Numerické metody
11. přednáška, 30. dubna 2014

Jiří Zelinka

Opakování

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A – matice soustavy, regulární.

Rozšířená matice soustavy:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Opakování

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A – matice soustavy, regulární.

Rozšířená matice soustavy:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

(i) výměna i-tého. a k-tého řádku (v případě potřeby)

$$\left(A^{(i)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i)}\right) = P_{i,k} \cdot \left(A^{(i-1')} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i-1')}\right)$$

(i') vynulování i-tého sloupce pod hlavní diagonálou

$$\left(A^{(i')} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i')}\right) = G_i \cdot \left(A^{(i)} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}^{(i)}\right),$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & l_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}, \quad l_{ki} = -\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

Gaussova eliminace bez výměny řádků:

$$\left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot (A \mid \boldsymbol{b})$$

$$R = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot A \quad \Rightarrow \quad G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1} R = A.$$

$$A = L \cdot R, \qquad L = G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1}.$$

L – dolní trojúhelníková matice.

$$G_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -l_{ni} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} \dots G_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -l_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = L \cdot R$: LR (též LU) rozklad matice A

Použití při řešení soustavy: substituce $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, řešíme soustavu $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ s dolní trojúhelníkovou maticí, pak $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ s horní trojúhelníkovou maticí.

***LR* rozklad s výměnou řádků**

Provádíme LR rozklad matice $P \cdot A$, kde P je vhodná permutační matice, která provádí výměnu řádků.

Konec opakování.

Příklad:

LR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 0,0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

se zaokrouhlováním na 3 platné číslice.

Výběr vedoucího prvku (pivota) – částečný

Při úpravě i-tého sloupce najdeme mezi prvky $a_{ii}^{(i-1)}, \ldots, a_{ni}^{(i-1)}$ prvek s maximální absoulutní hodnotou (např. $a_{ki}^{(i-1)}$), pak vyměníme i-tý a k-tý řádek.

Výběr vedoucího prvku (pivota) – úplný

Hledáme prvek s maximální absoultní hodnotou mezi $a_{jk}^{(i-1)}$, $i \leq j \leq n$, $i \leq k \leq n$, pak vyměníme příslušný řádek a spoupec, čímž se změní pořadí proměnných.

Příklad

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\
x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

Věta

- Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.
- Nechť matice A je pozitivně definitní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.

Věta

Nechť všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak matici A lze rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

Věta

- Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.
- Nechť matice A je pozitivně definitní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.

Věta

Nechť všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak matici A lze rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

Choleského rozklad

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.