MASARYKOVA UNIVERZITA v BRNĚ • FAKULTA PŘÍRODOVĚDECKÁ

Ondřej Došlý

Lineární funkcionální analýza.

Brno 2012

Došlý Ondřej
Lineární funkcionální analýza

Obsah

Úvod

Tento výukový text vznikl po obsahové stránce na základě autorových přednášek tohoto předmětu ve druhé polovině devadesátých let. Do finálního stavu (nebo stavu blízkému k finálnímu) by se měl dostat v průběhu jarního semestru 2012. Jakékoliv náměty na vylepšení textu jsou vítány.

Ke studiu Lineární funkcionální analýzy (dále LFA) je zapotřebí znalost základů lineární algebry a geometrie a základní znalosti z matematické analýzy, zejména z teorie metrických prostorů. Dále je užitečné mít alespoň základní znalosti z teorie funkcí komlexní proměnné, teorie Lebesgueova integrálu a lineárních diferenciálních rovnic, ale neni to nevyhnutelné. Tyto znalosti pomáhají snažšímu pochopení některých konkrétních příkladů.

Začneme motivačními příklady souvisejicími s teorií diferenciálních a diferenčních rovnic. Motivační příklad z teorie parciálních diferenciálních rovnic lze nalézt v [14].

Nechť $X,\ Y$ jsou (nekonečnědimenzionální) lineární prostory nad nějakým tělesem skalárů $\mathbb{K}$ (v našem případě se bude výhradně jednat buď o reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní čísla $\mathbb{C}$) s nějakou topologickou strukturou (například $X,\ Y$ jsou metrické prostory) a nechť $T : X \to Y$ je lineární zobrazení (v LFA se používá termín *lineární operátor*), to jest, T splňuje podmínku

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ a $x, y \in X$.

Objektem studia LFA jsou vlastnosti prostorů $X,\ Y$ a operátorů T, například, zda T je spojitý (to jest, jsou-li x, y „blízké“ v X, pak jsou i „blízké“ v Y obrazy $T(x)$ a $T(y)$), zda k T existuje i inverzní operátor T^{-1} a jaké má vlastnosti, například, zda je spojitý, atd.

Jako konkrétní příklady uveďme:

1. Nechť $X = C^2[0,1],\ Y = C[0,1]$ (prostor funkci se spojitou druhou derivací resp. prostor spojitých funkcí) s metrikou

$$\varrho_X(f,g) = \sum_{i=0}^{2} \max_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|$$
$$\varrho_Y(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

a nechť $p \in Y$. Definujme $T : X_1 \to Y$ předpisem

$$x(t) \xmapsto{T} x''(t) + p(t)x(t),$$

kde $X_1 = \{x \in X : x(0) = x(1) = 0\}$. Pak k T existuje inverzní operátor, je-li T prosté, tj., rovnice $x''(t) + p(t)x(t) = 0$ má pouze triviální řešení $x \equiv 0$ v X_1. Dále, rovnice

$$x''(t) + p(t)x(t) = f(t), \quad f \in C[0,1]$$

s okrajovou podmínkou $x(0) = 0 = x(1)$ je řešitelná právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}(T)$ (používáme označení $\mathcal{D}(T)$ pro definiční obor a $\mathcal{R}(T)$ pro obor hodnot), tj. důležité je umět charakterizovat obor hodnot operátoru T. Jedním z cílů LFA je vybudovat obecnou teorii, v jejímž rámci by bylo možné studovat předchozí speciální případ.

2. Nechť

$$X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \to 0\}, \quad Y = \left\{\{y_n\}_{n=1}^{\infty} : \sup_n |y_n| < \infty\right\},$$

a na X a Y definujeme metriku

$$\varrho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n|.$$

Dále nechť $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ a $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$ je obvyklý operátor druhé diference a uvažujme operátor

$$T : X \to Y, \quad x_n \stackrel{T}{\longmapsto} \Delta^2 x_n + p_n x_{n+1}.$$

Zde můžeme vyslovit podobné otázky jako v „diferenciálním“ případě 1.

Předchozí dva příklady ukazují, že typickými prostory, se kterými budeme pracovat, jsou prostory funkcí a posloupností a typickými lineárními operátory jsou zobrazení spojená nějakým způsobem s derivováním a integrováním (respektive jejich diskrétními analogiemi).

Termín „funkcionální“ analýza je historicky spojen s pojmem „funkcionál“, což je v našem pojetí zobrazení z normovaného (resp. topologického) lineárního prosotru X do prostoru skalárů $\mathbb{K}$. Typickým příkladem jsou funkcionály ve variačním počtu

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt,$$

kde f je (dostatečně hladká) funkce z $[a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Toto zobrazení chápeme jako zobrazení prostoru diferencovatelných funkcí $C^1[a, b]$ do reálných čísel. Právě studium těchto funkcionálů, zejména jejich extrémů, stálo historicky u zrodu funkcionální analýzy. Pěkný úvodní text v tomto smyslu lze nalézt v knize [**?**].

Kapitola 1

Prostory funkcí a posloupností

V této kapitole si řekneme něco o prostorech, ve kterých fungují studované lineární operátory. Obecně platí i inkluze:
Topologické lineární prostory $\supset$ Metrické lineární prostory $\supset$ Normované lineární prostory $\supset$ Unitární lineární prostory. Z matematického hlediska by bylo správné začít výklad nejobecnější strukturou, tj. topologickými lineárními prostory. Z důvodu srozumitelnosti výkladu je však výhodnější začít normovanými lineárními prosotry.

1.1 Normovaný lineární prostor

Nechť X je lineární (tj. vektorový) prostor nad tělesem skalárů $\mathbb{K}$.

Definice 1.1. Nechť $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ je funkce na X s těmito vlastnostni:

(i) $\|x\| \geq 0$ pro $\forall x \in X$, přičemž $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ pro $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro $\forall x, y \in X$.

Pak $\|\cdot\|$ se nazývá *norma* na X a $(X, \|\cdot\|)$ *normovaný lineární prostor.*

Snadno lze ověřit, $\varrho(x,y) = \|x - y\|$ má všechny vlastnosti metriky, lze tedy do X přenést veškerou terminologii z teorie metrických prostorů – konvergence, otevřenost/uzavřenost množiny, úplnost, kompaktnost, zúplnění metrických prostorů atd.

Definice 1.2. Normovaný lineární prostor, který je *úplný* se nazývá *Banachův prostor* (tj. Banachův prostor = úplný normovaný lineární prostor). Připomeňme, že prostor je úplný, pokud v něm má každá cauchyovská posloupnost svoji limitu.

Příklady NLP:

1. $C([a,b],\mathbb{K})$ – spojité funkce z $[a,b] \to \mathbb{K}$ (uvažujme případ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), s normou

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Prostor $C([a,b],\mathbb{K})$ je úplný a $x_n \to x$ v $C([a,b],\mathbb{K}) \Leftrightarrow x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ ve smyslu stejnoměrné konvergence. Úplnost si ukážeme v některém z pozdějších příkladů.

2. Prostor
$$l^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Pak $\|\cdot\|_p$ je norma na l^p. Platnost (i) a (ii) je triviální, platnost (iii) plyne z tzv. *Minkowského nerovnosti*
$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
aplikované na částečné součty řad ve vztahu $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$. Úplnost tohoto prostoru si rovněž ukážeme později.

3. Prostor $\mathcal{L}^p(a,b)$ – funkce integrovatelné (v Lebesguově smyslu) v p-té mocnině na (a,b), přesněji – třídy ekvivalentních funkcí ($f \equiv g \Leftrightarrow f(t) = g(t)$ skoro všude (zkráceněn s. v.) na (a,b) ve smyslu Lebesqueovy míry) s normou
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$
která je opravdu normou na $\mathcal{L}^p(a,b)$. Platnost (i) a (ii) plyne z vlastností Lebesgueových integrálů a (iii) z Minkowského nerovnosti v integrálu tvaru
$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$
kterou dostaneme aplikací klasické Minkowského nerovnosti na integrální součty.

4. Označme
$$\begin{aligned} l^{\infty} &= \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{K} : \sup_n |x_n| < \infty \right\}, \\ c &= \left\{ \{x_n\} \in l^{\infty},\ x_n \text{ je konvergentní} \right\}, \\ c_0 &= \left\{ \{x_n\} \in l^{\infty},\ x_n \to 0 \right\}. \end{aligned}$$
Tyto prostory s normou $\|x\| = \sup_n |x_n|$ jsou normované lineární prostory, a lze ukázat, že jsou úplné, tj. tvoří Banachovy prostory.

5. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ (opět $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) a nechť pro dělení $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$ intevalu $[a,b]$
$$\bigvee_a^b (f) := \sup_{D \in \mathcal{D}([a,b])} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$
kde $\mathcal{D}([a,b])$ množina všech dělení intervalu $[a,b]$, je tzv. (totální) *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Označme
$$BV[a,b] = \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{K} : \bigvee_a^b (x) < \infty \right\}$$

a definujme

$$\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b (x).$$

Pak $BV[a,b]$ (přesněji, prostor, jehož prvky sjou jisté třídy ekvivalentních funkcí, viz později) je normovaný (dokonce Banachův) lineární prostor. Úplnost tohoto prostoru dostaneme později jako důsledek obecného tvrzení o tzv. *duálních prostorech*.

Věta 1.3. *Norma prvku je spojité zobrazení z NLP X do $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Stačí ukázat implikaci $x_n \to x_0$ (tj. $\|x_n - x_0\| \to 0$) $\Rightarrow \|x_n\| \to \|x_0\|$. Platí

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

a stejným obratem $\|y\| \leq \|x-y\|+\|x\| \Rightarrow \|y\|-\|x\| \leq \|x-y\|$. Spojením nerovností dostáváme

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|,$$

což dokazuje požadovanou implikaci. ■

Definice 1.4. Nechť $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2$ jsou normy v NLP X. Řekneme, že tyto normy jsou *ekvivalentní*, jestliže existují $m, M > 0$ taková, že

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \text{ pro } \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Poznámka 1.5. Všimeme si, že vztah (1.1) je opravdu ekvivalence, neboť z první nerovnosti $\|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2$ a z druhé $\|x\|_1 \geq \frac{1}{M}\|x\|_2$, tj. celkem

$$\frac{1}{M}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2. \tag{1.2}$$

Věta 1.6. *Je-li X konečně dimenzionální lineární prostor, pak jsou všechny normy na tomto prostoru ekvivalentní.*

Důkaz. Z lineární algebry je známo, že každý n-rozměrný lineární prostor je izomorfní s $\mathbb{R}^n$, tj. stačí ukázat, že normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalnetní. Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ označme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ a nechť $\|\ \cdot \|$ je libovolná norma na $\mathbb{R}^n$. Označme $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i-tém místě, $i = 1, \dots, n$. Pak

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^n |x_i| = M\|x\|_1,$$

kde $M = \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|$. K důkazu druhé nerovnosti v (1.1) (v níž $\|\ \|_2 = \|\ \|$) označme

$$S(0;1) = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|_1 = 1\}$$

jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^n$ v metrice $\|\ \|_1$. Je to ohraničená a uzavřená množina, tedy je kompaktní a uvažujme funkci

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad f(\xi) = \|\xi\| = \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right\|,$$

která je evidentně spojitá (neboť norma je spojité zobrazení podle předchozí věty) a nechť $m = \min_{\xi \in S(0;1)} f(\xi)$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\frac{x}{\|x\|_1} = \left(\frac{x_1}{\|x\|_1}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|_1} \right) \in S(0;1)$$

a tedy

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = f\left(\frac{x}{\|x\|_1} \right) = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq m \Rightarrow m\|x\|_1 \leq \|x\|.$$

Všimněme si, že $m > 0$, kdyby $m = 0$, pak podle Weierstrassovy věty (spojitá funkce nabývá na kompaktní množině nejmenší a největší hodnoty) existuje $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_n) \in S(0;1)$ takové, že

$$0 = f(\overline{\xi}) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i e_i \right\|.$$

Tedy podle první podmínky z definice normy $\sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i e_i = 0$ a tedy $\overline{\xi} = 0$ protože vektory e_i jsou lineárně nezávislé. Pak ale $\overline{\xi} \notin S(0;1)$. ■

Věta 1.7. *Normy* $\| \ \|_1, \ \| \ \|_2$ *v NLP* X *jsou ekvivalentní právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost* $x_n \in X$ *platí*

$$x_n \overset{\| \ \|_1}{\to} x \iff x_n \overset{\| \ \|_2}{\to} x. \tag{1.3}$$

Důkaz. „$\Rightarrow$:“ Tato implikace plyne z nerovností $m\|x_n - x\|_1 \leq \|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1$ jím ekvivalentním nerovnostem (1.2).
„$\Leftarrow$:“ Nechť platí (1.3). Potřebujeme najít konstanty m, M z (1.1). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že v (1.3) $x = 0$ (jinak označíme $y_n = x_n - x$). Nechť tedy x_n je libovolná posloupnost, pro níž $\|x_n\|_1 \to 0$. Pak i $\|x_n\|_2 \to 0$. Tedy identické zobrazení $I : (X, \| \ \|_1) \to (X, \| \ \|_2)$ je spojité v $x = 0$. To znamená, že k $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\|x\|_1 \leq \delta$ platí $\|I(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq 1$. Nechť $0 \neq x \in X$ je libovolné, pak $\overline{x} = \frac{\delta}{\|x\|_1} x$ splňuje $\|\overline{x}\|_1 \leq \delta$, tedy

$$\|I(\overline{x})\|_2 = \left\| \frac{\delta}{\|x\|} x \right\|_2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|x\|_1.$$

Tím jsme nalezli konstantu M z definice ekvivalence norem. Číslo m se najde podobně ze skutečnosti, že konvergence v normě $\| \ \|_2$ implikuje konvergenci v normě $\| \ \|_1$. ■

Příklad 1.8. (i) Nechť $X = C^1[0, \pi]$ s normami

$$\|x\|_1 = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|, \quad \|x\|_2 = \max_t |x(t)|.$$

Pak $\| \ \|_1, \ \| \ \|_2$ *nejsou ekvivalentní*, neboť pro posloupnost $x_n(t) = \frac{\sin n^2 t}{n}$ platí $\|x_n\|_2 \to 0$ a (pro n dostatečně velká)$\|x_n\|_1 = \frac{1}{n} + n \to \infty$.
(ii) Nechť

$$X = \{x \in C^1[0, \pi], \ x(0) = x(\pi) = 0\}$$

s normami

$$\|x\|_1 = \left(\int_0^1 x'^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 x^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 x'^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pak obě normy *jsou ekvivalentní*. Vskutku, triviálně $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ pro $\forall x \in X$. Z druhé strany, pro libovolné $x \in X$ platí nerovnost

$$\int_0^\pi [x'^2(t) - x^2(t)]\, dt \geq 0,$$

neboť rovnice $y'' + y = 0$ je diskonjugovaná na intervalu $(0, \pi)$, viz [11, kap. VIII]. To znamená, že

$$\int_0^\pi x'^2(t)dt \geq \int_0^\pi x^2(t)dt,$$

a tedy

$$\|x\|_1 = \left(\int_0^\pi x^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 x'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\int_0^\pi x'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 2\|x\|_2.$$

Definice 1.9. Nechť $X_1,\ X_2$ s normami $\|\ \|_1,\ \|\ \|_2$ jsou NLP. Řekneme, že $(X_1, \|\ \|_1)$, $(X_2, \|\ \|_2)$ jsou:
a) *lineárně izometrické*, jestliže existuje lineární bijektivní zobrazení $T : X_1 \to X_2$ takové, že $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ pro $\forall x \in X_1$,
b) *lineárně homeomorfní*, jestliže existuje lineární bijekce $T : X_1 \to X_2$ a konstanty $m,\ M > 0$ tak, že $m\|x\|_1 \leq \|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1$ pro $\forall x \in X_1$.

