Globální vlastnosti rovinných křivek: rotační index

Definice. Množina $C \subseteq E_2$ se nazývá *vložená křivka třídy* C^r, $r \geq 1$, jestliže existuje regulární pohyb $f : I \to E_2$ třídy C^r takový, že $C = f(I)$ pro nějaký otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Vložená křivka $C \subseteq E_2$ se nazývá *uzavřená vložená křivka třídy* C^r, jestliže existuje parametrizace $f : [a, b] \to E_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $f([a, b]) = C$, $f(a) = f(b)$ a dále $f|_{(a,b)} \to E_2$ je regulární pohyb třídy C^r a platí $f_+^{(i)}(a) = f_-^{(i)}(b)$, $i \leq r$.

Jestliže jsou navíc zobrazbení $f|_{[a,b)}$ a $f|_{(a,b]}$ injektivní, C se nazývá *jednoduchá uzavřená vložená křivka*.

Pro jednoduchost budeme v této mluvit jen o *uzavřených* a *jednoduchých uzavřených* křivkách (které budeme implicitně uvažovat jako vložené). V tomto kontextu budeme používat novou definici křivosti, pro kterou budeme uvažovat E_2 jako **orientovaný** Euklidovský prostor:

Definice. V každém bodě křivky $f(t)$ definujeme *orientovaný Frenetův repér* $(f(t); e_1(t), \bar{e}_2(t))$ tak, že $e_1(t) = \frac{f'(t)}{||f'(t)||}$ a $(e_1(t), \bar{e}_2(t))$ je kladná ortonormální báze. Je-li $f(s)$ parametrizace obloukem, číslo $\bar{\kappa}(s) \in \mathbb{R}$ splňující $e_1'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{e}_2(s)$ budeme nazývat *orientovaná křivost* v bodě $f(s)$.

Frenetovy vzorce jsou podobné jako v neorientované verzi: $e_1'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{e}_2(s)$ a $e_2'(s) = -\bar{\kappa}(s)\bar{e}_1(s)$. Uvědomte si ale, že křivost může být i záporná. Rozmyslete si konkrétní příklady!

Tvrzení. Nechť $f : [a, b] \to E_2$ je uzavřená křivka C třídy C^r. Pak existuje funkce $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ třídy C^r taková, že $e_1(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$, a platí $\theta'(t) = \bar{\kappa}(t)||f'(t)||$. Navíc rozdíl $\theta(b) - \theta(a)$ nezávisí na volbě funkce θ.

Důkaz. Existence funkce θ je evidentní: zvolíme $\theta(a)$ tak, že $e_1(a) = \big(\cos\theta(a), \sin\theta(a)\big)$ a pak rozšíříme θ spojitě na interval $[a, b]$. Při parametrizaci obloukem dostaneme $\cos\theta(s) = (e_1(s), \varepsilon_1)$ a $\sin\theta(s) = -(e_2(s), \varepsilon_1)$, kde ε_1 je první bázový vektor standardní báze. Tedy $\theta(s)$ je třídy C^r. (Potřebujeme k tomu oba předchozí vztahy? Rozmyslete si detaily!) Derivací pak dostaneme, že $\theta'(s) = \bar{\kappa}(s)$. Reparametrizací $s = s(t)$, $\frac{ds}{dt} > 0$ pak odvodíme $\theta'(t) = \bar{\kappa}(t)||f'(t)||$.

Abychom ukázali nezávislost rozdílu $\theta(b) - \theta(a)$ na volbě funkce θ, předpokládjme, že $\varphi(t)$ je jiná funkce splňující Tvrzení. Pak $\theta(t) - \varphi(t) = 2k(t)\pi$ pro nějakou spojitou funkci $k(t) \in \mathbb{Z}$. Ze spojitosti plyne, že $k(t)$ je konstanta. □

Tedy rozdíl $\theta(b) - \theta(a)$ je určen volbou parametrizace vložené $f : [a, b] \to E_2$ uzavřené křivky (ale pak už nezávisí na reparametrizaci). Rozmyslete si různé parametrizace kružnice $(\cos t, \sin t)$, kde buď $t \in [0, 2\pi]$ nebo $t \in [0, 4\pi]$.

