Numerické metody
9. přednáška, 16. dubna 2014

Jiří Zelinka

Jacobiova iterační metoda

$$Ax = \boldsymbol{b}, \qquad A = D - L - U,$$
$$Ax = (D - L - U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$D\boldsymbol{x} = (L + U)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

Jacobiova iterační matice: $T_J = D^{-1}(L + U)$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T_J\boldsymbol{x}^k + D^{-1}\boldsymbol{b},$$

$T_J = (t_{ij})$, $t_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pro $i \neq j$, $t_{ii} = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$.

V souřadnicích:

Z i-té rovnice vypočteme x_i:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

Věta o konvergenci Jacobiovy iterační metody:

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná metodou $\boldsymbol{x}^{k+1} = T_J \boldsymbol{x}^k + D^{-1}\boldsymbol{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\varrho(T_J) < 1$.

Silné řádkové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Gaussova-Seidelova iterační metoda

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad (D - L - U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D - L)\boldsymbol{x} &= U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} = (D - L)^{-1} U\boldsymbol{x} + (D - L)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Jacobiova iterační matice: $T_G = (D - L)^{-1} U$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T_G \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g} = (D - L)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

V souřadnicích:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Věta

Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Gaussovou-Seidelovou iterační metodou $\boldsymbol{x}^{k+1} = (D-L)^{-1}U\boldsymbol{x}^k + (D-L)^{-1}\boldsymbol{b}$. konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\varrho(T_G) < 1$.

Silné řádkové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní. Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Relaxační metody

Modifikace Gaussovy–Seidelovy metody, ω – relaxační parametr

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right].$$

Relaxační metodu lze maticově zapsat takto

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]\boldsymbol{x}^k + \omega(D-\omega L)^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$T_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$$

Konec opakování

Hodnoty parametru ω:

Pro $0 < \omega < 1$ se iterační metody nazývají **metodami dolní relaxace**. Tyto metody jsou vhodné v případě, že Gaussova-Seidelova metoda nekonverguje.

Pro $\omega = 1$ je relaxační metoda totožná s Gaussovou-Seidelovou metodou.

Pro $1 < \omega$ se metody nazývají **metodami horní relaxace**, nebo častěji SOR metodami (SOR = Successive Over-Relaxation). Tyto metody lze užít ke zrychlení konvergence Gaussovy-Seidelovy metody.

Věta (Kahan).

Nechť $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$\varrho(T_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Důsledek: Má smysl uvažovat jen $\omega \in (0, 2)$.

Optimální hodnota ω – minimalizuje $\varrho(T_\omega)$

Věta (Ostrowski-Reich).

Pro pozitivně definitní matici A platí $\varrho(T_\omega) < 1$ pro všechna $\omega \in (0, 2)$.

Třídiagonální matice:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, \qquad a_{ij} = 0, \text{ pro } |i - j| > 1$$

Věta.

Nechť A je třídiagonální pozitivně definitní matice. Pak $\varrho(T_G) = \varrho^2(T_J) < 1$ a optimální hodnota relaxačního parametru je dána vztahem

$$\omega = \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2(T_J)}}.$$

Při této volbě je $\varrho(T_\omega) = |1 - \omega|$.

Cykly v iteračních metodách

Například pro systémy

$$\begin{aligned} x_1 + kx_2 &= b_1 \\ x_1 - kx_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Jacobiova metoda: cyklus délky 4
Gaussova–Seidelova metoda: cyklus délky 2

Relaxační metody: cykly různých délek

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ qx_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Pro $\omega = 2$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2q & 4q-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi, \quad q = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$$

$\varphi = 2\pi l/p$, $0 < l < p/2 \Rightarrow$ existuje cyklus délky p.

Body cyklu leží na elipse se středem v hledaném řešení.

Iterační metody pro systémy nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_m) &= 0 \\
&\vdots \\
f_m(x_1, \dots, x_m) &= 0
\end{aligned}
$$

Kořen systému: uspořádaná m-tice reálných čísel

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m),$$

která tomuto systému vyhovuje.