Poznámka 1.10. Vztah z definice lineárního homeomorfismu je opravdu ekvivalencí, zejména je symetrický. Vskutku, oprátor inverzní k T (existuje, neboť T je bijekce) je lineární (neboť

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = T^{-1}(Tx_1 + Tx_2) = TT^{-1}(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2,$$

– podobně $T^{-1}(\alpha y) = \alpha T^{-1}(y)$) a pro libovolné $y \in X_2$ existuje $x \in X_1$ takové, že $T(x) = y,\ T^{-1}(y) = x$, a tedy

$$m\|x\|_1 \leq \|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1 \Leftrightarrow \|T^{-1}(y)\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y\|_2,\ \|y\|_2 \leq M\|T^{-1}(y)\|_1$$

odtud

$$\frac{1}{M}\|y\|_2 \leq \|T^{-1}(y)\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y\|.$$

Příklad 1.11. (i) Prostory $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ a l^2 jsou lineárně izometrické. Nechť $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ a $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou její Fourierovy koeficienty vzhledem k funkcím

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,$$

tj. a_n, b_n jsou „standardní“ Fourierovy koeficienty, viz [3, str. 96],

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt.$$

Platí

$$f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \iff |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$$

a Parsevalova rovnost (viz [3, str. 94] dává

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

a lineární izometrie je $f \stackrel{T}{\mapsto} (a_0/2, a_1, b_1, \ldots) \in l^2$, která funkci přiřadí posloupnost jejich Fourierových koeficientů.
(ii) Prostory $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ s libovolnou dvojicí norem jsou vzájemně lineárně homeomorfní podle Věty 1.6.

Věta 1.12. *Nechť X, Y jsou lineárně homeomorfní NLP. Prostor $(X, \|\ \|_1)$ je Banachův (tj. úplný), právě když $(Y, \|\ \|_2)$ je Banachův.*

Důkaz. Nechť $y_n \in Y$ je cauchyovská posloupnost v Y, tj. platí $\|y_n - y_k\|_2 \to 0$, pro $\min\{n,k\} \to \infty$. Označme $x_n = T^{-1}(y_n)$, kde $T : X \to Y$ je lineární homeomorfismus. Pak $\|x_n - x_k\|_1 = \|T^{-1}(y_n - y_k)\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y_n - y_k\|_2 \to 0$, tedy x_n je cauchyovská posloupnost. Je-li X úplný, pak $x_n \to x_0$ a označme $y_0 = T(x_0)$. Platí $\|y_n - y_0\|_2 = \|T(x_n - x_0)\|_2 \leq M\|x_n - x_0\|_1 \to 0$, tedy $y_n \to y_0$ a Y je proto úplný. Důkaz, že z úplnosti Y plyne úplnost X je analogický. ∎

Při důkazu ekvivalence norem na konečně dimenzionálním prostoru byl důležitý fakt, že v tomto prostoru je množina kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená. Nyní směřujeme k tvrzení, které ukazuje, že toto je charakterizace konečně dimenzionálních normovaných prostorů. Začneme tvrzením, které bývá v literatuře (viz např. [13, str. 101] citováno jako Rieszovo lemma. Nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$, ten pomůže vidět tverzení a důkaz geometricky.

Lemma 1.13. *Nechť X_0 je vlastní uzavřený podprostor NLP X. Pak ke každému $\vartheta \in (0,1)$ existuje $x_\vartheta \in X$, $\|x_\vartheta\| = 1$, takové, že $\varrho(x_\vartheta, X_0) \geq \vartheta$.*

Důkaz. Protože $\overline{X}_0 = X_0 \neq X$, $\exists z \in X$ takové, že $d := \varrho(z, X_0) > 0$. Protože $\frac{d}{\vartheta} > d$, existuje $y \in X_0$ takové, že $\varrho(z, y) < \frac{d}{\vartheta}$. Položme $x_\vartheta = \frac{z-y}{\|z-y\|}$. Pak $\|x_\vartheta\| = 1$ a pro všechna $x \in X_0$ platí:

$$\begin{aligned}
\varrho(x, x_\vartheta) = \|x - x_\vartheta\| &= \left\| x - \frac{z-y}{\|z-y\|} \right\| = \frac{\|x\|z-y\| - z + y\|}{\|z-y\|} \\
&= \frac{\|\overbrace{(y + \|z-y\|x)}^{\in X_0} - z\|}{\|z-y\|} \geq \frac{d}{\frac{d}{\vartheta}} = \vartheta.
\end{aligned}$$

Odtud plyne $\varrho(X, x_\vartheta) \geq \vartheta$. ∎

Poznámka 1.14. (i) Zdůrazněme, že na rozdíl od podprostorů prostorů konečné dimenze, podprostor prostoru nekonečné dimenze *nemusí být uzavřený*. Uvažujme např. prostor l^2 a jeho podprostor

$$M = \{x = \{x_n\} : \text{ pouze konečně mnoho } x_n \neq 0\}.$$

Pak evidentně M je *vlastní* lineární podprostor v l^2, ten ale není uzavřený protože $\overline{M} = l^2$. Vskutku. Nechť $x = \{x_n\} \in l^2$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolná. Z konvergence řady $\sum x_n^2$ plyne, že k $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Definujme posloupnost $y = \{y_n\} \in M$ předpisem

$$y_n = \begin{cases} x_n, & n < n_0, \\ 0 & n \geq n_0. \end{cases}$$

Pak

$$\|x - y\| = \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Tedy množina M je *hustá* v l^2.

(ii) Poněkud komplikovanější neuzavřený lineární podprostor je popsán v následující konstrukci. Nechť $X = l^2$ a

$$M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}.$$

Pak (triviálně) $\genfrac{}{}{0pt}{}{M\subset}{\neq l^2}$ a platí $\overline{M} = l^2$, tedy M je podprostor l^2, který není uzavřený (a je hustý v l^2). Vskutku, Nechť $\varepsilon > 0$ a $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ jsou libovolná. Sestrojíme prvek $x \in M$ takový, že $\|x - y\|_{l^2} < \varepsilon$ následujícím způsobem.

Protože $y \in l^2$ a také $\left\{\frac{1}{k}\right\} \in l^2$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} y_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{a} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Nechť $C := \sum_{k=1}^{N} y_k$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $C > 0$, v případě $C < 0$ postupujeme analogicky, případ $C = 0$ je triviální, jak bude vidět z další konstrukce. Nechť $m \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo s vlastností, že

$$\sum_{k=N+1}^{N+m} \frac{1}{k} := D > C,$$

Definujeme $x = \{x_k\}$ následujícím způsobem.

$$x_k = \begin{cases} y_k, & k = 1, \ldots, N, \\ -\frac{1}{k}, & k = N+1, \ldots, N+m, \\ D - C, & k = N+m+1, \\ 0, & k > N+m+1. \end{cases}$$

Poznamenejme, že číslo m s požadovanou vlastností existuje, neboť $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Pak

$$\|x - y\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

Důležitým důsledkem je následující tvrzení o kompaktních množinách v normovaných lineárních prostorech.

Věta 1.15. *V NLP je každá ohraničená a uzavřená množina kompaktní právě tehdy, když prostor X má konečnou dimenzi.*

Důkaz. „$\Leftarrow$“: Tato implikace platí triviálně z teorie metrických prostorů, viz [1, str. 35] (viz také Bolzano Weierstrassova věta: Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.)
„$\Rightarrow$“: Je-li každá ohraničená a uzavřená množina kompaktní, je zejména kompaktní jednotková sféra $S(0;1) = \{x \in X; \|x\| = 1\}$. Předpokládejme, že X je nekonečně dimenzionální. Zvolme $x_1 \in X$ a nechť

$$X_1 = \operatorname{Lin} x_1 = \{x \in X : \ x = \alpha x_1, \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Podle Riesova lemmatu k $\vartheta = \frac{1}{2}$ existuje $x_2 \in S(0;1)$ takové, že $\varrho(x_2, X_1) \geq \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Nechť $X_2 = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2\}$. Pak existuje $x_3 \in S(0;1)$ takové, že $\varrho(x_3, X_2) \geq \frac{1}{2}$, tj. $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Dále $X_3 = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, x_3\}, \ldots$. Protože X je nekonečně dimenzionální, sestrojíme nekonečnou posloupnost

$$x_n \in S(0;1) : \ \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \text{ pro } n \neq m.$$

Odtud plyne, že x_n neobsahuje konvergentní podposloupnost, tedy $S(0;1)$ není kompaktní, což je ovšem spor. ■

Poznámka 1.16. (i) Vlastně jsme dokázali trochu silnější tvrzení: X je konečně dimenzionální, právě když jednotková sféra $S(0;1)$ je kompaktní.
(ii) V kapitole o lineárních operátorech uvidíme, že tato věta má zásadní vliv na to, že lineární operátory na nekonečně dimenzionálních prostorech se chovají jinak než na konečně dimenzionálních prostorech.

Příklad 1.17. (i) Dokažte, že prostor ohraničených funkcí $B[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ s normou $\|f\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ je úplný.

Řešení. Nechť $f_n \in B[0,1]$ je cauchyovská posloupnost funkcí, pak

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| \to 0, \quad \text{pro } \min\{m,n\} \to \infty.$$

To znamená, že pro všechna $t \in [a,b]$ je číselná posloupnost $f_n(t)$ cauchyovská, označme

$$f(t) := \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

bodovou limitu posloupnosti f_n. Nejprve ukážeme, že $f_n \to f$ v normě $B[a,b]$, tj., $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, pak k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m,n \geq n_0$ platí $\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$, tj. pro $\forall t \in [a,b]$ platí

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ v předchozí nerovnost pro každé $t \in [a,b]$ je

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

a tedy $\|f_n - f\| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Zbývá dokázat, že $f \in B[a,b]$. Protože $\{f_n\}$ je cauchyovská, je ohraničená (viz následující příklad), tj. existuje $M > 0$ takové, že $\|f_n\| \leq M$. Pak

$$\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq M + M = 2M$$

pro n dostatečně velké. To znamená, že $f \in B[a,b]$ a prostor je tedy úplný. ▲

(ii) Dokažte, že $C[a,b]$ je uzavřený v $B[a,b]$.

Řešení. Důkaz je totožný s důkazem tvrzení, že stejnomerná limita spojitých funkcí je spojitá funkce, viz také [3, str. 49]. Nechť $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$, $t_0 \in [a,b]$, $t_k \to t_0$ je libovolná. Pak ovšem

$$\begin{aligned}|x(t_k) - x(t_0) =& |x(t_k) - x_n(t_k) + x_n(t_k) - x_n(t_0) + x_n(t_0) - x(t_0)| \leq \\ &\leq \underbrace{|x_n(t_k) - x(t_k)|}_{x_n \to x} + \underbrace{|x_n(t_k) - x_n(t_0)|}_{\to 0\ (x_n \text{ je spojitá})} + \underbrace{|x_n(t_0) - x(t_0)|}_{x_n \to x} \overset{n,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že každá konvergentní posloupnost prvků z $C[a,b]$ má v $C[a,b]$ i svojí limitu, což znamená uzavřenost $C[a,b]$ v $B[a,b]$, viz [1, str. 20]. ▲

Poznámka 1.18. Jako bezprostřední důsledek předchozích dvou příkladů dostáváme, že $C[a,b]$ je úplný (tedy Banachův) NLP. To plyne z tvrzení, že je-li A uzavřená množina v úplném metrickém prostoru (P,ϱ), pak (A,ϱ) je úplný prostor. Toto je také jedna z obecných metod, jak dokázat úplnost nějakého prostoru. Dokáže se úplnost nějakého jeho nadprostoru a pak se ukáže, že daný prostor je uzavřený v úplném nadprostoru.

Příklad 1.19. (i) Nechť $x_n \in X$ je cauchyovská posloupnost. Dokažte, že x_n je omezená.

Řešení. Důkaz založíme na skutečnosti, že každá konvergentní posloupnost je omezená. Toto tvrzení se dokáže v NLP stejně jako pro posloupnosti reálných čísel. Nechť Y je úplný obal X, tj. $\overline{X} = Y$ a $\|x\|_Y = \|x\|_X$ pro $\forall x \in X$. Posloupnost $x_n \to x \in Y$, tedy x_n je omezená v Y, pak $\|x_n\|_Y = \|x_n\|_X \leq M$ pro nějaké $M \geq 0$.

▲

(ii) Dokažte, že l^p je úplný prostor.

Řešení. Nechť $x^n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots\} \in l^p$ je cauchyovská, tj.

$$\|x^n - x^m\|^p = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \to 0, \quad \min\{m,n\} \to \infty,$$

to zejména znamená, že každý sčítanec $\to 0$ pro $\min\{n,m\} \to \infty$. Pak pro každé pevné $k \in \mathbb{N}$ je číselná posloupnost $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n, \dots\right\}$ cauchyovská, tedy konvergentní, tj. $\lim_{n\to\infty} x_k^n =: x_k$. Uvažujme takto sestrojenou posloupnost $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$. Ukážeme, že $\|x^n - x\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ a že $x \in l^p$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je libovolné. Pak pro dostatečně velká $m,\ n$ platí:

$$\left[\sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i^m|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^n - x^m\| <] \frac{\varepsilon}{2},$$

kde $\varepsilon > 0$ je libovolné. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostáváme

$$\left[\sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem $k \to \infty$ dostáváme $\|x^n - x\| \leq \varepsilon$ pro n dostatečně velká. Zbývá dokázat, že $x \in l^p$. Posloupnost $\{\|x^n\|\}$ je omezená v l^p (neboť je konvergentní), tj. $\|x^n\| \leq M$, tedy pro $\forall k \in \mathbb{N}$ je

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^n\| \leq M.$$

Protože $x_i^n \to x_i$, pro $n \to \infty$, platí

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p \overset{n\to\infty}{\to} \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p,$$

pak tedy

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M \text{ pro } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pak pro $k \to \infty$ je $\|x\| \leq M$, tj., $x \in l^p$. ▲

(iii) Dokažte, že l^∞ je úplný.

