Numerické metody
5. přednáška, 19. března 2014

Jiří Zelinka

Opakování

- Quasi Newtonova metoda (plus/minus)

$$x_{k+1} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

- Iterační metody pro násobné kořeny – modifikovaná Newtonova metoda pro ξ – kořen násobnosti $M > 1$:

$$x^{k+1} = x^k - M\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

- Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2-metoda

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

- Steffensenova metoda

$$y_k = g(x_k), \quad z_k = g(y_k), \quad x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

Souvislost Steffensenovy a quasi Newtonovy metody

- Řešíme rovnici $f(x) = 0$.
- Položíme $g(x) = x + f(x)$.
- Použijeme Steffensenovu metodu na funkcí g.

$$
\begin{aligned}
y_k &= g(x_k) = x_k + f(x_k) \\
z_k &= g(y_k) = y_k + f(y_k) = x_k + f(x_k) + f(x_k + f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \\
&= x_k - \frac{(x_k + f(x_k) - x_k)^2}{x_k + f(x_k) + f(x_k + f(x_k)) - 2(x_k + f(x_k)) + x_k} \\
&= x_k + \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k) - f(x_k + f(x_k))}
\end{aligned}
$$

Müllerova metoda

Müllerova metoda je zobecněním metody sečen. U metody sečen pro aproximace x_k, x_{k-1} kořene ξ aproximujeme funkci f přímkou procházející body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ a za další aproximaci bodu ξ vezmeme průsečík této přímky s osou x. Müllerova metoda užívá tři aproximace x_{k-2}, x_{k-1}, x_k a křivku $y = f(x)$ aproximujeme parabolou určenou těmito body. Průsečík této paraboly s osou x, který je nejbližší k x_k, vezmeme za další aproximaci x_{k+1}. Touto metodou lze najít i násobné a komplexní kořeny.

Nechť x_{k-2}, x_{k-1}, x_k jsou již vypočtené aproximace. Sestrojme polynom

$$P(x) = a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) + c$$

procházející body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$, $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$, t.j. splňující podmínky $P(x^i) = f(x^i)$, $i = k-2, k-1, k$. Z nich plyne

$$
\begin{aligned}
c &= f(x_k) \\
b &= \frac{(x_{k-2} - x_k)^2 \left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k)^2 \left[f(x_{k-2}) - f(x_k)\right]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_{k-1})} \\
a &= \frac{(x_{k-2} - x_k) \left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k) \left[f(x_{k-2}) - f(x_k)\right]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})}
\end{aligned}
$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Znaménko u odmocniny vybereme tak, aby bylo shodné se znaménkem b. Tato volba znamená, že jmenovatel zlomku bude v absolutní hodnotě největší a tedy výsledná hodnota x_{k+1} bude nejbližší x_k. Je tedy

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2c}{b + (sign b)\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Polynomy

Π_n: třída polynomů stupně nejvýše n s reálnými koeficienty.
$P \in \Pi_n$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ kořeny (reálné i komplexní) polynomu P.

Věta: Hranice kořenů

Nechť

$$\begin{aligned} A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\ B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right), \end{aligned}$$

kde a_k, $k = n, n-1, \ldots, 0$, $a_0 a_n \neq 0$, jsou koeficienty polynomu $P \in \Pi_n$, Pak pro všechny kořeny $\xi_k, k = 0, 1, \ldots, n$, polynomu P platí

$$\frac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Příklad

Polynom s kořeny $\xi_1 = 1, \ldots, \xi_5 = 5$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \\ &= x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 \end{aligned}$$

$$A = B = 274, \quad \frac{1}{1 + \dfrac{274}{|120|}} = \frac{60}{197} \le |\xi_k| \le 275.$$

Věta

1. $|\xi_k| \leq \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}$
2. $|\xi_k| \leq 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \sqrt{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|}, \dots, \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}$
3. $|\xi_k| \leq \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1+\left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \dots, 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}.$

Předchozí příklad:

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

1. $|\xi_k| \leq \max\{1, 719\} = 719$
2. $|\xi_k| \leq 2\max\{30,\ 18.44,\ 12.16,\ 8.14,\ 5.21\} = 30$
3. $|\xi_k| \leq \max\{120,\ 275,\ 226,\ 86,\ 16\} = 275.$

Hornerovo schema

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$, $c \in \mathbb{R}$.
Vydělíme polynom $P(x)$ lineárním polynomem $x - c$:

$$P(x) = (x - c)Q(x) + A,$$

kde

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\,.$$

Koeficienty b_i, $i = 0, \ldots, n$ určíme z rekurentních vztahů:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + c b_k\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Pak je zřejmě $P(c) = A$.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	A