Vektorový tvar:

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{o} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Systém převedeme na ekvivalentní rovnici

$$\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

neboli

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & g_1(x_1, \ldots, x_m) \\ & \vdots & \\ x_m & = & g_m(x_1, \ldots, x_m) \end{array}$$

a budeme hledat pevný bod zobrazení $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Definujme nyní v prostoru $\mathbb{R}^m$ metriku:

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le m} |x_i - y_i|.$$

Prostor $\mathbb{R}^m$ s takto definovanou metrikou je úplným metrickým prostorem. Nyní lze pro vyšetřování konvergence iteračního procesu $\boldsymbol{x}^{k+1} = G(\boldsymbol{x}^k), k = 0, 1, 2, \ldots$ užít Banachovy věty o pevném bodě.

Věta

Nechť zobrazení $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je kontrakce na $\mathbb{R}^m$,

$$\varrho(G(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{y})) \le q\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad 0 \le q < 1.$$

Pak pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ je posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\boldsymbol{x}^k = G(\boldsymbol{x}^{k-1})$, konvergentní v $\mathbb{R}^m$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{\xi}$, kde $\boldsymbol{\xi}$ je jediný pevný bod zobrazení G.

Věta

Nechť $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ je pevný bod rovnice $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$. Nechť funkce $g_i, i = 1, \ldots, m$, mají spojité parciální derivace pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{\xi}, r)$, $\Omega(\boldsymbol{\xi}, r) = \{\boldsymbol{x} | \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \le r\}$. Nechť dále platí

$$\left| \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \right| \le \frac{q}{m}, \qquad i, j = 1, \ldots, m,$$

$0 \le q < 1$ a nechť $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega(\boldsymbol{\xi}, r)$. Pak všechny iterace $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určené vztahem $\boldsymbol{x}^{k+1} = G(\boldsymbol{x}^k)$ leží v množině $\Omega(\boldsymbol{\xi}, r)$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{\xi}$.

Jednodušší předpoklad:

$$\max_{1\leq i\ \leq m} \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \right| \leq q < 1.$$

Seidelova matoda

Pro výpočet x_i^{k+1} použijeme již vypočtených hodnot $x_1^{k+1}, \dots,$ x_{i-1}^{k+1}, tj.

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k) \\
x_2^{k+1} &= g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_m^k) \\
x_3^{k+1} &= g_3(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_m^k) \\
&\vdots \\
x_m^{k+1} &= g_m(x_1^{k+1}, \dots, x_{m-1}^{k+1}, x_m^k).
\end{aligned}$$

Newtonova metoda pro systémy nelineárních rovnic

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}, \qquad F \in C^2(O(\boldsymbol{\xi}))$$

$$J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Taylorův rozvoj:

$$F(\boldsymbol{x} + h) = F(\boldsymbol{x}) + J_F(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} + O(\|\boldsymbol{h}\|^2) \cdot (1, \ldots, 1)^T$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{h} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k$$

Zanedbáme chybový člen,
$F(\boldsymbol{x} + h) = \boldsymbol{o} \Rightarrow J_F(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k) = -F(\boldsymbol{x}^k)$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - J_F^{-1}(\boldsymbol{x}^k)F(\boldsymbol{x}^k)$$

Iterační funkce

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x})$$

Věta

Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je kořenem rovnice $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$. Nechť $J_F(\boldsymbol{x})$ je regulární matice se spojitými prvky v okolí $O(\boldsymbol{\xi})$ bodu $\boldsymbol{\xi}$, přičemž

$$\left\| J_F^{-1}(\boldsymbol{x}) \right\|_\infty \leq K, \qquad K = \mathrm{konst.},$$

pro všechna $\boldsymbol{x}$ z tohoto okolí. Nechť funkce $f_i, i = 1, \ldots, m$, mají spojité druhé parciální derivace v $O(\boldsymbol{\xi})$.
Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje ke kořenu $\boldsymbol{\xi}$ za předpokladu, že počáteční aproximace $\boldsymbol{x}^0$ leží dostatečně blízko $\boldsymbol{\xi}$. Řád metody je roven dvěma.