Numerické metody
6. přednáška, 26. března 2014

Jiří Zelinka

Opakování

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

Hranice kořenů

$$\begin{aligned} A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\ B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

1. $|\xi_k| \le \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}$

2. $|\xi_k| \le 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \sqrt{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|}, \dots, \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}$

3. $|\xi_k| \le \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1+\left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \dots, 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}.$

Sturmova posloupnost

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_m$$

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0, pak $sign P_1(\xi) = -sign P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$,

  $$P_{i+1}(\alpha) P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

  jestliže α je reálný kořen polynomu P_i.
- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

$$P_0(x) = P(x), \qquad P_1(x) = -P_0'(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i:

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_i P_{i+1}(x), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\mathrm{st}\, P_i > \mathrm{st}\, P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení P_{i-1}/P_i.
Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \ldots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Konec opakování

Odhady počtu kořenů polynomu

Věta (Descartes)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ nebo o sudé číslo menší.
Jsou-li všechny koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Příklad

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 10$$

Posloupnost koeficientů: $1, -2, 8, 3, -1, 1, -10$
Počet kladných kořenů: 5 nebo 3 nebo 1
Počet záporných kořenů: 1

Odhady počtu kořenů polynomu

Věta (Descartes)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ nebo o sudé číslo menší.
Jsou-li všechny koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Příklad

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 10$$

Posloupnost koeficientů: $1, -2, 8, 3, -1, 1, -10$
Počet kladných kořenů: 5 nebo 3 nebo 1
Počet záporných kořenů: 1

Problém – volba počáteční aproximace

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$ je polynom stupně $n \geq 2$. Nechť všechny kořeny ξ_i,

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n,$$

jsou reálné. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci $x_0 > \xi_1$ a platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi_1$.

Příklad

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) \\
&= x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720
\end{aligned}
$$

$$|\xi_i| < 1765$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1765 \\
x_1 &\doteq 1\,226.8 \\
x_2 &\doteq 1\,022.9 \\
x_3 &\doteq 859.99 \\
x_4 &\doteq 711.41 \\
&\vdots \\
x_{10} &\doteq 287.99 \\
&\vdots \\
x_{20} &\doteq 49.48
\end{aligned}
$$

Zdvojená Newtonova metoda

Pro velké x_k:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k)^n + \dots}{n(x^k)^{n-1} + \dots} \approx x^k \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$, $n \geq 2$, a nechť všechny kořeny $\xi_i, i = 1, \dots, n$ polynomu P jsou reálné a $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$. Nechť α_1 je největší kořen P':

$$\xi_1 \geq \alpha_1 \geq \xi_2.$$

Pro $n = 2$ předpokládejme $\xi_1 > \xi_2$. Pak pro každé $z > \xi_1$ jsou čísla

$$z' = z - \frac{P(z)}{P'(z)}, \qquad y = z - 2\frac{P(z)}{P'(z)}, \qquad y' = y - \frac{P(y)}{P'(y)}$$

definována a platí

$$\alpha_1 < y, \qquad \xi_1 \leq y' \leq z'.$$

Algoritmus

Začneme s počáteční aproximací $x_0 > \xi_1$ a zdvojenou metodou:

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{P(x_k)}{P'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Mohou nastat dva případy:

1. $P(x_0)P(x_k) > 0$ pro všechna k. Pak

$$x_0 > x_1 > \dots > x_k > \dots \geq \xi_1, \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = \xi_1$$

2. Existuje x_k tak, že $P(x_k)P(x_0) < 0$, $P(x_{k-1})P(x_0) > 0$. V tomto případě tedy došlo k „přestřelení“ bodu ξ_1 a platí

$$x_0 > x_1 > \dots > x_{k-1} > \xi_1 > x_k > \alpha_1 > \xi_2.$$

Položme $y_0 = x_k$ a pokračujme dále klasickou Newtonovou metodou s touto počáteční aproximací:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Snižování stupně

$P_1(x) = \frac{P(x)}{x-\tilde{\xi}_1}$ – numerické nepřesnosti v koeficientech.

Příklad

P – polynom s kořeny $\xi_1 = 10, \ldots, \xi_{10} = 1$
Aproximace kořenů:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_1 &\doteq 10.000000040624446 \\
\tilde{\xi}_2 &\doteq 8.999999654991576 \\
\tilde{\xi}_3 &\doteq 8.000001300611824 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_7 &\doteq 4.000018865503898 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_{10} &\doteq 0.9999962963847448
\end{aligned}$$

Snižování stupně

$P_1(x) = \frac{P(x)}{x-\tilde{\xi}_1}$ – numerické nepřesnosti v koeficientech.

Příklad

P – polynom s kořeny $\xi_1 = 10, \ldots, \xi_{10} = 1$
Aproximace kořenů:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}_1 &\doteq 10.000000040624446 \\
\tilde{\xi}_2 &\doteq 8.999999654991576 \\
\tilde{\xi}_3 &\doteq 8.000001300611824 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_7 &\doteq 4.000018865503898 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_{10} &\doteq 0.9999999629638474448
\end{aligned}
$$

Maehlyova metoda

$$P_1'(x) = \frac{P'(x)}{x - \tilde{\xi}_1} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1)^2},$$

Dosazením tohoto vyjádření do vzorce pro Newtonovu metodu pro polynom P_1 dostaneme:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{P_1(x^k)}{P_1'(x^k)} = x^k - \frac{P(x^k)}{P'(x^k) - \dfrac{P(x^k)}{x^k - \tilde{\xi}_1}}$$

Obecně, jestliže jsme již nalezli aproximace kořenů $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_j$, postupujeme obdobně a sestrojíme polynom

$$P_j(x) = \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)},$$

$$P_j'(x) = \frac{P'(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \dots (x - \tilde{\xi}_j)} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{x - \tilde{\xi}_i}$$

Newtonova metoda pro nalezení kořene ξ_{j+1} je tvaru

$$x^{k+1} = \Phi_j(x^k), \qquad \Phi_j(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{i=1}^{j} \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_i}}.$$