Numerické metody
4. přednáška, 12. března 2014

Jiří Zelinka

Opakování

- Newtonova metoda

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Fourierovy podmínky
- Metoda sečen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

- Metoda regula falsi

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_s}{f(x_i) - f(x_s)} f(x_i),$$

kde $s = s(i)$ je největší index takový, že $f(x_i)f(x_s) < 0$.

Quasi Newtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $(x_k, f(x_k))$ a bodem $(x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k)))$, respektive bodem $(x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k)))$. Přitom pokud je bod x_k blízko hledaného kořene ξ, pak hodnota $f(x_k)$ je blízká nule a sečna procházející uvedenými body je blízká tečně vedené bodem x_k.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{\mp f(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

Poznámka:

Quasi Newtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz dále.

Věta

Nechť $f \in C^1[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ nechť je řešením rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná quasi Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a,b]$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

Důkaz: L'Hospitalovo pravidlo.

Iterační metody pro násobné kořeny

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \ldots, f^{(M-1)}(\xi) = 0, \ f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x^{k+1} = x^k - M\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

je metoda druhého řádu.

Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2-metoda

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x_k \neq \xi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, a nechť tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1} - \xi = (C + \gamma_k)(x_k - \xi), \; k = 0, 1, 2, \ldots, \; |C| < 1, \; \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0.$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká k a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

tj. posloupnost $\{\hat{x}_k\}$ konverguje k limitě ξ rychleji než posloupnost $\{x_k\}$.

Důkaz:

Korektnost výrazu pro velká k:

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = (x_{k+2} - \xi) - 2(x_{k+1} - \xi) + (x_k - \xi) =$$

$$= (x_{k+1} - \xi)(C + \gamma_{k+1}) - 2(x_k - \xi)(C + \gamma_k) + (x_k - \xi) =$$

$$= (x_k - \xi)(C + \gamma_k)(C + \gamma_{k+1}) - 2(x_k - \xi)(C + \gamma_k) + (x_k - \xi) =$$

$$= (x_k - \xi)(C^2 - 2C + 1 + \tau_k) = (x_k - \xi)\left((C - 1)^2 + \tau_k\right)$$

$$\hat{x}_k - \xi = x_k - \xi - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = (x_k - \xi) - \frac{(x_{k+1} - \xi - (x_k - \xi))^2}{(x_k - \xi)\left((C - 1)^2 + \tau_k\right)} =$$

$$= (x_k - \xi) - \frac{(x_k - \xi)^2 (C - 1 + \gamma_k)^2}{(x_k - \xi)\left((C - 1)^2 + \tau_k\right)} = (x_k - \xi)\left(1 - \frac{(C - 1 + \gamma_k)^2}{(C - 1)^2 + \tau_k}\right)$$

a odtud

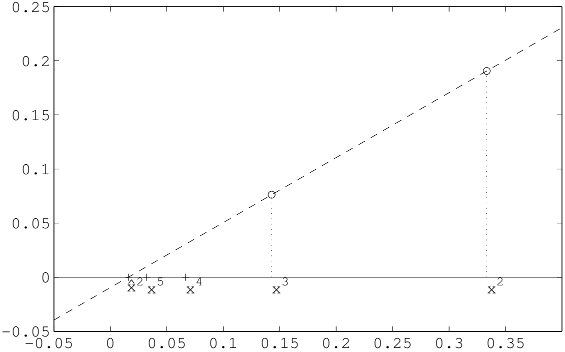
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{(C - 1 + \gamma_k)^2}{(C - 1)^2 + \tau_k}\right) = 0.$$

Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 + C + \gamma_k)$$

$$\varepsilon(x_{k+1}) = x_{k+1} - x_{k+2} = (x_{k+1} - \xi)(1 + C + \gamma_{k+1}) =$$
$$= (x_k - \xi)(C + \gamma_k)(1 + C + \gamma_{k+1}) \approx \varepsilon(x_k)(C + \gamma_k)$$



Rovnice přímky:

$$y - \varepsilon(x_k) = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k)$$

Průsečík s osou x ($y = 0$) je bod $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Steffensenova metoda

Buď g iterační funkce pro rovnici $x = g(x)$. Položme

$$y_k = g(x_k), \qquad z_k = g(y_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

V tomto případě je tedy $\varepsilon(x_k) = x_k - y_k$, $\varepsilon(y_k) = y_k - z_k$. Tato iterační metoda se nazývá **Steffensenova** a může být popsána iterační funkcí φ:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

kde

$$\varphi(x) = \frac{xg(g(x)) - g^2(x)}{g(g(x)) - 2g(x) + x}, \qquad g^2(x) = (g(x))^2.$$

$$\varphi(x_k) = \frac{x_k g(g(x_k)) - g^2(x_k)}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k} = \frac{x_k g(y_k) - (y_k)^2}{g(y_k) - 2y_k + x_k} =$$

$$= \frac{x_k z_k - (y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} = \frac{x_k(z_k - 2y_k + x_k) - (y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} =$$

$$= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

Věta

1. $\varphi(\xi) = \xi$ implikuje $g(\xi) = \xi$.
2. Jestliže $g(\xi) = \xi$, $g'(\xi)$ existuje a $g'(\xi) \neq 1$, pak $\varphi(\xi) = \xi$.

Věta

Nechť funkce g má spojité derivace až do řádu $p + 1$ včetně v okolí bodu $x = \xi$. Nechť iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ je řádu p pro bod ξ.
Pak pro $p > 1$ je iterační metoda $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ řádu $2p - 1$.
Pro $p = 1$ je tato metoda řádu alespoň 2 za předpokladu $g'(\xi) \neq 1$.

Müllerova metoda

Müllerova metoda je zobecněním metody sečen. Metoda sečen v podstatě znamená, že pro dané aproximace x_k, x_{k-1} bodu ξ aproximujeme funkci f přímkou procházející body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ a za další aproximaci bodu ξ vezmeme průsečík této přímky s osou x. Müllerova metoda užívá tři aproximace x_{k-2}, x_{k-1}, x_k a křivku $y = f(x)$ aproximujeme parabolou určenou těmito body. Průsečík této paraboly s osou x, který je nejbližší k x_k, vezmeme za další aproximaci x_{k+1}. Touto metodou lze najít i násobné a komplexní kořeny.

x_{k-2}, x_{k-1}, x_k jsou již vypočtené aproximace. Sestrojme polynom

$$P(x) = a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) + c$$

procházející body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$, $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$, t.j. splňující podmínky $P(x^i) = f(x^i)$, $i = k-2, k-1, k$. Z nich plyne

$$\begin{aligned} c &= f(x_k) \\ b &= \frac{(x_{k-2} - x_k)^2 \left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k)^2 \left[f(x_{k-2}) - f(x_k}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_{k-1})} \\ a &= \frac{(x_{k-2} - x_k)\left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k)\left[f(x_{k-2}) - f(x_k)\right]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})} \end{aligned}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Znaménko u odmocniny vybereme tak, aby bylo shodné se znaménkem b. Tato volba znamená, že jmenovatel zlomku bude v absolutní hodnotě největší a tedy výsledná hodnota x_{k+1} bude nejbližší x_k. Je tedy

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2c}{b + (signb)\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$