Řešení. Nechť $x^n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots\}$ je cauchyovská posloupnost prvků (= posloupností) z l^∞, tj. pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $\{x_k^n\}_{n=1}^\infty = \left\{x_k^1, x_k^2, \ldots\right\}$ cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pak $x_k^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k$. Nechť $\varepsilon > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ je libovolné. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n, m > n_0$ je $|x_k^n - x_k^m| < \varepsilon/2$. Odtud

$$\lim_{m\to\infty} |x_k^n - x_k^m| = |x_k^n - x_k| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Tedy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k| = \|x_k^n - x_k\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Zbývá dokázat, že $x \in l^\infty$. Posloupnost x^n je omezená v l^∞, tedy $\|x^n\| \leq M$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|x_k^n| \leq M$ a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} |x_k^n| = |x_k| \leq M$, tedy celkem dostáváme $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\| \leq M$. ▲

(iv) Rozhodněte, zda prostory c, c_0 jsou uzavřené v l^∞.

Řešení. Nechť $x^n \in c$, $x^n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots\}$, a $x^n \to x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, pak $\|x^n - x\| \to 0$, tj. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n - x_k| \to 0$. Tedy

$$\begin{aligned}|x_k - x_l| &\leq |x_k - x_k^n + x_k^n - x_l^n + x_l^n - x_l| \leq \\ &\leq \underbrace{\overbrace{|x_k^n - x_k|}^{\to 0}}_{x_k^n \overset{n\to\infty}{\to} x_k} + \underbrace{\overbrace{|x_k^n - x_l^n|}^{\to 0,\, k,l\to\infty}}_{x^n\in c,\ \text{pak je cauchyovská}} + \underbrace{\overbrace{|x_l^n - x_l|}^{\to 0}}_{x_l^n \overset{n\to\infty}{\to} x_l} < \varepsilon,\end{aligned}$$

jsou-li k, l, n dostatečně velká, tj. $\{x_1, x_2, \ldots\} = x$ je cauchyovská, tedy i konvergentní a tedy $x \in c$.
Uzavřenost prostoru c_0 se dokáže analogicky. Využije se toho, pro limitní posloupnost $x = \{x_k\}$ platí $|x_k| \leq |x_k^n| + |x - x_k^n|$ a oba sčítanci jsou $< \frac{\varepsilon}{2}$ pro k, n dostatečně velká. ▲

(v) Nechť

$$X = c_0 = \{x = \{x_1, x_2, \ldots\},\ x_n \to 0\}, \quad \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

a

$$X_1 = l^1 = \left\{x = \{x_1, x_2, \ldots\},\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\right\}.$$

Rozhodněte, zda X_1 je uzavřený v X. Pokud ne, určete uzávěr $\overline{X_1}$.

Řešení. Především $X_1 \subseteq X$ vzhledem k nutné podmínce konvergence. Posloupnost

$$x^n = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \dots\} \to x = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \notin X_1,$$

tedy X_1 není uzavřený podprostor. Nechť $y = \{y_n\} \in X = c_0$ je libovolná posloupnost. Pak $y^n = \{y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0, \dots\} \in X_1$ a

$$\|y^n - y\| = \sup_{k>n} |y_k| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy $\overline{X_1} = X$. ▲

Následující věta ukazuje, že v Banachových prostorech platí obdoba tvrzení, že z absolutní konvergence řady reálných čísel plyne její neabsolutní konvergence, viz [3, str. 25]. Důkaz je zcela stejný jako v $\mathbb{R}$ a je založen na Cauchy-Bolzanově kriteriu konvergence (nekonečná řada je konvergentní, právě když je posloupnost jejích částečných součtů cauchyovská).

Věta 1.20. *Nechť X je Banachův prostor a $x_n \in X$ je taková, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, pak nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k$ konverguje v X tj. existuje limita posloupnosti jejích částečných součtů $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, a tato limita definuje jistý prvek $x \in X$. Pak definujeme*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x.$$

Důkaz. Ukážeme, že y_n je cauchyovská: Protože $\sum \|x_n\| < \infty$, podle Cauchy Bolzanova kritéria konvergence ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq n_0$, je $\big|\|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{n+k}\|\big| < \varepsilon$. Tedy

$$\varepsilon > \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+k}\| \geq \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| = \|y_{n+k} - y_n\|.$$

To znamená, že $\{y_n\}$ je cauchyovská, a tedy celkem $y_n \to x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k$. ■

Definice 1.21. Řekneme, že prostor (obecně topologický) je *separabilní*, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $Y \subseteq X$ taková, že $\overline{Y} = X$.

Příklad 1.22. (i) Prostor l^p je separabilní. Dokažte.

Řešení. Vskutku, nechť

$$Y = \{y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p : \text{pouze konečně mnoho } y_n \neq 0$$
$$\text{a pro tato } y_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Pak $\overline{Y} = l^p$. Vskutku, nechť $\varepsilon > 0$ a $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ je libovolné. Protože

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p\right) < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Dále, protože $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, k $\frac{\varepsilon}{2n_0} > 0$ existují $y_1, \ldots, y_{n_0} \in \mathbb{Q}$ tak, že $|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{(2n_0)^{\frac{1}{p}}}$. Pak pro $y = \{y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots\} \in Y$ platí

$$\|x - y\|^p = \sum_{k=1}^{n_0} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n_0} \cdot n_0 + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Tedy odtud plyne $\|x - y\| < \varepsilon$. ▲

(ii) Prostor l^∞ *není* separabilní. Dokažte.

Řešení. Nechť $Y = \left\{x^{[n]} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^\infty,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ je libovolná spočetná množina v l^∞. Pak prvky této množiny můžeme oindexovat přirozenými čísly

$$\begin{aligned}
x^{[1]} &= \left\{x_1^{[1]}, x_2^{[1]}, \ldots, x_k^{[1]}, \ldots\right\} \\
x^{[2]} &= \left\{x_1^{[2]}, x_2^{[2]}, \ldots, x_k^{[2]}, \ldots\right\} \\
&\vdots \\
x^{[n]} &= \left\{x_1^{[n]}, x_2^{[n]}, \ldots, x_k^{[n]}, \ldots\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definujme $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots\}$ takto:

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & \text{je-li } |x_k^{[k]}| > 1, \\ x_k^{[k]} + 1, & \text{je-li } |x_k^{[k]}| \le 1. \end{cases}$$

Pak $\varrho(\xi, Y) \ge 1$, což je spor s hustotou množiny Y. ▲

(iii) Prostor $C[a, b]$ je separabilní.

Řešení. Spojité funkce jsou polynomy s reálnými koeficienty. Vezmeme-li polynomy s racionálními koeficienty, tak to je jistě spočetná hustá podmnožina v množině všech polynomů. Tvrzení pak plyne z věty, že každou spojitou funkci na kompaktním intervalu lze s libovolnou přesností aproximovat (v normě prostoru $C[a, b]$) tzv. Bernsteinovým polynomem. Připomeňme, že *Bersteinovy polynomy* jsou polynomy tvaru

$$B_n(f)(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) b_{\nu,n}(x), \tag{1.4}$$

kde

$$b_{\nu,n}(x) = \binom{n}{\nu} x^\nu (1 - x)^{n-\nu}, \quad \nu = 0, \ldots, n. \tag{1.5}$$

jsou tzv. základní Bernsteinovy polynomy. Hlavní tvrzení říká, že

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = f(x)$$

stejnoměrně na $[a, b]$. ▲

Na závěr tohoto odstavce se budeme věnovat pojmu faktorový prostor, pomocí kterého definujeme tzv. *kodimenzi* lineárního podprostoru v normovaném lineárním prostoru.

Definice 1.23. Nechť X je lineární prostor, $M \subseteq X$ je lineární podprostor a definujeme na X *ekvivalenci* $x_1 \equiv x_2 (\text{mod } M)$ pokud $x_1 - x_2 \in M$. Označme $[x]$ *třídu ekvivalencí určenou prvkem* x. Pak třídy ekvivalencí tvoří opět lineární prostor, značený X/M, který se nazývá *faktorový prostor* prostoru X podle modulu M. Dimenze prostoru X/M se nazývá *kodimenze podprostoru* M.

Poznámka 1.24. (i) Je-li $\dim X = n$, $\dim M = m$, je samozřejmě $\dim X/M = n - m$.
(ii) Prostor $X = \mathcal{L}^p(a,b)$ je vlastně faktorový prostor X/M, kde

$$M = \{f \in \mathcal{L}^p(a,b) : \ f(t) = 0 \text{ skoro všude na } (a,b)\}.$$

Věta 1.25. *Nechť M je* uzavřený *lineární podprostor NLP X. Pro $[x] \in X/M$ definujeme*

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|.$$

Pak $\| \ \|$ je norma na X/M. Je-li X Banachův, je i X/M Banachův.

Důkaz. Platí

$$\|[x]+[y]\| = \inf_{\substack{u\in[x]\\ v\in[y]}} \|u+v\| \le \inf_{\substack{u\in[x]\\ v\in[y]}} \{\|u\| + \|v\|\} \le \inf_{[x]} \|u\| + \inf_{[y]} \|v\| = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Podobně $\|\alpha[x]\| = |\alpha| \|[x]\|$. Zbývá ukázat, že $\|[x]\| = 0$ pouze pro $[x] = 0$, tj. $[x] = M$. Protože M je uzavřený a pro každou $[x] \in X/M$ je $[x]$ lineárně homeomorfní M, neboť $[x] = \{y \in X : \ y = x + m, \ m \in M\}$, (tj. $[x]$ je vlastně „posunutý" prostor M, tedy afinní podprostor se zaměřením M). Nechť $\|[x]\| = 0 = \inf_{u\in[x]} \|u\|$. Pak $\exists y_n \in [x]$ taková, že $\|y_n\| \to 0$, tj. $y_n \to 0 \in [x]$, neboť $[x]$ je uzavřený podprostor. Tedy $[x] = 0$ v X/M. Při důkazu úplnosti X/M postupujeme zhruba takto: Nechť $[x]_n$ je cauchyovská v X/M, tj.

$$\|[x]_n - [x]_m\| \to 0, \quad \min\{m,n\} \to \infty,$$

tj. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ takové, že $\forall m,n \ge n_0$ platí

$$\|[x]_n - [x]_m\| = \inf_{\substack{u\in[x]_n\\ v\in[y]_m}} \|u - v\| < \varepsilon.$$

Odtud $\exists y_n \in [x]_n$ tak, že $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, tedy $\{y_n\}$ je cauchyovská, odtud plyne, že platí $\|[x]_n - [y_0]\| \to 0$, tedy celkem dostáváme, že X/M je úplný. ■

Příklad 1.26. (i) Nechť $X = C[0,1]$ s normou $\|x\| = \max_t |x(t)|$ a podprostor M je definován předpisem $M = \left\{ f \in X : \ \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$.

a) Rozhodněte, zda M je uzavřený.

b) Určete codim$M$.

Řešení. a) Nechť $f_n \in M$, $f_n \rightrightarrows f$. Pak ovšem platí

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

tedy $f \in M$ a odtud plyne, že $M = \overline{M}$.

b) Nechť $f \in X$, $\int_0^1 f(t)dt = c$. Pak $f(t) = c + \overbrace{[f(t) - c]}^{\in M}$. Odtud plyne, že v každé třídě $[f]$ existuje konstantní funkce $g(t) \equiv \int_0^1 f(t)dt$, tedy $X/M \sim \mathbb{R}$, a tedy codim$M = 1$. ▲

Cvičení

1. Rozhodněte, zda $C[a,b]$ s normou $\|\cdot\|_2$ z následujícího příkladu je úplný.
2. $X = C[a,b]$, $\|x\|_1 = \max\limits_{[a,b]} |x(t)|$, $\|x\|_2 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$. Rozhodněte, zda $\| \ \|_1, \ \| \ \|_2$ jsou ekvivalentní.
3. $X = l^1 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,|\sum |x_n| < \infty\}$, $\| \ \|_1 = \sum |x_k|$, $\| \ \|_2 = \sup\limits_k |x_k|$. Rozhodněte, zda $\| \ \|_1, \ \| \ \|_2$ jsou ekvivalentní.
4. Nechť $X = C[0,1]$, $M = \{f: \ f(0) = f(1) = 0\}$.
   1. Rozhodněte, zda M je uzavřený,
   2. Určete codim$M$.

1.2 Prostory se skalárním součinem

Definice 1.27. Nechť X je lineární prostor nad $\mathbb{C}$ a nechť $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ splňuje:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro $\forall x \in X$ a $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro $\forall x, y \in X$,

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ pro $\forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$ a $\forall x, \ y, \ z \in X$.

Pak $\langle , \rangle$ nazýváme *skalární součin* na X a prostor se skalárním součinem nazýváme *unitární prostor*.

Poznámka 1.28. Z podmínek (ii) a (iii) plyne

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\beta}(\overline{\langle z, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}(\langle x, z\rangle.$$

Z tohoto důvodu se někdy skalární součin nazývá „sesquilinear form“ (termín pochází z francouzštiny a lze jej zhruba přeložit jako „jeden a půl lineární“ forma).

Příklad 1.29. (i) Nechť $X = \mathcal{L}^2(a,b)$ se skalárním součinem $(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Pak $\langle f, g\rangle$ je skalární součin. Všimeme si ještě, že jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^2$, pak integrál definující skalární součin je opravdu konečný, neboť platí

$$\int_a^b |f(t)\overline{g(t)}|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tuto nerovnost dostaneme aplikací Cauchyovy nerovnosti (viz následující příklad) na integrální součty definující integrály. Znovu zdůrazněme, že prvky prostorů $\mathcal{L}^2$ jsou *třídy* navzájem ekvivalentních funkcí, tj. funkcí lišících se pouze na množině nulové Lebesqueovy míry (jinak by nebyla splněna první podmínka z definic skalárního součinu).
(ii) Nechť $X = l^2$ se skalárním součinem pro $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde $x_n, \ y_n \in \mathbb{C}$ definovaným předpisem

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Všimněme si, že nekonečná řada v jeho definici je absolutně konvergentní, neboť platí (pro $\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \overline{y}_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

což je „klasická“ Cauchyova nerovnost.

