

FA, 14. 3. 2013

1. Pomocí Fourierova rozvoje  $2\pi$  periodického pokračování funkce  $f(x) = x^2$   $x \in (-\pi, \pi]$  a Parsevalovy rovnosti určete součet číselých řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. Nechť  $X \subset Y$ , kde  $Y$  je NLP. Na  $X$  je definována norma  $\|\cdot\|_X$ , na  $Y$  je norma  $\|\cdot\|_Y$ . Řekneme, že podprostor  $X$  je *spojitě vnořen* do prostoru  $Y$ , píšeme  $X \hookrightarrow Y$ , jestliže identické zobrazení  $I : X \rightarrow Y$  je spojité, tj. existuje konstanta  $c > 0$  taková, že

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Rozhodněte, zda

- a)  $l^1 \hookrightarrow l^\infty$ , b)  $L^2(0, 1) \hookrightarrow L^1(0, 1)$  c)  $H^1(0, 1) \hookrightarrow C[0, 1]$ .

3. Určete normy následujících operátorů:

- a)  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = t(t-1)x(\frac{1}{2})$ .  
b)  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = \int_0^t x(s) ds$ .