Definice. Číslo $n_C := \frac{1}{2\pi}\big[\theta(b) - \theta(a)\big]$ se nazývá *rotační index* uzavřené křivky C z předchozího Tvrzení.

Příklad. Křivka $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ pro $t \in [0, m]$, $m \in \mathbb{N}$ má rotační index m. Jedná se samozřejmě o kružnici. Rozmyslete si příklady uzavřených křivek, jejichž rotační index je ≤ 0!

Věta. *Platí* $n_C = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \bar{\kappa}(t)||f'(t)||dt$.

Navíc n_C *nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci. Reparametrizace měnící orientaci převrací znaménko* n_C.

Důkaz. První část plyne ze vztahu $\theta'(t) = \bar{\kappa}(t)||f'(t)||$. Závislost na reparametrizaci $t = t(\tau)$ se plyne z tvaru integrálu na pravé straně po substituci $t = t(\tau)$. $\square$

Připomeňme, že konvexní podmnožina $T \subseteq \mathbb{R}^2$ splňuje, že je-li $x_1, x_2 \in T$ pak také $\overline{x_1x_2} \subseteq T$, kde $\overline{x_1x_2}$ označuje úsečku s krajními body x_1 a x_2.

Lemma. Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je konvexní podmnožina a $e : T \to S^1$ funkce třídy C^r. Pak existuje funkce $\theta : T \to \mathbb{R}$ třídy C^r splňující $e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ pro $x \in T$. Navíc, jsou-li $\theta(x)$ a $\varphi(x)$ dvě takové funkce, pak se liší o $2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Symbolem S^1 označujeme kružnici. Uvědomte si, že toto technické Lemma je dvourozměrná verze předchozího Tvrzení! (Důkaz jsme si neuváděli.)

Následující Věta je hlavním výsledkem této kapitoly:

Věta (Hopf's Umlaufsatz)**.** *Je-li* $f : [a, b] \to E_2$ *jednoduchá křivka* C*, pak* $n_C = \pm 1$.

Opačná implikace neplatí. Rozmyslete si příklady!

Důkaz. Můžeme předpokládat $a = 0$ a že f je parametrizována obloukem. Položme $\Delta = \{(s,t) \mid 0 \le s \le b\} \subseteq \mathbb{R}^2$ a definujeme funkci $h : \Delta \to S^1$ předpisem

$$h(s,t) = \begin{cases} e_1(s) & s = t \\ -e_1(0) & (s,t) = (0,b) \\ \frac{f(t)-f(s)}{||f(t)-f(s)||} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Množina Δ je konvezní a funkce $h(s,t)$ je spojitá. Dále můžeme předpokládat, že $f(0) = (0,0)$ a že toto je “nejnižší” bod na křivce, tj. že tento bod má nejmenší y-novou souřadnici. Pak $e_1(0)$ je až na znamńko první bázový vektor standardní báze, tj. $e_1(0) = \pm\varepsilon_1$ a dále budeme předpokládat $e_1(0) = \varepsilon_1$ (tím se může změnit orientace!).

Podle Lemmatu platí $h(s,t) = \big(\cos\tilde{\theta}(s,t), \sin\tilde{\theta}(s,t)\big)$ pro spojitou funkci $\tilde{\theta} : \Delta \to \mathbb{R}$. Je-li $\theta(s)$ funkce z Tvrzení, pak podle předchoí Věty platí

$$\begin{aligned} n_C = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \bar{\kappa}(s)ds &= \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(0)\big) = \frac{1}{2\pi}\big(\tilde{\theta}(b,b) - \tilde{\theta}(0,0)\big) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\big(\tilde{\theta}(0,b) - \tilde{\theta}(0,0)\big) + \big(\tilde{\theta}(b,b) - \tilde{\theta}(0,b)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Zde $N_1 := \tilde{\theta}(0,b) - \tilde{\theta}(0,0)$ je úhel, o který se mění vektor průvodiče. Tedy $N_1 = \pi$, neboť křivka je v horní polorovině. Podobně $N_2 = \tilde{\theta}(b,b) - \tilde{\theta}(0,b)$ je úhel, o který se mění vektor opačný k průvodiči, tj $N_2 = \pi$. Tedy $n_C = 1$. $\square$