Numerické metody
12. přednáška, 7. května 2014

Jiří Zelinka

Opakování

- Gaussova eliminační metoda
- LR rozklad
- Výběr hlavního prvku (pivota)

Věta

- Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.
- Nechť matice A je pozitivně definitní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.

Věta

Nechť všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak matici A lze rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

Poznámka

Rozklad je jednoznačný, pokud v jedné matici předepíšeme diagonální prvky, zpravidla jedničky.

Konec opakování

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Výpočet Choleského rozkladu

Nechť T je matice uvedená v předchozí větě. Prvky této matice jsou určeny vztahy:

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= \sqrt{a_{11}} && \\
t_{1j} &= \frac{a_{1j}}{t_{11}}, && j = 2, \dots, n \\
t_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, && i = 2, \dots, n \\
t_{ij} &= \frac{1}{t_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li} t_{lj} \right) && \text{pro } j > i \\
t_{ij} &= 0 && \text{pro } i > j.
\end{aligned}
$$

Croutova metoda

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1}, & i &= 2,3,\dots,n \\ a_{ii} &= l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, & i &= 2,3,\dots,n \\ a_{i,i+1} &= l_{ii}u_{i,i+1}, & i &= 1,2,\dots,n-1. \end{aligned}$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$
\left.\begin{array}{ll}
a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2,3,\dots,n-1, \\
|a_{11}| > |a_{12}|, & \\
|a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2,\dots,n-1, \\
|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. &
\end{array}\right\} \text{ A řádkově diag dominantní}
$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1,\dots,n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ |a_{11}| > |a_{12}|, & \\ |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2, \dots, n-1, \\ |a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. & \end{array}\right\} \begin{array}{l} A \text{ řádkově diag} \\ \text{dominantní} \end{array}$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1, \dots, n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.