Věta 1.30. *Nechť $x_n \to x$, $y_n \to y$. Pak $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, tedy skalární součin je spojitá funkce z $X \times X$ do $\mathbb{K}$.*

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq |(\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Protože $\|x_n\|$ je ohraničená (je konvergentní), dostáváme požadované tvrzení. ■

Věta 1.31. *Nechť X je unitární prostor. Pak pro $\forall x,\ y \in X$ platí Schwarzova (resp. Cauchyova, resp. Cauchy-Buňakovského) nerovnost*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Důkaz. Tvrzení se dokazuje úplně stejně jako v $\mathbb{R}^n$. Pro $t \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$0 \leq \langle tx + \alpha y, tx + \alpha y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + t\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + t\alpha \langle y, x \rangle + \alpha\overline{\alpha} \langle y, y \rangle.$$

Volme $\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{|\langle x,y \rangle|}$, je-li $\langle x, y \rangle \neq 0$ a $\alpha = 1$, je-li $\langle x, y \rangle = 0$. Pak $\alpha\overline{\alpha} = 1$ a dostáváme $0 \leq t^2 \langle x, x \rangle + 2t|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$ a výpočtem diskriminantu dostáváme tvrzení. ■

Věta 1.32. *Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ má všechny vlastnosti normy. Dále platí rovnoběžníkové pravidlo*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{1.6}$$

a identita

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 \right), \tag{1.7}$$

specielně, je-li X reálný unitární prostor, platí

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2. \tag{1.8}$$

Důkaz. Všechny vztahy se ověří přímým výpočtem. Pro ilustraci zde dokažme vztah pro $4\langle x, y \rangle$. Označme P pravou stranu dokazovaní rovnosti. Pak

$$\begin{aligned} P &= \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle + i \left[\langle x + iy, x + iy \rangle - \langle x - iy, x - iy \rangle \right] = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle + \\ &\quad + i \left[\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle \right] = \\ &= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle + i \left[-2i\langle x, y \rangle + 2i\langle y, x \rangle \right] = 4\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Z výpočtu je také vidět, že v případě $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, což platí v reálném unitárním prostoru, dostáváme vztah (1.8). ■

Předchozí věta dává také odpověď na otázku, kdy je norma v nějakém normovaném prostoru vytvořena skalárním součinem. Je tomu tak právě když platí rovnoběžníkové pravidlo (1.6).

Věta 1.33. *Nechť X je NLP s normou $\|\cdot\|$. Tato norma je vytvořena skalárním součinem (který je dán vztahem* (1.7)*, v případě reálného prostoru* (1.8)*), právě když platí rovnoběžníkové pravidlo* (1.6).

Důkaz. Nechť platí rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Pro jednoduchost ověříme vlastnosti skalárního součinu v reálném případě (1.8), tj. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$. Odtud dostáváme $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}4\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$. Evidentně $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$. Sečtení obdélníkového pravidla (1.6) dostáváme

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].$$

Vypočteme

$$\begin{aligned}
&\langle x_1+x_2,y\rangle - \langle x_1,y\rangle - \langle x_2,y\rangle = \\
=&\frac{1}{2}\big[\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2\|^2 - \|y\|^2 - \|x_1+y\|^2 + \\
&+ \|x_1\|^2 + \|y\|^2 - \|x_2+y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|y\|^2\big] = \\
=&\frac{1}{2}\big[\|x_1+x_2+y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \|x_1+x_2\|^2 - \|x_1+x_2\|^2 - \|x_2+y\|^2 + \|y\|^2\big] = \\
=&\frac{1}{2}\left[\|x_1+x_2+y\|^2 - \frac{1}{2}\left[\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1+x_2\|^2\right] + \|y\|^2\right] = \\
=&\frac{1}{2}\left[\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2+y\|^2 - \|y\|^2 + \|y\|^2\right] = 0.
\end{aligned}$$

Dále

$$\langle -x,x\rangle = \frac{1}{4}(\|-x+y\|^2 - \|-x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x-y\|^2 - \|x+y\|^2) = -\langle x,y\rangle,$$

tedy $\langle x_1-x_2,y\rangle = \langle x_1,y\rangle - \langle x_2,y\rangle$. Odtud indukcí pro $p\in\mathbb{Z}$ platí $\langle px,y\rangle = p\langle x,y\rangle$. Nechť $m\in\mathbb{N}$. Položme $\tilde{x} = \frac{x}{m}$. Pak $\langle x,y\rangle = \langle m\tilde{x},y\rangle = m\langle\tilde{x},y\rangle$, tedy $\frac{1}{m}(x,y) = (\tilde{x},y) = \left\langle \frac{1}{m}x,y\right\rangle$. Toto ve spojení s předchozím dává

$$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$$

pro $\forall\alpha\in\mathbb{Q}$. Konečně, nechť $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\alpha_n\in\mathbb{Q}$, $\alpha_n\to\alpha$. Ze spojitosti skalárního součinu plyne $\langle\alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ pro $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. ■

Definice 1.34. Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá *Hilbertův prostor*.

Poznámka 1.35. Mezi prostory l^p, $\mathcal{L}^p(a,b)$ jsou Hilbertovými prostory pouze l^2 a $\mathcal{L}^2(a,b)$. Pro $p\neq 2$ není obtížné najít prvky, pro něž je porušeno rovnoběžníkové pravidlo (1.6).

Definice 1.36. Nechť X je prostor se skalárním součinem, $S\subseteq X$. Řekneme, množina S je:

(a) *lineárně nezávislá*, jestliže pro každé navzájem různá $x_1,\dots,x_n\in S$ jsou tyto prvky lineárně nezávislé,

(b) *ortonormální*, jestliže $\langle x,y\rangle = 0$, tj. $x\perp y$ pro $\forall x,\ y\in S$, $x\neq y$ a $\|x\|=1$ pro $\forall x\in S$.

Věta 1.37. *Nechť X je separabilní, $S\subseteq X$ je ortonormální. Pak S je nejvýše spočetná.*

Důkaz. Nechť $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná hustá podmnožina v X. Ukážeme, že existuje prosté zobrazení $S \to Y$, tedy card $S \leq$ card Y. Nechť $x_1,\ x_2 \in S,\ x_1 \neq x_2$, pak

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2,$$

tedy $\|x - y\| = \sqrt{2}$. Nechť $x \in S$. Z hustoty Y plyne, že k $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$ existuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| < \varepsilon$. Nechť $u \in S,\ u \neq x$, tj. $\substack{u \to y \\ x \to z}$ a $z \in Y$ je takové, že $\|x - z\| < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Pak

$$\begin{aligned}\sqrt{2} =& \|x - u\| = \|x - y + y - z + z - u\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| + \|z - u\| = \\ =& \frac{2\sqrt{2}}{3} + \|y - z\|.\end{aligned}$$

Tedy $\|y - z\| > \frac{\sqrt{2}}{3}$. Celkem tedy můžeme definovat prosté zobrazení $S \to Y$, což bylo třeba dokázat. ■

Věta 1.38. *Nechť $Y = \{y_n\}$ je nejvýše spočetná lineárně nezávislá množina v prostoru X se skalárním součinem. Pak existuje ortonormální množina $S = \{s_n\} \subseteq X$ taková, že*

$$\operatorname{Lin} Y = \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k,\ y_k \in Y \right\} = \operatorname{Lin} S = \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k,\ s_k \in S \right\}.$$

Důkaz. Provede se obvylký Gram-Schmidtův ortogonalizační proces a dostáváme požadované tvrzení. ■

Definice 1.39. Řekneme, že ortonormální množina $S \subseteq X$ je

(a) *úplná*, jestliže pro nějaké $y \in X$ je $y \perp x$ pro $\forall x \in S$, pak $y = 0$,

(b) *uzavřená*, jestliže $X = \overline{\operatorname{Lin} S}$.

Věta 1.40. *(Věta o projekci na uzavřený podprostor). Nechť H je Hilbertův prostor a L je* uzavřený *podprostor v H. Pak všechna $x \in H$ lze vyjádřit ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in L$ a $z \perp L$. Toto vyjádření je jednoznačné. Je-li $L = \operatorname{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$ a $\{u_1, \dots, u_n\}$ jsou ortonormální, pak $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$.*

Důkaz. Je-li $x \in L$, pak $z = 0,\ y = x$ a tvrzení je triviální. Je-li $x \notin L = \overline{L}$, pak $d = \varrho(x, L) > 0$. Protože $\mathrm{d}ist\,(0, x - L) = \mathrm{d}ist\,(x, L)$, stačí v množině $C := x - L$ nalézt prvek s nejmenší normou. Nechť $y_n \in C,\ \|y_n\| \to d$. Ukážeme, že y_n je cauchyovská. Využitím rovnoběžníkového pravidla a ze skutečnosti, že $\frac{1}{2}(y_m + y_n + y_k) \in C$ dostáváme

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\big(\|(y_n\|^2 + \|y_m\|\big)^2 - \|y_n + y_m\|^2 \leq \\ &\leq 2(\|y\_n\|^2 + \|y_m\|^2) - 4d^2 \to 0,\ \min\{m, n\} \to \infty.\end{aligned}$$

Prostor H je úplný, pak $y_n \to y \in L$ (L je uzavřený) a $\varrho(x, L) = \|x - y\|$. Položme $z = y - x$ a předpokládejme, že $\langle z, \tilde{y}\rangle \neq 0$ pro nějaké $\tilde{y} \in L$. Můžeme předpokládat, že $\langle z, \tilde{y}\rangle < 0$, jinak nahradime $\tilde{y}$ prvkem $-\tilde{y} \in L$ (připomínáme, že L je lineární podprostor). Pak pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\|y - x + \alpha\tilde{y}\|^2 =& \langle y - x + \alpha\tilde{y}, y - x + \alpha\tilde{y}\rangle = \\ =& \|y - x\|^2 + 2\alpha\langle z, \tilde{y}\rangle + \alpha^2\|\tilde{y}\|^2 = d + \alpha\left(2\langle\tilde{y}, z\rangle + \alpha\|\tilde{y}\|^2\right) < d\end{aligned}$$

pro $0 < \alpha < -\frac{\langle z,\tilde{y}\rangle}{\|\tilde{y}\|^2}$. Je-li $L = \mathrm{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$, hledejme y ve tvaru $y = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$. Pak $c_1, \dots, c_n$ je řešením úlohy

$$\|x - (c_1u_1 + \dots + c_nu_n)\|^2 \to \min,$$

tedy

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left\langle x - \sum c_ku_k, x - \sum c_ku_k\right\rangle = 0,$$

tedy $c_k = \langle x, u_k\rangle$. Protože minimalizovaná funkci je kvadratická, je jasné, že nalezený stationární bod je minimum. ■

Poznámka 1.41. (i) Podobně jako na uzavřený lineární podprostor lze v Hilbertově prostoru promítat na uzavřené konvexní podmnožiny. Přesněni, je-li C libovolná uzavřená konvexní ($x, y \in C, \lambda \in [0,1] \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in C$) podmnožina v H a $x \in H$, existuje právě jedno $x_0 \in C$ takové, že $\|x - x_0\| = \mathrm{dist}\,(x, C)$.

(ii) V Banachových prostorech na konvexní podmnožiny obecně promítat *nelze*. Stačí uvažovat množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ danou nerovností $|x| + |y| \leq 1$ a bod $A = [1, 1]$. Pak projekcí A na M je celá úsečka $x + y = 1$, $x, y \geq 0$ (tedy je porušena jednoznačnost). Existence je např porušena v případě, kdy $X = c_0$ a

$$M = \{x = \{x_k\} \in c_0 : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0$$

a $x = \left\{\frac{1}{2^k}\right\}$. Pak $\mathrm{dist}\,(x, M) = \frac{1}{3}$ a $\|x - z\|_{l^\infty} > \frac{1}{3}$ pro $\forall z \in M$.

(iii) v Jisté třídě Banachových prostorů, tzv. *uniformě konvexních prostorech* na konvexní množiny promítat lze. Definici tohoto pojmu uvedeme později v souvislosti s reflexivními prostory.

Věta 1.42. *Nechť X je Hilbertův prostor a $S \subseteq X$ je ortonormální množina.*

(i) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_n \in S$ navzájem různé, platí pro $\forall x \in X$ tzv. Besselova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(ii) Pro libovolné $x \in X$ existuje nejvýše spočetně mnoho $u \in S$ takových, že $\langle x, u\rangle \neq 0$, což spolu s (i) *dává*

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(iii) Množina S je úplná, právě když S je uzavřená.

(iv) Množina S je úplná, právě když platí Parsevalova rovnost

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Důkaz. (i) Označme $\xi_i = \langle x, u_i\rangle$. Platí

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \xi_iu_i, x - \sum_{i=1}^{n} \xi_iu_i\right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i\langle x, u_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle u_i, x\rangle + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\overline{\xi}_i =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2.$$

(ii) Nechť $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná. Pak existuje nejvýše $n^2\|x\|^2$ různých $u \in S$, pro něž $|\langle x, u\rangle| \geq \frac{1}{n}$. Vskutku, je-li více než $n^2\|x\|^2 + 1$, pak

$$\sum_{i=1}^{\lceil n^2\|x\|^2+1\rceil} |\langle x, u_i\rangle|^2 \geq [n^2\|x\|^2 + 1] \cdot \frac{1}{n^2} = \|x\|^2 + \frac{1}{n^2},$$

což je však spor s (i). V horní mezi předchozího sumačního znaku $\lceil\cdot\rceil$ značí celočíselnou část daného čísla. Tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je množina $u \in S,\ |\langle x, u\rangle| \geq \frac{1}{n}$ konečná a spočetné sjednocení konečných množin je nejvýše spočetná množina. Tedy v sumě v (ii) je nejvýše spočetně mnoho nenulových sčítanců, tj. $\sum\limits_{u\in S} \langle x, u\rangle u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, u_i\rangle u_i$ a tvrzení plyne z (i) limitním přechodem pro $n \to \infty$.
(iii) Je-li S úplná a není uzavřená, tj. $\overline{\operatorname{Lin} S} \neq X$, tj. $\exists x \in X$ takové, že $\varrho\left(x, \overline{\operatorname{Lin} S}\right)$, podle Věty 1.40 $x = y + z$, kde $y \in \overline{\operatorname{Lin} S}$, $z \in (\overline{\operatorname{Lin} S})^{\perp}$, $z \neq 0$, a tedy i $z \perp S$, což je spor. Je-li S uzavřená a není úplná, tj. existuje $x \neq 0$, $x \perp S$, pak také $x \perp \operatorname{Lin} S$, tedy $x \perp \overline{\operatorname{Lin} S}$ a odtud $\overline{\operatorname{Lin} S} \neq X$, což je spor.
(iv) Platí-li Parsevalova rovnost a S není úplná, tj. $\exists x \neq 0$, $x \perp S$, pak $\|x\|^2 = \sum\limits_{u\in S} |\langle x, u\rangle|^2 = 0$, tedy $x = 0$, což je spor. Naopak, předpokládejme, že S je úplná a

$$\sum_{u\in S} |\langle x, u\rangle|^2 < \|x\|^2$$

pro nějaké $x \in X$. Protože existuje nejvýše spočetně mnoho $u_n \in S$ takových, že $\langle x, u_n\rangle \neq 0$, pak

$$\sum_{u\in S}\langle x, u\rangle u = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, u_n\rangle u_n.$$

Položme $x_n = \langle x, u_n\rangle u_n$. Protože $\|\langle x, u_n\rangle u_n\| = |\langle x, u_n\rangle|$, $\sum \|x_n\|^2 < \infty$, pak podle Věty 1.20 je konvergentní řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, u_n\rangle u_n = \sum_{u\in S}\langle x, u\rangle u =: y \neq x.$$

Podle Věty 1.40 je $z := y - x \perp S$, tedy S není úplná, což je spor. ∎

Poznámka 1.43. V parciálních diferenciálních rovnicích jsou mimořádně důležité ortonormální systémy funkcí v prostorech $\mathcal{L}^2(a, b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty$.

