

FA, 11. 4. 2013

1. Nechť L je uzavřený podprostor v normovaném lineárním prostoru X s vlastností $L \neq X$ a L není obsažen v žádném vlastním uzavřeném podprostoru prostoru X . Dokažte, že existuje $f \in X'$ takový, že $\text{Ker } f = L$.
2. Doplněk k předchozímu příkladu. Nechť $f \in X'$ a $L = \text{Ker } f$. Dokažte, že $\text{codim } L = 1$.
3. V prostoru $H^1(-1, 1)$ je definován funkcionál předpisem

$$f(x) = \int_{-1}^1 [x(t) \sin t + x'(t) \cos t] dt.$$

Určete normu tohoto operátoru.

4. Pro funkci $x \in C[-1, 1]$ definujme funkcionál

$$f(x) = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^1 tx(t) dt.$$

Najděte funkci $g \in BV[-1, 1]$, pro níž $f(x) = \int_{-1}^1 x(t) dg(t)$.

5. Nechť H je Hilbertův prostor. Rozhodněte, zda platí implikace: $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\| \rightarrow \|x\| \implies x_n \rightarrow x$.
6. Nechť $x \in L^2(-\pi, \pi)$ je libovolná (pevně zvolená) funkce,

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt.$$

- a) Určete $\|f_n\|$, b) Rozhodněte, zda $f_n \rightarrow 0$.