Označíme polynom Q jako Q_1 a hodnotu A jakožto A_0, v dalším kroku dostaneme podíl Q_2 a hodnotu A_1

$$Q_k(x) = (x - c) \cdot Q_{k+1}(x) + A_k.$$

Hornerovo schema pak (symbolicky zkráceno):

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & P & & & \\
\hline
c & & & & Q_1 & & & A_0 \\
c & & & Q_2 & & & A_1 & \\
c & & Q_3 & & & A_2 & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & \\
c & A_n & & & & & &
\end{array}$$

Pro polynom P pak dostáváme

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-c)Q_1(x) + A_0 = \\
&= (x-c)((x-c)Q_2(x) + A_1) + A_0 = \\
&= (x-c)^2 Q_2(x) + A_1(x-c) + A_0 = \\
&= (x-c)^2((x-c)Q_3(x) + A_2) + A_1(x-c) + A_0 = \\
&= (x-c)^3 Q_3(x) + A_2(x-c)^2 + A_1(x-c) + A_0 = \cdots = \\
&= A_n(x-c)^n + A_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + A_1(x-c) + A_0
\end{aligned}$$

Hodnoty $A_n, \ldots, A_0$ jsou tedy koeficienty polynomu P posunutého do bodu c – Taylorův rozvoj.

Zobecněné Hornerovo schema

Polynom P dělíme kvadratickým trojčlenem $D(x) = x^2 + px + q$:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + Ax + B$$

pro $Q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$.
Platí:

$$\begin{aligned}
b_{n-2} &= a_n \\
b_{n-3} &= a_{n-1} - pb_{n-2} \\
b_{n-4} &= a_{n-2} - pb_{n-3} - qb_{n-2} \\
&\vdots \\
b_k &= a_{k+2} - pb_{k+1} - qb_{k+2} \\
&\vdots \\
A &= a_1 - pb_0 - qb_1 \\
B &= a_0 - qb_0
\end{aligned}$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_1	a_0
$-p$	0	$-pb_{n-2}$	$-pb_{n-3}$	$-pb_{n-4}$	$\dots$	$-pb_0$	0
$-q$	0	0	$-qb_{n-2}$	$-qb_{n-3}$	$\dots$	$-qb_1$	$-qb_0$
	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_{n-3}	$\dots$	A	B

Počet reálných kořenů polynomu

Nechť $c_1, \dots, c_m$ je posloupnost reálných čísel různých od nuly.
Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} **nastává znaménková změna**, jestliže
$c_k c_{k+1} < 0$.
Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} **zachovává znaménko**, jestliže
$c_k c_{k+1} > 0$.

Poznámka

Jestliže polynom P má násobné kořeny, pak dělením polynomu P největším společným dělitelem P a P' dostaneme polynom, který má tytéž kořeny, ale všechny jednoduché.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P, jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0, pak $signP_1(\xi) = -signP_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$,

  $$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

  jestliže α je reálný kořen polynomu P_i.
- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

$$P_0(x) = P(x), \qquad P_1(x) = -P_0'(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i:

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_i P_{i+1}(x), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\mathrm{st}\, P_i > \mathrm{st}\, P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení P_{i-1}/P_i.
Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \le x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a, které je kořenem některého z polynomů P_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$:

	$a-h$	a	$a+h$
P_{i-1}	$-$	$-$	$-$
P_i	$-$	0	$+$
P_{i+1}	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	1	1	1

	$a-h$	a	$a+h$
P_{i-1}	$+$	$+$	$+$
P_i	$-$	0	$+$
P_{i+1}	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	1	1	1

	$a-h$	a	$a+h$
P_{i-1}	$-$	$-$	$-$
P_i	$+$	0	$-$
P_{i+1}	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	1	1	1

	$a-h$	a	$a+h$
P_{i-1}	$+$	$+$	$+$
P_i	$+$	0	$-$
P_{i+1}	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	1	1	1

	$a-h$	a	$a+h$
P_0	$-$	0	$+$
P_1	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	0	0	1

	$a-h$	a	$a+h$
P_0	$+$	0	$-$
P_1	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	0	0	1

Příklad

Určete počet reálných kořenů polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Řešení. Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou polynomu $P(x)$. Je

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 3x + 1, \qquad P_0'(x) = 3x^2 - 3, \\ P_1(x) &= -x^2 + 1. \end{aligned}$$

Polynom P_2 je záporně vzatý zbytek při dělení polynomu P_0 polynomem P_1, tj. $P_2(x) = 2x - 1$ a dále $P_3(x) = -3/4$.

Sestavíme tabulku pro určení počtu reálných kořenů.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	3
0	$+$	$+$	$-$	$-$	1
-1	$+$	0	$-$	$-$	1
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	0
1	$-$	0	$+$	$-$	2
2	$+$	$-$	$+$	$-$	3