1. Funkce
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$$
jsou ortonormální na $(-\pi, \pi)$.

2. Tzv. Hermiteovy polynomy
$$H_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\mathrm{e}^{-t^2}$$
jsou ortogonální na $(-\infty, \infty)$ s vahou e^{-t^2}, tj. při skalárním součinu (v reálném případě)
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)\, dt.$$

3. Jsou-li $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ vlastní funkce Sturm-Lionvilleova problému (se spojitými funkcemi p, r a $r(t) > 0$ na $[a, b]$)
$$y'' + p(t)y = \lambda r(t)y,$$
$$Ay(a) + By'(a) = 0, \quad Cy(b) + Dy'(b) = 0, \quad A^2 + B^2 > 0, \quad C^2 + D^2 > 0.$$
platí, že vlastní funkce jsou ortogonální na (a, b) s vahou $r(t)$.

Cvičení

1. Dokažte, že pro $\lambda_n \neq \lambda_m$ jsou vlastní funkce Sturm-Liouvilleovy okrajové úlohy opravdu ortogonální.
2. Nechť $H = l^2$,
$$M = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}.$$
Dokažte, že M je podprostor, který není uzavřený a že $\overline{M} = H$.
3. $X = C[0, 1],\ x(t) = t,\ M = \{x(t) \equiv \text{konst.}\}$. Určete $\varrho_c(x, M)$.
4. $X = \mathcal{L}^2(0, \pi)$,
$$M = \{x \in \mathcal{L}^2 :\ x \text{ je absolutně spojitá } x' \in \mathcal{L}^2(a, b),\ x(0) = 0 = x(\pi)\}.$$
Rozhodněte, zda platí:
$$x \in M \iff \sum k^2 b_k^2 < \infty, \quad \text{kde } b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x(t) \sin ktdt.$$

1.3 Topologické linární prostory

Nejprve připomeňme, že *topologický prostor* je množina X, kde je definován systém podmnožin $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ (systém všech podmnožin množiny X, tuto množinu budeme také někdy značit $\mathcal{P}(X)$) s vlastností

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) Jestliže $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{T}$, pak $\bigcap_{i=1}^n X_i \in \mathcal{T}$;

(iii) Je-li $X_i \in \mathcal{T}$, $i \in \mathcal{I}$, libovolný systém množin (indexová množina $\mathcal{I}$ je libovolná), pak $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \in \mathcal{T}$.

Systém množin $\mathcal{T}$ se naývá *topologie* na X. Množiny $A \in \mathcal{T}$ se nazývají *otevřené* a jejich komplementy v X se nazývají *uzavřené*. Okolím bodu $x \in X$ je libovolná otevřená množina $A \in \mathcal{T}$, pro níž $x \in A$. Posloupnost $x_n \in X$ konverguje k x v topologii $\mathcal{T}$, píšeme $x_n \to x$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(x)$ bodu x existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in \mathcal{O}(x)$. Uzávěr množiny $B \subset X$ definujeme jako množinu hromadných bodů posloupností z B, tj.
$$\overline{B} = \{b \in X :\ \exists x_n \in B :\ x_n \to b\}$$
Zobrazení $F : X \to Y$ mezi topologickými prostory X, Y je *spojité*, pokud pokud pro $\forall x \in X$ a každé okolí $\mathcal{O}(y)$ bodu $y = F(x)$ v Y existuje okolí $\mathcal{O}(x)$ bodu x takové, že $F(\mathcal{O}(x)) \subset \mathcal{O}(y)$.

Nechť X, Y jsou topologické prostory s topologiemi $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Pak kartézský součin $X \times Y$ je topologický prostor s topologií tvořenou množinami $A \times B$, $A \in \mathcal{T}_X$, $B \in \mathcal{T}_Y$.

Nechť X je lineární prostor (nad tělesem $\mathbb{K}$), který je současně topologickým prostorem. Řekneme, že X je *topologický lineární prostor*, je-li sčítání a násobení skalárem v topologii topologického prostoru spojité zobrazení $X^2 \to X$, resp. $X \times \mathbb{K} \to X$. Samozřejmě, každý normovaný lineární prostor je automaticky topologický lineární prostor, opak neplatí, jak uvidíme později.

Definice 1.44. Množina Y v lineárním topologickém prostoru X se nazývá *konvexní*, jestliže

$$y_1,\ y_2 \in Y,\ \lambda \in [0,1] \implies \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Y.$$

Topologický lineární prostor se nazývá *lokálně konvexní*, jestliže ke každému $x \in X$ a okolí $\mathcal{O}(x)$ existuje $U \in \mathcal{T}$ konvexní taková, že $x \in U \subseteq \mathcal{O}(x)$.

Vzhledem ke spojitosti sčítání, se stačí při konstrukci topologie v lineárním prostoru omezit na okolí bodu $0 \in X$, neboť je-li U okolí bodu 0 a $x_0 \in X$, je $x_0 + U = \{x | x = x_0 + u,\ u \in U\}$ okolí bodu x_0. Většina úvah, které budeme provádět v dalších kapitolách pro normované lineární prostory lze s určitými modifikacemi přenést i do lokálně konvexních topologických prostorů. Při konstrukci lokálně konvexních topologií je klíčovým pojmem termín *pseudonormy*.

Definice 1.45. Nechť X je lineární prostor. Funkce $p : X \to [0, \infty)$ se nazývá *pseudonorma*, jestliže platí:

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro $\forall x, y \in X$

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro $\forall x \in X$ a $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Z podmínky (i) dosazením $x = y = 0$ plyne, že $p(0) = 0$. Na rozdíl od normy však může být $p(x) = 0$ i pro $x \neq 0$. Přímo z (i) a (ii) $p(x_1 - x_2) \geq |p(x_1) - p(x_2)|$.

Příklad 1.46. (i) Nechť $X = C[a,b]$, $t_0 \in [a,b]$. Pak $p(x) = |x(t_0)|$ je pseudonorma na X.
(ii) Nechť $X = C[0,\infty)$ a $p_T(f) = \max_{t \in [0,T]} |f(t)|$. Pak p_T, $T \in (0,\infty)$ je systém pseudonorem na X.

Věta 1.47. *Nechť X je lineární prostor, p – pseudonorma na X, $c > 0$. Pak množina $M_c = \{x \in X : p(x) \leq c\}$ splňuje podmínky:*

1. $0 \in M_c$*;*
2. M_c *je konvexní;*
3. M_c *je* vyvážená*, tj. je-li $x \in M_c$, $|\alpha| \leq 1$, pak $\alpha x \in M_c$*
4. M_c *je* pohlcující*: ke $\forall x \in X$ $\exists \alpha > 0$ tak, že $\alpha^{-1} x \in M$*
5. $p(x) = \inf\limits_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha^{-1} x \in M_c}} \alpha c.$

Důkaz. (i) Protože $p(0) = 0 \Rightarrow 0 \in M_c$;
(ii) Pro $\lambda \in [0,1]$ a $x, y \in X$ platí

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq |\lambda| p(x) + |(1-\lambda)| p(y) \leq c;$$

(iii) a (iv). Tyto vztahy plynou z $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;
(v) Pro $\alpha > 0$ platí $\alpha^{-1} x \in M \iff p(\alpha^{-1} x) \leq c \iff p(x) \leq \alpha c$. Tedy

$$p(x) \leq \inf\{\alpha c;\ \alpha > 0,\ \alpha^{-1} x \in M_c\}$$

a sporem lze ukázat, že nemůže nastat ostrá nerovnost. ■

Věta 1.48. *Nechť* $\{p_i;\ i \in \mathcal{I}\}$ *je systém pseudonorem na lineárním prostoru* X *a platí: ke* $\forall x \in X$, $x \neq 0$, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ *takové, že* $p_{i_0}(x) \neq 0$. *Vyberme konečný systém pseudonorem* $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$ *a* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ *a položme*

$$U = \{x \in X;\ p_{i_1}(x) < \varepsilon_1, \dots, p_{i_n}(x) < \varepsilon_n\}.$$

Pak U *je vyvážená, konvexní a pohlcující. Uvažujme nyní* $\mathcal{U}$ *– třídu všech množin* U *a definujme systém podmnožin* $\mathcal{T}$ *v* X *takto:*

$$G \in \mathcal{T} \iff \text{ke } \forall x \in G\ \exists U \in \mathcal{U} \text{ tak, že } x + U \subseteq G.$$

Pak $\mathcal{T}$ *je lokálně konvexní topologie na* X *a je splněn Hausdorffův axiom oddělitelnosti, tj., pro* $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists \mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y) \in \mathcal{T}$ *taková, že* $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) = \emptyset$.

Důkaz. Důkaz, že $\mathcal{T}$ je topologie se provede přímo: Například je-li $G_1,\ G_2 \in \mathcal{T}$ a $x \in G_1 \cap G_2$ je libovolný. Existují $U_1 \in \mathcal{U}$ takové, že $x + U_1 \subseteq G_1$ a $U_2 \in \mathcal{U}$ takové, že $x + U_2 \subseteq G_2$ a definujeme

$$U_1 = \{p_{i_1}(x) < \varepsilon_1, \dots, p_{i_n}(x) < \varepsilon_n\}, \quad U_2 = \{p_{j_1}(x) < \overline{\varepsilon}_1, \dots, p_{j_m}(x) < \overline{\varepsilon}_m\}.$$

Položme

$$U = \{p_{i_1}(x) < \varepsilon_1, \dots, p_{i_n}(x) < \varepsilon_n, p_{j_1}(x) < \overline{\varepsilon}_1, \dots, p_{j_m}(x) \leq \overline{\varepsilon}_m\}$$

(jsou-li některé indexy $i_k = j_l$, bereme menší z $\varepsilon,\ \overline{\varepsilon}$). Pak $U \subseteq U_1 \cap U_2$, $U \in \mathcal{U}$ a $x + U \subseteq G_1 \cap G_2$. K důkazu oddělitelnosti stačí ukázat oddělitelnost bodů $x = 0$ a $y \neq 0$. Existuje $i_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $p_{i_0}(y) =: \alpha > 0$ a $U = \left\{x;\ p_{i_0}(x) < \frac{\alpha}{2}\right\}$, $y + U$ jsou hledaná disjunktní okolí bodů $x = 0$ a $y \neq 0$. ■

Definice 1.49. Topologie z předchozí věty se nazývá *topologie vytvořená systémem pseudonorem* $\{p_i;\ i \in \mathcal{I}\}$.

Poznámka 1.50. Typickým příkladem lokálně konvexního TP je prostor spojitých funkcí s topologií indukující bodovou konvergenci. Lze ukázat, že tato topologie je vytvořena systémem pseudonorem z úvodního příkladu. Lze také ukázat, že tato topologie *není vytvořena žádnou normou.*

Poznámka 1.51. Příklad metrického prostoru, kde metrika není vytvořena normou je

$$P = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}, \ \varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}.$$

Pak $\varrho(x, 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n(1+|x_n|)}$ a obecně

$$\varrho(2x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|x_n|}{2^n(1 + 2|x_n|)} \neq 2\rho(x, 0).$$

Kapitola 2

Lineární operátory

2.1 Prostory lineárních operátorů

Definice 2.1. Nechť X, Y jsou normované (topologické) lineární prostory. Řekneme, že zobrazení $T : X \to Y$ je *spojité v bodě* $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, jestliže pro každou $x_n \to x_0$ platí $T(x_n) \to T(x_0)$. Zobrazení T je spojité na X, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

Poznámka 2.2. Není obtížné dokázat, že tato definice je v souladu s definicí spojitého zobrazení mezi topologickými prostory pomocí okolí, viz [1]. V dalším textu budeme často pro lineární operátory psát Tx místo $T(x)$. Tato konvence pochází (mimo jiné) z lineární algebry, kde lineární zobrazení je vždy reprezentováno násobením nějakou maticí.

Věta 2.3. *Nechť $T : X \to Y$ je lineární. Pak T je spojité na X právě tehdy, když T je spojité v bodě $x = 0$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Triviální.
„$\Leftarrow$“: Nechť $x_0 \in X$ je libovolné, $x_n \to x_0$, pak $x_n - x_0 \to 0$, tedy $T(x_n - x_0) = T(x_n) - T(x_0) \to 0$, tedy celkem $T(x_n) \to T(x_0)$. ∎

Definice 2.4. Řekneme, že operátor $T : X \to Y$ je *ohraničený* (omezený), jestliže pro každou ohraničenou $A \subseteq \mathcal{D}(T)$ je její obraz

$$T(A) = \{y \in Y;\ y = T(x),\ x \in A\}$$

také ohraničená množina.

Věta 2.5. *Nechť $T : X \to Y$ je lineární. Pak T je spojitý právě když je ohraničený.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Nechť T, je spojitý v $x = 0$, tedy platí: k $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro: $\|x\| \leq \delta$ platí $\|T(x)\| \leq 1$. Nechť $0 \neq x \in X$ je libovolné, pak $\overline{x} = \frac{\delta}{\|x\|}x$ splňuje $\|\overline{x}\| \leq \delta$ a tedy

$$\|T(\overline{x})\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\delta}{\|x\|}T(x)\right\| \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

Tedy T zobrazí kouli s poloměrem R na kouli s poloměrem $\frac{R}{\delta}$, a tedy T je omezené.
„$\Leftarrow$“: Je-li T omezené, zobrazí jednotkovou kouli $\|x\| \leq 1$ na omezenou množinu, existuje tedy $M := \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$, tj., pro $x \neq 0$ je $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, což znamená, že T je spojité v $x = 0$, tedy T je spojité. ∎

Věta 2.6. *Nechť $T : X \to Y$ je lineární. Je-li $Tx = 0$ pouze pro $x = 0$, pak existuje T^{-1}, které je také lineární. Jestliže existuje $m > 0$ tak, že*

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \quad \textit{pro } \forall x \in X \tag{2.1}$$

je T^{-1} navíc spojité.

Důkaz. Implikace $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ zaručuje, že T je prosté ($T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$). Předpokládejme, že platí (2.1), a nechť $x = T^{-1}(y)$. Pak pro $y = T(x)$

$$m\|T^{-1}(y)\| \leq \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

a T^{-1} je spojité. ■

Poznámka 2.7. V nekonečně dimenzionálním prostoru lineární zobrazení *nemusí být spojité*. Uvažujme $X = C^1[a,b]$ a normou $\|x\| = \sup\limits_{[a,b]} |x(t)|$, $Y = C[a,b]$ a

$$T : X \to Y; \quad x(t) \xrightarrow{T} x'(t).$$

Pro

$$x_n(t) = \frac{\sin n^2 t}{n} \to 0, \quad T(x_n) = n \cos n^2 t \not\to 0 = T(0).$$

Definice 2.8. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Definujme $\mathcal{L}[X,Y]$ jako množinu *spojitých* lineárních operátorů z $X \to Y$ a nechť

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|. \tag{2.2}$$

Je-li $X = Y$, píšeme $\mathcal{L}[X]$ místo $\mathcal{L}[X,X]$.

