ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_s}{f(x_i) - f(x_s)} f(x_i), \qquad i = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(i)$ je největší index takový, že $f(x_i)f(x_s) < 0$ a $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).