ITERAČNÍ METODY PRO SYSTÉMY NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Řešíme systém m nelineárních rovnic o m neznámých:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

vektorový zápis soustavy: $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^m$, řešení: $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)' \in \mathbb{R}^m$.

Metoda prosté iterace
Namísto původní úlohy $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ řešíme ekvivalentní úlohu $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, tj. hledáme pevné body zobrazení G.
Iterační vztah:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k) \\ &\vdots \\ x_m^{k+1} &= g_m(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k). \end{aligned}$$

Konvergence: $\max\limits_{1 \le i \le m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \right| \le q < 1$ pro každé $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{\xi})$, $i, j = 1, \ldots, m$.

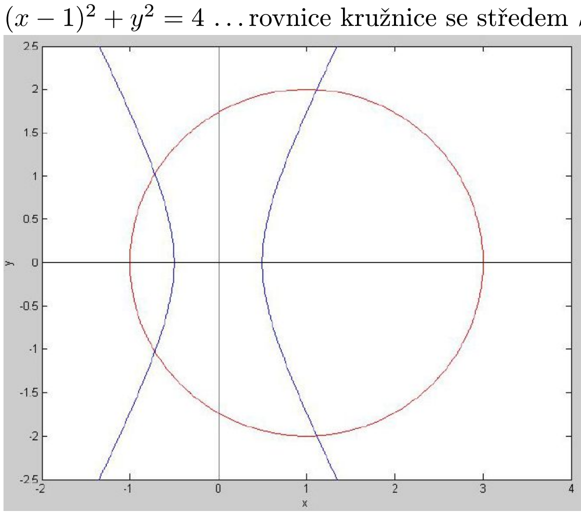
Příklad. Pro zadaný systém nalezněte metodou prosté iterace kořen z I. kvadrantu.

$$\begin{aligned} x &= \frac{8x - 4x^2 + y^2 + 1}{8}, \\ y &= \frac{2x - x^2 + 4y - y^2 + 3}{4}. \end{aligned}$$

Řešení.

1. počáteční aproximace – úprava rovnic pro nalezení průsečíku
   1. rovnice:
   $8x = 8x - 4x^2 + y^2 + 1$
   $4x^2 - y^2 = 1$ ... rovnice hyperboly, hledáme průsečíky s osami:
   průsečík s osou x: $y = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$
   průsečík s osou y: $x = 0 \longrightarrow y^2 + 1 = 0$ ... nemá reálný průsečík

   2. rovnice:
   $4y = 2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
   $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
   $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ... rovnice kružnice se středem $S = (1, 0)'$ a poloměrem $r = 2$

   $\Rightarrow$ počáteční aproximace: $\boldsymbol{x}^0 = (1, 2)'$

2. konvergence:

$$\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} = 1-x, \quad \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{4}y, \quad \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} = 1-\frac{1}{2}y,$$

$$\left|\frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} + \left|\frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} = \frac{1}{2} < 1$$
$$\left|\frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} + \left|\frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} = 0 < 1$$

3. výpočet
$\boldsymbol{x}^0 = (1,2)'$

$$x^1 = \frac{8x^0 - 4(x^0)^2 + (y^0)^2 + 1}{8} = \frac{9}{8}$$
$$y^1 = \frac{2x^0 - (x^0)^2 + 4y^0 - (y^0)^2 + 3}{4} = 2$$

$\boldsymbol{x}^1 = (\frac{9}{8}, 2)'$
$\boldsymbol{x}^2 \approx (1.1172, 1.9961)'$
$\boldsymbol{x}^3 \approx (1.1162, 1.9966)'$ STOP: $\frac{||\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k||}{||\boldsymbol{x}^k||} < \varepsilon = 10^{-3}$

Seidelova metoda
Iterační vztah:

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)\\
x_2^{k+1} &= g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \ldots, x_m^k)\\
&\vdots\\
x_m^{k+1} &= g_m(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{m-1}^{k+1}, x_m^k).
\end{aligned}$$

Příklad. Předchozí příklad pomocí Seidelovy metody.
Řešení.
počáteční aproximace: $\boldsymbol{x}^0 = (1,2)'$
1. iterace:

$$x^1 = \frac{9}{8}$$
$$y^1 = \frac{2x^1 - (x^1)^2 + 4y^0 - (y^0)^2 + 3}{4} \approx 1.9961$$

$\boldsymbol{x}^1 = (\frac{9}{8}, 1.9961)'$
$\boldsymbol{x}^2 \approx (1.1152, 1.9967)'$
$\boldsymbol{x}^3 \approx (1.1167, 1.9966)'$ STOP: $\frac{||\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k||}{||\boldsymbol{x}^k||} < \varepsilon = 10^{-3}$

Newtonova metoda

Zabýváme se řešením úlohy $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, uvažujeme ekvivalentní úlohu ve tvaru $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$ s iterační maticí

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}),$$

kde $J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ se nazývá Jacobiova matice funkce F.

Newtonova iterační metoda pro systém $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ za předpokladu, že $J_F(\boldsymbol{x})$ je regulární, se spojitými prvky v okolí bodu $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - J_F^{-1}(\boldsymbol{x}^k)F(\boldsymbol{x}^k),\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Postup pro výpočet:

1. označme $\boldsymbol{\Delta}^k = \boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k$
2. $J_F(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{\Delta}^k = -F(\boldsymbol{x}^k) \longrightarrow$ výpočet $\boldsymbol{\Delta}^k$
3. dosazení do iteračního vztahu: $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\Delta}^k$

Příklad. Vypočítejte první dva kroky Newtonovy metody pro za daný systém rovnic

$$\begin{aligned} f_1: &\quad x^2 - x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ f_2: &\quad x^2 - 5xy - y = 0 \end{aligned}$$

a počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešení. Výpočet parciálních derivací a sestavení Jacobiho matice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} &= 2x - 1, & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} &= 2x - 5y, & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} &= -5x - 1, \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Jacobiho matice: $J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x-5y & -5x-1 \end{pmatrix}$.

Označme $\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ a počítejme soustavu $J_F(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\Delta}^0 = -F(\boldsymbol{x}^0)$, kde

$$J_F(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x^0 - 1 & 1 \\ 2x^0 - 5y^0 & -5x^0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ a } -F(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

kterou vyřešíme (Gaussova eliminační metoda):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \boldsymbol{\Delta}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

1. krok:

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\Delta}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Výpočet $\boldsymbol{\Delta}^1$: řešíme soustavu $J_F(\boldsymbol{x}^1)\boldsymbol{\Delta}^1 = -F(\boldsymbol{x}^1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{29}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix},$$

2. krok:

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\Delta}^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.2332 \\ 0.2126 \end{pmatrix}.$$