Numerické metody
10. přednáška, 23. dubna 2014

Jiří Zelinka

Základní pojmy

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A – matice soustavy, regulární. Řešení: $\tilde{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

Rozšířená matice soustavy:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Základní pojmy

$$Ax = \boldsymbol{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A – matice soustavy, regulární. Řešení: $\tilde{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

Rozšířená matice soustavy:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

A – **dolní trojúhelníková**: $a_{ij} = 0$ pro $i < j$.

A – **horní trojúhelníková**: $a_{ij} = 0$ pro $i > j$.

A – **pásová**, jestliže existují p, q, $1 < p$, $q < n$ taková, že $a_{ij} = 0$, jestliže $i + p \leq j$ nebo $j + q \leq i$, šířka pásu $w = p + q - 1$.

A – **třídiagonální** pro $p = q = 2$.

A – **ryze řádkově diagonálně dominantní**

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

A – **ryze sloupcově diagonálně dominantní** – podobně

Věta:

Ryze řádkově (sloupcově) diagonálně dominantní matice, je regulární.

Gaussova eliminační metoda

Úprava soustavy na soustavu s horní trojúhelníkovou maticí R:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Pak provádíme tzv. zpětný chod – počítáme řešení od poslední složky k první.

Elementární úpravy a matice úprav

Neméní řešení, každá úprava má inverzi.

1. násobení řádku nenulovou konstantou c

$$I_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & c & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad I_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1/c & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. výměna řádků i, k

$$
{}_k = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & \cdots & & & & & 0 \\
0 & 1 & & & & & & & & & & 0 \\
 & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & 0 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}, \quad P_{i,k}^{-1} = P_{i,k}
$$

$P_{i,k}$ – permutační matice

3. přičtení c násobku i-tého řádku ke k-tému, $i < k$

$$G_{i,k,c} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & c & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$G_{i,k,c}^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -c & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ve skutečnosti pro převod na trojúhelníkovou matici stačí 2. a 3. elementární úprava.

Postup při Gaussově eliminaci

(1) výměna 1. a k-tého řádku (v případě potřeby)

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(A^{(1)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(1)}\right), \quad \left(A^{(1)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(1)}\right) = P_{1,k} \cdot (A \mid \boldsymbol{b})$$

(1') vynulování prvního sloupce pod hlavní diagonálou

$$\left(A^{(1')} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(1')}\right) = G_1 \cdot \left(A^{(1)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(1)}\right), \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$l_{k1} = -\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

(i) výměna i-tého. a k-tého řádku (v případě potřeby)

$$\left(A^{(i)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i)}\right) = P_{i,k} \cdot \left(A^{(i-1')} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i-1')}\right)$$

(i') vynulování i-tého sloupce pod hlavní diagonálou

$$\left(A^{(i')} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i')}\right) = G_i \cdot \left(A^{(i)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i)}\right),$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & l_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}, \quad l_{ki} = -\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

$i = 2, \ldots, n-1$

Gaussova eliminaca bez výměny řádků:

$$\left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot (A \mid \boldsymbol{b})$$

tedy

$$R = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot A$$

odkud

$$G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1} R = A.$$

Matice G_i jsou dolní trojúhelníková, tedy G_1^{-i} jsou také dolní trojúhelníkové, takže

$$A = L \cdot R, \qquad L = G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1}.$$

L – dolní trojúhelníková matice.

$$G_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -l_{ni} & & & 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} \dots G_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -l_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

LR **rozklad**

$A = L \cdot R$: LR (též LU) rozklad matice A

Použití při řešení soustavy: substituce $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, řešíme soustavu $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ s dolní trojúhelníkovou maticí, pak $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ s horní trojúhelníkovou maticí.

LR **rozklad s výměnou řádků**

Provádíme LR rozklad matice $P \cdot A$, kde P je vhodná permutační matice, která provádí výměnu řádků.
Při praktickém výpočtu, pokud narazíme na potřebu vyměnit řádky, postupujeme takto:
Pokud bychom vyměnili řádky předem, v už vypočítané části matice L by tyto řádky byly vyměněny, zbytek by se nezměnil.
Proto můžeme vyměnit řádky ve vypočítané části matice L.
Dále v pomocném vektoru $\boldsymbol{p}$ na začátku nastaveném na $(1, 2, \ldots, n)^T$ zaznamenáme výměnu řádků, tedy vyměníme v něm stejné řádky.