FA, 4. 4. 2013

1. V prostoru $\mathbb{E}^2$ je na podprostoru

$$L = \{x = [x_1, x_2] \in \mathbb{E}^2 : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$$

zadán lineární funkcionál f předpisem $f(x) = x_1$. Sestrojte rozšíření $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ s vlastností $||f||_L = ||F||_{\mathbb{E}^2}$. Jak se změní situace, uvažujeme-li místo $\mathbb{E}^2$ nekonečně dimenzionální prostor l^2?

2. Uvažujme předchozí příklad, pouze místo $\mathbb{E}^2$ a l^2 vezměme $\mathbb{R}^2$ s normou

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

a prostor l^1.

3. Nechť L je uzavřený podprostor v normovaném lineárním prostoru X s vlastností $L \neq X$ a L není obsažen v žádném vlastním uzavřeném podprostoru prostoru X. Dokažte, ze existuje $f \in X'$ takový, že $\operatorname{Ker} f = L$.

4. Nechť $A : C[0,1] \to C[0,1]$ s definičním oborem

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in C^2[0,1], \ x(0) = x'(0) = 0\}$$

je dán předpisem $Ax(t) = x''(t) + x(t)$. Dokažte, že A je neohraničný uzavřeně operátor. Určete explicitně A^{-1} a rozhodněte, zda je spojitý.