Poznámka 2.9. Normu operátoru T je možno ekvivalentně definovat vztahem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{2.3}$$

Je-li totiž $\|x\| < 1$ a $y = \frac{x}{\|x\|}$, pak $\|y\| = 1$ a

$$\|T(y)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| > \|T(x)\|.$$

To znamená, že v definici normy operátoru stačí brát supremum přes jednotkovou sféru. Podobně se ukáže ekvivalence druhého vztahu v (2.3) se vztahem (2.2).

Věta 2.10. *Množina $\mathcal{L}[X,Y]$ s výše definovanou normou je normovaný lineární prostor. Je-li Y úplný, je $\mathcal{L}[X,Y]$ také úplný.*

Důkaz. Důkaz, že $\|\ \|$ je skutečně norma je triviální (ověřte si sami). Nechť $A_n \in \mathcal{L}[X,Y]$ je cauchyovská posloupnost. Pro $\forall x \in X$ je

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0,$$

tedy $\{A_n x\}$ je cauchyovská posloupnost prvků z Y, tedy $A_n x$ je konvergentní, označme Ax její limitu. Není těžké ověřit, že přiřazení $x \to Ax$ je lineární. Protože A_n je cauchyovská, tedy omezená, tj. $\|A_n\| \leq M$, a tedy $\|A_n x\| \leq M\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq M$. Platí

$$\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$$

pro dostatečně velká m, n, odtud plyne

$$\lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\| = \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|,$$

tedy celkem dostáváme $\|A_n - A\| \to 0$ pro $n \to \infty$. ■

Příklad 2.11. (i) Nechť $X,\ Y = C[a,b]$, $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a definujme

$$T(x) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Rozhodněte o spojitosti T v případech, kdy bereme $C[a,b]$ a $\mathcal{L}^2(a,b)$ normy na X, Y (4 případy).

Řešení. Uvažujme nejprve na X i Y normu $C[a,b]$ stejnoměrné konvergence a nechť

$$\|x_n\| = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t)| \to 0.$$

Pak

$$|T(x_n)(t)| = \left| \int_a^b K(t,s)x_n(s)ds \right| \leq \|x_n(t)\| \int_a^b |K(t,s)|ds \leq M(b-a)\|x_n\|,$$

tedy je zobrazení T spojité. Konstanta M v předchozím vztahu je konstanta ohraničující spojitou funkci K na kompaktní množině $[a,b] \times [a,b]$.
Nechť norma na X je $\mathcal{L}^2$ norma a na Y je obvyklá $C[a,b]$. Platí (z Cauchyovy nerovnosti)

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \max_{t\in[a,b]} |T(x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |K(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |x(t)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{L}\|x\|_{\mathcal{L}^2},\end{aligned}$$

kde L je konstanta ohraničující na $[a,b]$ spojitou funkci $\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds$. Tedy T je i zde spojité.
Spojitost T ve zbývajících dvou případech kombinací $\mathcal{L}^2$ normy a normy stejnoměrné konvergence se ukáže analogicky a je ponechána čtenáři jako cvičení.

▲

(ii) Nechť $X,\ Y = C[a,b]$,

$$T : x(t) \longmapsto \int_a^t x(s)ds$$

Najděte normu $\|T\|$.

Řešení. Platí

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t x(s)ds \right| \leq \sup_{\|x\|=1} \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |x(s)|ds$$
$$\leq \sup_{\|x\|=1} \int_a^b |x(s)|ds \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \int_a^b ds = (b-a),$$

přičemž pro $x(t) \equiv 1$ nastává rovnost, tedy $\|T\| = b - a$. ▲

(iii) Nechť $X = C^1[a,b]$, s normou

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

$Y = C[a,b]$ s obvyklou normou, $T : x(t) \mapsto x'(t)$. Rozhodněte, zda T je spojité, pokud ano, určete $\|T\|$.

Řešení. Platí

$$\|T(x)\|_{C^1} = \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| = \|x\|_C,$$

tedy T je spojité a pro jeho normu dostáváme $\|T\| \leq 1$. Ukážeme, že $\|T\| = 1$. Uvažujme posloupnost funkcí $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$. Pak $\|x_n\|_{C^1} = 1 + \frac{1}{n}$ a dosazením $x/\|x\|_{C^1}$ místo x v následujícím vztahu vidíme, že opravdu $\|T\| = 1$.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \max_{t\in[a,b]} \{|x'(t)|;\ \max|x'(t)| + \max|x(t)| = 1\}.$$

▲

Věta 2.12. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $A : X \to Y$ a $\|A\| < 1$. Pak operátor $I - A$ má ohraničenou inverzi $(I-A)^{-1}$ a platí*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \dots,$$

přičemž $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

Důkaz. Protože $\|A\| < 1$, je $\sum \|A\|^n < \infty$, tedy podle Věty 1.20 existuje $B := \sum_{n=1}^{\infty} A^n$. Dále platí

$$(I-A)B = (I-A)(I + A + A^2 + \dots) = I - A + A + A^2 - A^2 + \dots = B(I-A) = I.$$

Přesněji

$$\left\| (I-A)\sum_{k=0}^{n} A_k - I \right\| \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Pro normu pak platí $\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$. ■

Zde jsme použili konvence „násobení“ = „skládání operátorů“.

Příklad 2.13. (i) Nechť $X, Y = C[0,1]$ s normou stejnoměrné konvergence, operátor T je definován předpisem $T(x) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$. Určete $\|T\|$.

Řešení. Platí

$$\|T(x)\| = \max_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \right| \leq \|x\| \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds,$$

tedy $\|T\| \leq \max\limits_t \int\limits_a^b |K(t,s)|ds$. Dokážeme, že platí rovnost. Nechť $t_0 \in [0,1]$ je takové, že

$$\int\limits_0^1 |K(t_0,s)|ds = \max_{t\in[a,b]} \int\limits_0^1 |K(t,s)|ds$$

a označme $z(s) = \operatorname{sgn} K(t_0,s)$. Tato funkce je obecně nespojitá, ale nechť $x_n(s) \in C[0,1]$ taková, že $x_n(s) = z(s)$ pro $s \in [0,1] \setminus M_n$, kde míra množiny

$$m(M_n) \leq \frac{1}{2Ln}, \quad L := \max_{t,s} |K(t,s)|$$

a $\|x_n\| \leq 1$. Na M_n je $|x_n(s) - z(s)| \leq |x_n(s)| + |z(s)| \leq 2$, a tedy

$$\left| \int_0^1 K(t,s)z(s)ds - \int_0^1 K(t,s)x_n(s)ds \right| \leq \int_0^1 |K(t,s)||x_n(s) - z(s)| \leq \frac{1}{n}.$$

Odtud

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds \leq \int_0^1 K(t,s)x_n(s)ds + \frac{1}{n} \leq \|T\|\|x_n\| + \frac{1}{n} \leq \|T\| + \frac{1}{n}.$$

Položíme-li $t = t_0$, pak

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_0^1 |K(t,s)|ds = \int\limits_0^1 |K(t_0,s)|ds = \int\limits_0^1 K(t_0,s)z(s)\,ds \leq \|T\| + \frac{1}{n},$$

Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, $\|T\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds$. ▲

Kromě konvergence v normě prostoru $\mathcal{L}[X,Y]$ můžeme uvažovat i tzv. bodovou nebo také slabou konvergenci operátorů.

Definice 2.14. Řekneme, že posloupnost operátorů $A_n \in \mathcal{L}[X,Y]$ konverguje *bodově* (alternativní terminologie je *slabá konvergence*) k operátoru $A : X \to Y$, jestliže pro všechna $x \in X$ posloupnost $A_n x \overset{Y}{\to} Ax$, a píšeme $A_n \rightharpoonup A$.

Evidentně platí $A_n \overset{\mathcal{L}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]}{\to} A$ pak $A_n \rightharpoonup A$, neboť $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\|x\| \to 0$, pokud $\|A_n - A\| \to 0$.
Opačná implikace neplatí, jak ukazuje následující příklad:

Příklad 2.15. Nechť H je Hilbertův prostor, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ je jeho úplná ortonormální množina, operátor $A_n : H \to H$ je definován předpisem

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k \text{ – projekce na Lin}\{u_1, \ldots, u_n\}.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k) u_k = x \text{ pro } \forall x \in H,$$

neboť $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ je úplná, tedy $A_n x \to x$, tj. $A_n \rightharpoonup I$ – identický operátor. Z druhé strany $\|A_n u_{n+1} - A_{n+k} u_{n+1} = \|u_{n+1}\| = 1$ pro všechna $k \geq 1$, tedy

$$\sup_{\|x\|=1} \|A_n - A_{n+k}\| \geq \|A_n u_{n+1} - A_{n+k} u_{n+1}\| = 1,$$

tedy $\{A_n\}$ není ani cauchyovská v normě $\mathcal{L}[X, Y]$.

Poznámka 2.16. Topologii vytvořenou slabou konvergencí, tzv. *slabou topologii* je kromě metody pseudonorem možné definovat také prostřednictvím *uzávěrové operace* následujícím způsobem. Je-li na X dána konvergence $\to$ a $M \subseteq X$, označme

$$h(M) = \{\text{množina všech hromadných bodů množiny } M\}.$$

Pak $h : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ má všechny vlastnosti uzávěru. Je-li $h(M) = M$, nazveme M uzavřenou a definujeme topologii

$$\mathcal{T} = \{Y \subseteq X : \ h(X \setminus Y) = X \setminus Y\}.$$

Lze ukázat, že tato slabá topologie na $\mathcal{L}[X, Y]$ *není indukována žádnou normou.*

Věta 2.17. *Nechť $A : X \to Y$ je lineární omezený operátor s definiccním oborem $\mathcal{D}(A)$, který je hustý v X a nechť Y je úplný (tedy Banachův). Pak existuje $B \in \mathcal{L}[X, Y]$ takový, že:*

$$B|\mathcal{D}(A) = A \quad a \quad \|B\|_X = \|A\|_{\mathcal{D}(A)},$$

zde

$$\|A\|_{\mathcal{D}(A)} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in\mathcal{D}(A)}} \|Ax\|, \quad \|B\|_X = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|.$$

Důkaz. Nechť $L := \mathcal{D}(X)$, pak $\overline{L} = X$. Je-li $x_0 \in X \setminus L$, pak existuje $x_n \in L$, $x_n \to x$. Posloupnost Ax_n je cauchyovská, vskutku

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\|_L \|x_n - x_m\| \to 0, \quad \text{pro } n, m \to \infty,$$

tedy existuje $\lim Ax_n =: Bx$. Přímo lze ukázat, že B je lineární a dále platí $\|Ax_n\| \leq \|A\|_L \|x_n\|$, tedy limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} : \ \|Bx\| \leq \|A\|_L \|x\|,$$

tj., $\|B\|_X \leq \|A\|_L$. Opačná nerovnost platí triviálně (supremum v definice normy se bere přes větší množinu), tedy celkem $\|A\|_L = \|B\|_X$. ∎

Cvičení

1. $X = l^2,\ T : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} \mapsto \left\{\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}}, \ldots, \frac{x_n}{2^{\frac{n}{2}}}, \ldots\right\}$. Určete $\|T\|$.
2. $X = l^1,\ T : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} \mapsto \{x_n \cdot \operatorname{arctg} n\} \in l^1$. Je T spojitý? Pokud ano, určete $\|T\|$.
3. Nechť $X = Y = C[0,1]$. Definujeme

$$A_n x(t) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}\right) x(s) ds.$$

   Určete $\lim A_n$ v normě $\mathcal{L}[X]$.
4. $X = Y = C[0,1]$. $A_n x(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$
   a) Dokažte, že A_n je spojitý pro všechna n,
   b) Určete $\lim A_n$ v normě $\mathcal{L}$.
5. $X = l^2,\ x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},\ A_n x = \{0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$. Určete slabou limitu, rozhodněte, zda je i stejnoměrnou.

2.2 Princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta

Věta 2.18. *(Banach-Steinhausova věta, princip stejnoměrné omezenosti).*
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $A_n \in \mathcal{L}[X, Y]$, přičemž pro $\forall x \in X$ je posloupnost $A_n x =: y_n$ ohraničená, tj. $\|y_n\| \leq K(x)$ (konstanta K obecně závisí na x). Pak posloupnost norem $\{\|A_n\|\}$ je ohraničená, tj. $\exists K$ takové, že $\|A_n\| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že $\|A_n\| \to \infty$. Pak pro libovolné $x_0 \in X$ a $\forall r > 0$ množina

$$Y_0 = \{y = A_n x,\ x \in B(x_0; r)\}$$

není ohraničená. Používáme obvyklé označení $B(x_0; r) = \{x : \ \|x - x_0\| \leq r\}$ Vskutku, kdyby existovalo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\|A_n x\| \leq c$, pak pro libovolné $x \in X$ je prvek $\xi = r\frac{x}{\|x\|} + x_0 \in B(x_0; r)$, tedy $\|A_n \xi\| \leq c$, a tedy

$$\left\| A_n \left(r\frac{x}{\|x\|} + x_0 \right) \right\| \leq c$$

a současně

$$\left\| A_n \left(r\frac{x}{\|x\|} + x_0 \right) \right\| \geq r\frac{x}{\|x\|}\|A_n x\| - \|A x_0\|.$$

Celkem

$$r\frac{x}{\|x\|}\|A_n x\| - \|A x_0\| \leq c,$$

tedy

$$\|A_n x\| \leq \frac{c + \|A_n x_0\|}{r}\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Protože posloupnost $\{A_n x_0\}$ je podle předpokladu ohraničená, je $\|A_n x_0\| \leq \tilde{c}$, pro nějaké $\tilde{c} > 0$, tedy

$$\|A_n x\| \leq \frac{c + \tilde{c}}{r}\|x\|,$$

což je spor s tím, že $\|A_n\| \to \infty$.

Nechť nyní $x_0 \in X$ (lze vzít $x_0 = 0$) a $r_1 > 0$ jsou libovolná. Posloupnost $\|A_n x\|$ není ohraničená v $B(x_0; r)$, to znamená, že $\exists x_1 \in B(x_0; r_0)$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. Podobně, A_{n_1} je spojitý, pak exstuje $r_2 > 0$, takové, že $\|A_{n_1} x\| \geq 1 \forall x \in B_1 := B(x_1; r_2)$. Na B_1 je $\|A_n x\|$ neohraničená, tedy existuje $x_2 \in B_1,\ n_2 > n_1$ taková, že $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ a opět existuje r_3 takové, že $\|A_{n_2} x\| \geq 2$ pro $x \in B(x_2; r_3), \ldots$. Výsledkem konstrukce je posloupnost $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, vzhledem k úplnosti $\exists x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ a platí $\|A_{n_k} x\| \geq k$, což vede ke sporu s omezeností $\{A_n x\}$. ■

Poznámka 2.19. (Důsledky Banach-Steinbausova věty).
(i) Je-li $A_n \in \mathcal{L}[X, Y]$, kde X, Y jsou Banachovy prostory a $A_n \rightharpoonup A$, pak A je také ohraničená, tj množina spojitých operátorů $\mathcal{L}[X, Y]$ je uzavřená v množině *všech* lineárních (obecně nespojitých) ve slabé topologii. Tato skutečnost se dokáže následovně. Je-li $A_n \rightharpoonup A$, pak $A_n x$ konverguje pro $\forall x$, tedy je vskutku ohraničená.

