FA 21. 3. 2013

1. Uvažujme následující posloupnosti operátorů v $\mathcal{L}(l^2)$ (prostor spojitých lineárních operátorů z $l^2 \to l^2$)definované pro $x = \{x_k\}$ předpisem
$$A_n x = \left\{ \frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots, \frac{x_k}{n}, \dots \right\},$$
$$B_n x = \{0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$
(v případě operátorů B_n je 0 na n-místech). Určete limitu a typ konvergence těchto posloupností operátorů.

2. Určete normy následujících operátorů:
   a) $A : \mathcal{L}^2(0,1) \to \mathcal{L}^2(0,1), \quad Ax(t) = t \int_0^1 x(t)\,dt,$
   b) $A : C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2),$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}[X, Y]$. Dokažte, že množina (tzv. *jádro* operátoru A)
$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X : \, Ax = 0\}$$
je uzavřená v X. Ukažte na příkladě, že podmínku spojitosti A nelze vypustit.