Numerické metody
7. přednáška, 2. dubna 2014

Jiří Zelinka

Vektory – prvky $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$, sloupcové.

Normy vektorů

Vektorová norma na $\mathbb{C}^n$ je funkce $\| \cdot \|$ (z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{R}$) s následujícími vlastnostmi:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{o} = (0, \ldots, 0)^T$
3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$

Příklady vektorových norem:

1. $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (eukleidovská norma)
2. $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (oktaedrická norma)
3. $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (krychlová norma)
4. $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (p norma)

Každá vektorová norma indukuje metriku danou vztahem $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Konvergence v normě: $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0$.

Matice

Nechť A je čtvercová matice řádu n s reálnými resp. komplexními prvky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_n$: třída všech matic tohoto typu.
Matici A lze považovat za vektor dimenze n^2. Mohli bychom tedy definovat normu matice jako normu vektoru. Ale potřebujeme i další vlastnosti:

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ – vlastní vektor matice AA, λ – příslušné vlastní číslo

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $\psi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$, E – jednotková matice

Spektrální poloměr matice: $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|;\ \lambda_k \text{ je vlastní číslo matice } A\}$

Stopa matice: $tr(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$

Normy matic

Maticová norma na množině $\mathcal{M}_n$ je reálná funkce $\| \cdot \|$ s těmito vlastnostmi:

1. $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ je nulová matice
3. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$
5. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$

Vlastnost 5) se nazývá **multiplikativnost**.

Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma $\| \cdot \|$ je *souhlasná* s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$, jestliže

$$\|A\boldsymbol{x}\|_\varphi \leq \|A\| \, \|\boldsymbol{x}\|_\varphi, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Přidružená norma

Nechť $\| \cdot \|_\varphi$ je vektorová norma na $\mathbb{C}^n$. Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$.

Pro jednotkovou matici E platí

$$\|E\|_\varphi = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1} \|E\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1$$

a pro souhlasnou maticovou normu platí $\|E\| \geq 1$.

Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

Věta

Nechť maticová norma $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\| \cdot \|_\varphi$. Pak pro všechna vlastní čísla λ matice A platí:

$$|\lambda| \leq \|A\| .$$

Přidružené maticové normy

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$. Přidružené maticové normy k vektorovým normám $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ jsou dány vztahy

1. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
2. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
3. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$, $\rho(A^* A)$ je spektrální poloměr $A^* A$, kde $A^* = \overline{A}^T$, pro reálné matice je $A^* = A^T$.

$\|A\|_2$ – spektrální norma matice

Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

- $\|A\|_F^2 = tr(A^* A)$
- $\|E\|_F = \sqrt{n}$.
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$.

Věta

Nechť $\|B\| < 1$, $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice $E - B$ je regulární a platí

$$\left\|(E - B)^{-1}\right\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$

Iterační metody řešení systémů lineárních rovnic

Systém

$$Ax = \boldsymbol{b}$$

převedeme na

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

$\boldsymbol{x}^*$ – řešení
$\boldsymbol{x}^* = (E - T)^{-1}\boldsymbol{g}$ za předpokladu, že $E - T$ je regulární.

$\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ – libovolná počáteční aproximace. Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určená rekurentně vztahem

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

se nazývá **iterační posloupnost** a matice T se nazývá **iterační matice**

Problémy:

1. Jak zvolit iterační matici T, tj. jakým způsobem převést systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na systém $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$?
2. Za jakých předpokladů posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci k přesnému řešení $\boldsymbol{x}^*$?

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^1 &= T\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{x}^2 &= T\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{g} = T(T\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g} = T^2\boldsymbol{x}^0 + (T + E)\boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{x}^3 &= T\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{g} = T^3\boldsymbol{x}^0 + (T^2 + T + E)\boldsymbol{g}, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{k+1} &= T^{k+1}\boldsymbol{x}^0 + (T^k + T^{k-1} + \ldots + E)\boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

Definice

Řekneme, že matice H je **konvergentní**, jestliže

$$\lim_{k\to\infty} H^k = O,$$

kde O je nulová matice, konvergence je bodová.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. H je konvergentní matice.
2. $\lim_{k\to\infty} \|H^k\| = 0$ pro nějakou přidruženou maticovou normu.
3. $\rho(H) < 1$ ($\rho(H)$ je spektrální poloměr H).
4. $\lim_{k\to\infty} H^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lemma

Nechť $\rho(T) < 1$. Pak $E - T$ je regulární a platí

$$(E - T)^{-1} = E + T + T^2 + \dots$$

Hlavní věta o konvergenci iteračního procesu

Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určená iteračním procesem $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T) < 1$, přičemž

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}^* = T\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}$$

Důsledek

Nechť pro nějakou přidruženou maticovou normu platí $\|T\| < 1$. Pak posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná iteračním procesem $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ konverguje k řešení $\boldsymbol{x}^* = (E - T)^{-1}\boldsymbol{g}$ pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Dále platí

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k\| &\le \|T\|^k \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0\|, \\ \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k\| &\le \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\|. \end{aligned}$$

Kriteria pro zastavení výpočtu

1. $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| / \|\boldsymbol{x}^k\| < \varepsilon$
2. $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \leq \varepsilon(\|A\| \, \|\boldsymbol{x}^{k+1}\| + \|\boldsymbol{b}\|)$, kde $\boldsymbol{r}^{k+1} = A\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b}$

maticová norma je přidružená dané vektorové normě, $\varepsilon > 0$ je požadovaná přesnost.