(ii) Posloupnost $A_n \in \mathcal{L}[X, Y]$, kde $X,\ Y$ jsou Banachovy prostory, je bodově (slabě) konvergentní, tj., $A_n \rightharpoonup A$ právě když:

1. Posloupnost norem $\{\|A_n\|\}$ je ohraničená,
2. $\exists M \subseteq X$ taková, že $\overline{\text{Lin} M} = X$ (tj., M je hustá v X) $A_n x \to Ax$ pro $\forall x \in M$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Plyne z Banach-Steinhausova věty (Věta 2.18).
„$\Leftarrow$“: Označme $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$. Z linearity A_n a A plyne, že $A_n x \to Ax$ pro $\forall x \in \text{Lin} M$. Nechť $\xi \in X \setminus \text{Lin}\, M$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ $\exists x \in \text{Lin}\, M$ takové, že $\|\xi - x\| \leq \frac{\varepsilon}{4K}$, tedy pro n dostatečně velké (takové, že $|A_n x - Ax| < \frac{\varepsilon}{4}$)

$$\begin{aligned} \|A_n \xi - A\xi\| &\leq \|A_n \xi - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| + \|Ax - A\xi\| \\ &\leq \|A_n\| \cdot \|\xi - x\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|A\| \cdot \|x - \xi\| < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že $A_n \rightharpoonup A$. ■

2.3 Duální prostor a Hahn-Banachova věta

Definice 2.20. Nechť X je normovaný lineární prostor. Prostor $\mathcal{L}[X, \mathbb{K}]$, tj. prostor všech spojitých zobrazení z X do $\mathbb{K}$ se nazývá *duální prostor* k X a značí se X'. V některé literatuře, např. [8], se duální prostor značí X^*. V tomto textu se držíme označení z [13], kde X^* značí tzv. *algebraický duální prostor*, tj. prostor *všech* lineárních zobrazení z X do $\mathbb{K}$ (tj., bez předpokladu spojitosti).

Poznámka 2.21. (i) V konečné dimenzi, tj. $X = \mathbb{R}^n$, platí, že duální prostor, tj. prostor všech lineárních forem na $\mathbb{R}^n$, lze ztotožnit s původním prostorem $X = \mathbb{R}^n$, tedy $(X')' = X$ v konečné dimenzi. V nekonečné dimenzi obecně neplatí, že X je duální prostor k X' je „zpátky“ duální k X. (jako je tomu v $\mathbb{R}^n$). Příklady ukážeme později.

(ii) Ve větě 2.18 nemusí být $\{A_n x\}$ omezena pro všechna $x \in X$, stačí uvažovat „menší“ množinu $X_0 \subseteq X$, která „normuje“ prostor $\mathcal{L}[X, Y]$. Podrobnosti lze nalézt např. v [13].

Definice 2.22. Zobrazení z $X \to \mathbb{K}$ se nazývá *funkcionál*.

Věta 2.23. *Duální prostor X' k libovolnému normovanému lineárnímu prostoru je vždy je úplný.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ jsou úplné, viz Věta 2.10. ■

Věta 2.24. *Nechť X je úplný NLP, X' jeho duál, $N \subseteq X'$. Jestliže pro všechna $x \in X$ je $\sup\limits_{f\in N} |f(x)| < \infty$, pak $\sup\limits_{f\in N} \|f\| < \infty$, tj. N je ohraničená.*

Důkaz. Plyne z Věty 2.18. Pokud N není ohraničená, existuje $f_n' \in N$ taková, že $\|f_n\| \to \infty$, ale to je spor s důsledkem z Poznámky 2.21, neboť $f(x)$ je ohraničená pro $\forall x \in X$. ■

Věta 2.25. *Nechť X je NLP a X' je jeho duální prostor, $M \subseteq X$. Jestliže pro $\forall f \in X'$ je $\sup\limits_{x\in M} |f(x)| < \infty$, pak $\sup\limits_{x\in M} \|x\| < \infty$, tj. M je ohraničená.*

Důkaz. Místo přesného důkazu (ten je velmi podobný důkazu Banach-Steinbausova věty) objasníme geometrickou interpretaci věty. Je-li pro něj funkcionál $f \in X' : \ |x'(x)| < \alpha$ pro $\forall x \in M$, pak M leží uvnitř pásu $|f(x)| = \alpha$, tj., $-f(x) = \pm\alpha$ – dvojice nadrovin. Pokud toto platí pro všechna $f \in X'$, tj. pro každou nadrovinu, je množina M omezená. ■

Věta 2.26. *(Hahn – Banachova věta o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu).*
Nechť X je NLP, L jeho vlastní lineární podprostor a $f : L \to \mathbb{R}$ je spojitý lineární funkcionál na L. Pak existuje lineární funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ s vlastností:
(i)

$$F|_L = f, \quad \textit{tj. } F(x) = f(x) \quad \textit{pro } \forall x \in L,$$

(ii) Platí

$$\|F\|_X = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| = \|f\|_L = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in L}} |f(x)|.$$

Důkaz. Nechť $x_0 \in X \setminus L$ a $L_1 = \mathrm{Lin}\{L, x_0\}$. Je-li $y \in L_1$, existují jediná $x \in L$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že $y = x + \alpha x_0$. Kdyby $y = x_1 + \alpha_1 x_0 = x_2 + \alpha_2 x_0$ byla dvě různá vyjádření, pak $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (pokud $\alpha_1 = \alpha_2$ pak i $x_1 = x_2$ a vyjádření nejsou různá), pak $x_0 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(x_1 - x_2)$, tedy $x_0 \in L$, což je spor.
Nechť $x_1,\ x_2 \in L$ jsou libovolná, pak

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \le \|f\|\|x_1 - x_2\| \le \|f\|(\|x_1 + x_0\| + \|x_2 + x_0\|),$$

tedy $f(x_1) - \|f\|\|x_1 + x_0\| \le f(x_2) + \|f\|\|x_2 + x_0\|$, což dává

$$\sup_{x_1\in L}\{f(x_1) - \|f\|\|x_1 + x_0\|\} \le \inf_{x_2\in L}\{f(x_2) + \|f\|\|x_2 + x_0\|\},$$

tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\sup_{x_1\in L}\{f(x_1) - \|f\|\|x_1 + x_0\|\} \le c \le \inf_{x_2\in L}\{f(x_2) + \|f\|\|x_2 + x_0\|\},$$

tedy

$$\begin{aligned} f(x) - \|f\|\|x + x_0\| \le c \quad \forall x \in L \Rightarrow f(x) - c \le \|f\|\|x + x_0\| \\ f(x) + \|f\|\|x + x_0\| \ge c \quad \forall x \in L \Rightarrow c - f(x) \le \|f\|\|x + x_0\|. \end{aligned}$$

Nyní nechť $u \in L_1$ je libovolné. Výše jsem ukázali, že existují (jediná) $x \in L,\ \alpha \in \mathbb{R}$ taková, že $u = x + \alpha x_0$. Definujme $\varphi : L_1 \to \mathbb{R} :\ \varphi(u) = f(x) + \alpha c$, tedy $\varphi|L = f$ a φ je lineární. Je-li $\alpha > 0$, pak $\frac{x}{\alpha} \in L$ a

$$|\varphi(u)| = \alpha \left| f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - c \right| \le \|f\| \left\| \frac{x}{\alpha} + x_0 \right\| = \|f\|\|x + \alpha x_0\| = \|f\|\|u\|.$$

Podobně pro $\alpha < 0$ je $|\varphi(u)| \leq \|f\|\|u\|$, protože

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - c \geq \|f\| \left\|\frac{x}{\alpha} + x_0\right\| = -\frac{1}{|\alpha|}\|fx + \alpha x_0\| = \frac{1}{\alpha}\|f\|\|u\|,$$

tedy

$$\varphi(u) = \alpha \left[f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - c\right] \leq \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\|f\|\|u\| = \|f\|\|u\|,$$

výměnou $u \to -u$ dostáváme $-\varphi(u) \leq \|f\|\|u\|$, tedy $|\varphi(u)| \leq \|f\|\|u\|$). Celkem $\|\varphi\|_{L_1} \leq \|f\|_L$. Triviálně ($L_1 \supseteq L$) $\|\varphi\|_{L_1} \geq \|f\|_L$, tedy $\|\varphi\|_{L_1} = \|f\|_L$. Nyní vezmeme $x_1 \notin L_1,\ L_2 = \mathrm{Lin}\{L_1, x_1\}$ a celý postup opakujeme. Je-li X separabilní, je posloupnost $x_0,\ x_1,\ x_2$ nejvýše spočetná a vše je splněno. Pro neseparabilní prostory musíme použít Zornovo lemma: Je-li v uspořádané množině každá lineárně uspořádaná podmnožina (řetězec) shora ohraničená, pak má množina alespoň jeden maximální prvek. Uvažujme $\mathcal{F}$ jako množinu všech rozšíření f s normou $\|f\|$ s uspořádáním

$$f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}(f_1) \subset \mathcal{D}(f_2),\ f_2|_{\mathcal{D}(f_1)} = f_1.$$

Nechť f_α je libovolná uspořádaná podmnožina $\mathcal{F}$. Tato množina má horní hranici $\tilde{f}$ – funkcionál definovaný na $\tilde{L} = \bigcup_\alpha L_\alpha,\ L_\alpha = \mathcal{D}(f_\alpha)$ s hodnotami $\tilde{f}(x) = f_{\alpha_0}(x)$, kde α_0 je takové, že $x \in L_{\alpha_0}$. Jsou tedy splněny podmínky Zornova lemmatu, tedy existuje alespoň jeden maximální prvek, jehož definiční obor je celé X, jinak by šel ještě dál rozšířit. ■

Důsledek 2.27. *(i) Nechť X je NLP, $x_0 \in X$. Pak existuje lineární funkcionál $f \in X'$ takový, že $\|f\| = 1$ a $f(x_0) = \|x_0\|$. (V konečné dimenzi $\mathbb{R}^n$ $f(x) = \langle a, x\rangle \Rightarrow \|a\| = 1,\ \langle a, x_0\rangle = \|a\|\|x_0\| = \|x_0\| \Rightarrow a,\ x_0$ lineárně závislé $a = \frac{x_0}{\|x_0\|}$).*

Důkaz. Položme $L = \mathrm{Lin}\{x_0\}$ a definujme pro $x = \alpha x_0$ funkcionál φ předpisem $\varphi(x) = \alpha\|x_0\|$. Pak $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ a $\|\varphi\|_L = 1$, neboť

$$\|\varphi\|_L = \sup_{\|x\|=1, x\in L} |\varphi(x)| = \left|\varphi\left(\pm\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)\right| = \frac{1}{\|x_0\|}|\varphi(x_0)| = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1.$$

Funkcionál f pak dostaneme jako rozšíření φ na celé X. ■

(ii) (Silnější tvrzení než (i)). Nechť $Y \subset X$ je vlastní podprostor, $x_0 \notin Y$, $d = \varrho(x_0, Y) > 0$. Pak existuje $f \in X'$ takový, že $f(Y) = 0$, $f(x_0) = d$ a $\|f\| = 1$.

Důkaz. Libovolné $x \in \mathrm{Lin}\{Y, x_0\}$ je tvaru $x = y + \alpha x_0,\ y \in Y$ (viz důkaz). Definujme $f(x) = \alpha d$. Pak $f(Y) = 0,\ f(x_0) = d$ a

$$|f(x)| = |\alpha| d = \frac{\alpha d\|x\|}{\|x\|} = \frac{|\alpha| d\|x\|}{\|y + \alpha x_0\|} \leq \frac{d\|x\|}{\left\|\frac{y}{\alpha} + x_0\right\|} \leq \|x\|,$$

neboť $d = \inf\limits_{y\in Y}\|y - x_0\|$, tedy $\|f\| \leq 1$. Z druhé strany, $\exists y_n$ takové, že $\|y_n - x_0\| \to d$. Odtud

$$|f(y_n - x_0)| \leq \|f\|\|y_n - x_0\| \Rightarrow d \leq \|f\| d \Rightarrow \|f\| \geq 1.$$

Opakováním této konstrukce dostáváme f stejně jako v důkazu Věty 2.26. ■

Poznámka 2.28. (i) Tvrzení platí i v tomto ještě obecnějším tvaru: Nechť X je lineární prostor $M \subseteq X$ je lineární podprostor a $q : X \to \mathbb{R}$ splňuje: $q(x+y) \leq q(x) + q(y),\ q(\alpha x) = \alpha q(x),\ \alpha \geq 0$. Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ spojitý lineární funkcionál na M splňující $f(x) \leq q(x)\ \forall x \in M$, pak f lze rozšířit na X při zachování této nerovnosti.

(ii) Z části (ii) předchozího důsledku plyne, že libovolným bodem $x_0 \in S(0;r)$ lze vést uzavřenou opěrnou nadrovinu k $B(0;r)$, tj. existuje lineární spojitý funkcionál $f \in X'$ takový, že $f(x_0) = r$ a $f(x) \leq f(x_0)$ pro $\forall x \in B(0;r)$. První rovnost plyne z faktu, že $f(x_0) = \|x_0\| = r$ a druhá z $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|$, tedy pro $x \in B(0;r)$ je $|f(x)| \leq \|x\| \leq r = f(x_0)$, tedy buď $f(x) \leq f(x_0)$, je-li $f(x_0) > 0$ nebo naopak.

(iii) Ještě obecněji, je-li $0 \in M \subseteq X$ konvexní, pak $p(x) = \inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha,\ x \in \alpha M\}$ je pseudonorma na X. Je-li $x_0 \in \partial M$, existuje $f \in X'$ tak, že $f(x) = f(x_0)$ je opěrná nadrovina M v x_0, tj. $f(x) \leq f(x_0)$ nebo $f(x) \geq f(x_0)$ pro $\forall x \in M$. Takto bývá někdy v jiné literatuře formulována Hahn – Banachova věta.

(vi) Hahn – Banachova věta také říká, že prostor X' má vždy „dostatečně mnoho prvků“, pro libovolná $x_1 \neq x_2$ existuje $f \in X' :\ f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.4 Věta o otevřeném zobrazení a uzavřeném grafu

Nyní se budeme zabývat otázkou, kdy je inverzní zobrazení ke spojitému (lineárnímu) zobrazení spojité. Nejdříve připomeňme dvě tvrzení z teorie metrických prostorů:

Lemma 2.29. *Nechť X, Y jsou metrické propstory (ve skutečnosti stačí i topologické prostory). Zobrazení $F : X \to Y$ je spojité na $\mathcal{D}(F)$ právě když pro $\forall M \subseteq Y$ otevřenou je*

$$F^{-1}(M) = \{x \in X :\ F(x) \in M\}$$

otevřená.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Nechť $M \subseteq Y$ je otevřená a $x \in F^{-1}(M)$ je libovolné, pak $F(x) \in M$, tady existuje $F(x) \in V \subseteq M$ a ze spojitosti existuje U-okolí x takové, že $F(U) \subseteq V$, tedy celkem $U \subseteq M$.
„$\Leftarrow$“: Nechť $x \in X$ je libovolné a V je okolí $F(x)$, tj. $F(x) \in V$ je otevřená. $F^{-1}(V)$ je otevřená, tedy k $x \in F^{-1}(V)$ existuje okolí $U \subseteq F^{-1}(V) \Rightarrow F(U) \subseteq V$, tedy F je spojitá v x. ∎

Lemma 2.30. *Úplný metrický prostor je množina 2. kategorie (v Bairově smyslu), tj. úplný metrický prostor nelze vyjádřit jako spočetné sjednocení uzavřených množin, z nichž každá má prázdný vnitřek.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují $X_1,\ X_2, \dots$ takové, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$, přičemž $X_i = \overline{X}_i$ a $\overset{\circ}{X}_i = \emptyset$. Nechť $x_0 \in X$ je libovolné a položme $M_1 := B(x_0; 1)$. Protože $\overset{\circ}{X}_i = \emptyset$, existuje $0 < r_1 < \frac{1}{2}$ a $x_1 \in M_1$ takové, že $M_2 := B(x_1; r_1) \subseteq M_1$ a $M_2 \cap X_1 = \emptyset$. Dále, $\overset{\circ}{X}_2 = \emptyset \Rightarrow \exists x_2,\ 0 < r_2 < \frac{1}{4}$ takové, že $M_3 := B(x_2; r_2) \subseteq M_2,\ M_3 \cap X_2 = \emptyset$. Tímto postupem sestrojíme posloupnost uzavřených množin M_i, pro něž $M_{i+1} \subseteq M_i,\ \operatorname{diam}(M_i) \to 0$, přičemž množina M_n neobsahuje žádný prvek množin $X_1, \dots, X_n$. Protože prostor X je úplný existuje $a = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ a současně $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i = X$, což je spor. ∎

V důkazu hlavního tvrzení tohoto odstavce,věty o otevřeném zobrazení, hraje klíčovou roli následující pomocné tvrzení.

Lemma 2.31. *Nechť* $X,\ Y$ *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}[X,Y]$ *je surjektivní. Pak ke* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *takové, že pro* $A_\varepsilon := \{x \in X,\ \|x\| \le \varepsilon\}$ *platí* $B_\delta := \{y \in Y:\ \|y\| \le \delta\} \subseteq T(A_\varepsilon)$.

Důkaz. Rozdělíme do dílčích kroků:
1. T je surjektivní a prostor lze vyjádřit $X = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} A_r,\ A_r := \{x:\ \|x\| \le r\}$. Odtud

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(A_n) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \overline{T(A_r)}.$$

Protože Y je úplný, existuje alespoň jeden index $n \in \mathbb{N}$ takový, že $\overline{T(A_n)} \neq \emptyset$, tj. existuje $y_0 \in \overline{T(A_n)},\ r > 0$ takové, že $K(y_0;r) \in \overline{T(A_n)}$. Je-li $\|y\| \le r$, pak $y_0 + y,\ y_0 - y \in K(y_0;r) \in \overline{T(A_n)}$, tedy

$$y = \frac{1}{2}[(y+y_0) - (y-y_0)] \in \overline{T(A_n)},$$

neboť A je koule. Dále, $a,\ b \in \overline{T(A)} \Rightarrow \exists a_n,\ b_n \in T(A)$, tj. $a_n = T(x_n),\ b_n = T(y_n)$, taková, že $a_n \to a,\ b_n \to b,\ x_n$. Protože $y_n \in A$, platí, $\frac{1}{2}(x_n+y_n) \in A, -y_n \in A$, odtud $\frac{1}{2}(x_n-y_n) \in A$, a tedy $\frac{1}{2}(a_n - b_n) \in T(A) \Rightarrow \frac{1}{2}(a-b) \in \overline{T(A)}$, pak i $K_r = \{y;\ \|y\| < r\} \subseteq \overline{T(A_n)}$. Tedy nejen koule se středem y_0, ale i koule se středem v počátku je podmnožinou $\overline{T(A_n)}$.
2. Dokážeme že platí: Ke $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $B_\delta = \{y:\ \|y\| < \delta\} \subseteq \overline{T(A_\varepsilon)}$, kde $A_\varepsilon := \{x:\ \|x\| < \varepsilon\}$. Vskutku, je-li $n \in \mathbb{N}$ to, pro nějž $B_r \subseteq \overline{T(A_n)}$, nechť $\varepsilon = \alpha n$. Pak

$$B_{\alpha r} = \alpha B_r \subseteq \alpha\overline{T(A_n)} = \overline{T(\alpha A_n)} = \overline{T(A_{\alpha n})},$$

tj. hledané $\delta = \alpha r$, kde $\alpha = \frac{n}{\varepsilon}$.
3. Ukážeme, že platí: Je-li $B_\delta \subseteq \overline{T(A_\varepsilon)}$, pro nějaká $\delta,\ \varepsilon > 0$, pak $B_\delta \subseteq T(A_{2\varepsilon})$. Nechť $y \in B_\delta$ je libovolné. Protože $B_\delta \subseteq \overline{T(A_\varepsilon)},\ \exists y_1 \in T(A_\varepsilon)$ tak, že $\|y - y_1\| < \frac{\delta}{2}$, tj. $\|2(y_1 - y)\| < \delta \Rightarrow 2(y-y_1) \in B_\delta$ (kdyby takové y_1 neexistovalo, pak by platilo $\varrho(y, T(A_\varepsilon)) > \frac{\delta}{2}$, tedy $y \notin \overline{T(A_\varepsilon)}$). K prvku $2(y-y_1) \in B_\delta$ exstuje $y_2 \in T(A_\varepsilon)$ tak, že $\|2(y-y_1) - y_2\| < \frac{\delta}{2}$, tedy

$$4(y-y_1) - 2y_2 \in B_\delta$$

a $\left\|y - y_1 - \frac{y_2}{2}\right\| < \frac{\delta}{4}$. K prvku $4(y-y_1) - 2y_2 \in B_\delta$ existuje $y_3 \in T(A_\varepsilon)$ takové, že $\|4(y-y_1) - 2y_2 - y_3\| < \frac{\delta}{2}$, tj. $\left\|y - y_1 - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}\right\| < \frac{\delta}{8}$. Pokračováním konstrukce dostaneme posloupnost y_k splňující

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2^{k-1}} \right\| < \frac{\delta}{2^k},$$

tedy $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^{k-1}}$. Ke každému y_k vezměme $x_k \in A_\varepsilon$ tak, že $Tx_k = y_k$ (x_k existují, neboť $y_k \in T(A_\varepsilon)$). Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k-1}}$ je konvergentní a označme $x := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k-1}}$. Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} T(x_k),$$

tedy ze spojitosti plyne $Tx = y$ a

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \|x_k\| \leq 2\varepsilon,$$

tedy $y \in T(A_{2\varepsilon})$, což celkem dává $B_\delta \subseteq T(A_{2\varepsilon})$.
Důkaz je proveden, k $\frac{\varepsilon}{2}$ najdeme δ takové, že $B_\delta \subseteq \overline{T(A_{\frac{\varepsilon}{2}})}$ podle 2. a 3. kroku důkazu $B_\delta \subseteq T(A_\varepsilon)$. ∎

Věta 2.32. *(Věta o otevřeném zobrazení). Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}[X, Y]$ je surjektivní. Pak T je otevřené zobrazení, tj. zobrayuje otevřené množiny na otevřené množiny.*

Důkaz. Nechť $C \subseteq X$ je otevřená a $y_0 \in T(C)$, tj. existuje $x_0 \in C$ takové, že $T(x_0) = y_0$. Množina C je otevřená, tedy existuje U otevřená, taková, že $x_0 \in U$ a $U \subseteq C$. Množina $U - x_0$ je okolí bodu 0 v $X \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tak, že $A_\varepsilon \subseteq U - x_0$. Podle předešlého lemmatu existuje $\delta > 0$ takové, že

$$B_\delta \subseteq T(A_\varepsilon) \subseteq T(U - x_0) = T(U) - y_0 \subseteq T(C) + y_0.$$

Odtud $y_0 + B_\delta \subseteq T(C)$, tj., y_0 je vnitřní, tedy celkem $T(C)$ je otevřená. ∎

Důsledek 2.33. *(i) (Banachova věta): Jsou-li X, Y Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}[X, Y]$ je bijekce, pak T^{-1} je také spojité.*
(ii) Jsou-li $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ dvě normy na X a v obou normách je X úplný, tj. $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ jsou tzv. Banachovy normy a $\exists M > 0$ takové, že $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$, pak $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ jsou ekvivalentní.

Důkaz. (i) Existence T^{-1} plyne z bijektivity, podle předchozí věty T zobrazí otevřené množiny na otevřené množiny a tedy při T^{-1} je vzorem otevřené množiny otevřená množina a z Lemmatu 2.29 plyne, že T^{-1} je spojité.
(ii) Vezmeme $T = Id$ – identita. Podle Věty $T : (X, \| \; \|_1) \to (X, \| \; \|_2)$ je na, podle předpokladu $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ je spojité, tedy $\exists m > 0 : \; \|x\|_2 \leq \frac{1}{m}\|x\|_1$. ∎

Definice 2.34. Nechť X, Y jsou NLP (případně TLP), $T : X \to Y$. Množina

$$G_T = \{[x, G(x)], \; x \in \mathcal{D}(T)\}$$

se nazývá *grafem zobrazení* T. Řekneme, že zobrazení T je *uzavřené*, je-li jeho graf uzavřený v $X \times Y$ (s normou $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$).

Triviálně platí následující tvrzení.

Věta 2.35. *Nechť X, Y jsou NLP, $T : X \to Y$. Pak T je uzavřené právě tehdy, když z podmínek $x_n \to x, \; Tx_n \to y$ (tj. $[x_n, Tx_n] \to [x, y]$) plyne $x \in \mathcal{D}(T)$ a $Tx = y$ (tj. $[x, y] \in G_F$).*

Věta 2.36. *Nechť X, Y jsou NLP, $T \in \mathcal{L}[X, Y]$. Je-li $\mathcal{D}(T)$ uzavřená v X, pak T je uzavřené.*

Důkaz. Nechť $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$. Pak $x \in \mathcal{D}(T)$ protože $\mathcal{D}(T)$ je uzavřená množina a platnost rovnosti $T(x) = y$ zaručuje spojitost operátoru T. ∎

Příklad 2.37. (i) Dříve jsme ukázali, že $T = \frac{d}{dt}$ není spojitý na $X = C[0, 1]$. Je však uzavřený. Nechť $x_n \to x, \; Tx_n \to y$, to znamená, že $x_n(t) \rightrightarrows x(t), x_n'(t) \rightrightarrows y(t)$, tedy podle věty z analýzy $y \in C^1$ a $x' = y$ implikuje T je uzavřené.

Věta 2.38. *(Věta o uzavřeném grafu). Nechť X, Y jsou úplné NLP, $T : X \to Y$ je lineární uzavřený operátor s $\mathcal{D}(T) = X$. Pak $T \in \mathcal{L}[X, Y]$, tj. T je spojitý.*

Důkaz. Kartézský součin $X \times Y$ je úplný a $G_T \subseteq X \times Y$ je uzavřená, tedy je to úplný prostor se zděděnou normou z $X \times Y$. Definujeme $A : G_T \to X$ takto: $A(x, T(x)) = x$ (projekce grafu na X). Platí

$$\|A(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|,$$

tj. $\|A\| \leq 1$, tedy A je omezený. Snadno se ověří, že A je lineární a G_T je lineární podprostor $X \times Y$. Obor hodnot A je celý prostor X (neboť $\mathcal{D}(T) = X$). Operátor A je prostý, tedy existuje A^{-1} a podle věty o otevřeném zobrazení je $A^{-1} : x \mapsto (x, T(x))$ spojitý, tj. $x_n \to x \Rightarrow T(x_n) \to T(x)$, tedy T je spojitý. ■

Věta 2.39. *Je-li $T : X \to Y$ uzavřený a existuje T^{-1}, pak T^{-1} je také uzavřený.*

Důkaz. Důkaz je ve světle předchozí věty a jejího důkazu triviální. ■

Poznámka 2.40. Věta 2.38 se používá při důkazu spojitosti některých lineárních zobrazení. Stačí ukázat uzavřenost a že $\mathcal{D}(T)$ je celý prostor.

Příklad 2.41. Nechť $X = \{x \in C^2[a, b];\ x(a) = x'(a) = 0\}$, $Y = C[a, b]$, $p,\ q \in C[a, b]$,

$$T : x(t) \longmapsto x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t).$$

Oprtátor T uzavřený ($x_n \overset{C^2}{\to} x \Leftrightarrow x_n^{(i)}(t) \rightrightarrows x^{(i)}(t)$). Tedy T je spojitý a obor hodnot je celé Y. Pak podle věty o otevřeném zobrazení je T^{-1} také spojitý, tj. o spojitosti T^{-1} můžeme rozhodnout aniž jej explicitně spočítáme (což je samozřejmě možné pomocí Cauchyovy funkce počáteční úlohy).

Cvičení

1. Nechť $X = C^1[0, 1]$, $L = \{x \in C^1;\ x(0) = 0\}$. $Ax(t) = x'(t) + a(t)x(t),\ a \in C[0, 1]$. Rozhodněte, zda existuje A^{-1}. Pokud ano, rozhodněte zda je spojitý.
2. Nechť $A : X \to Y$ je uzavřený lineární operátor, $\mathcal{R}(A) = Y$ a existuje A^{-1}. Dokažte, že A^{-1} je spojitý.
3. Nechť $A,\ B : X \to Y$ jsou lineární, A je uzavřený, B je ohraničený a $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$. Dokažte, že $A + B$ je uzavřený.

Kapitola 3

Duální prostory a operátory

3.1 Duální prostor k prostoru funkcí a posloupností

Nejdříve začneme jedním obecným tvrzením.

Věta 3.1. *Je-li prostor X' separabilní, je i původní prostor X separabilní.*

Důkaz. Nechť $f_n \in X'$ je spočetná hustá podmnožina na jednotkové sféře

$$\{f \in X' : \|f\| = 1\}.$$

Vybereme $x_n \in X$ tak, že $\|x_n\| = 1$ a $|f_n(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ (takové x_n existuje, neboť $\|f_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1$). Označme

$$M = \overline{\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}} = \overline{\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Q}\}}.$$

Kdyby $X \setminus M \neq \emptyset$, pak existuje $x_0 \in X \setminus M$ a podle důsledku Hahn – Banachovy věty (Důsledek 2.27) existuje $F \in X'$ takový, že $\|F\| = 1$, $F(M) = 0$ a $F(x_0) = \|x_0\| > 0$. Pak $F(x_n) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a

$$\frac{3}{4} \leq |f_n(x_n)| \leq |f_n(x_n) - F(x_n)| + |F(x_n)|,$$

odtud

$$\frac{3}{4} \leq \|f_n - F\| \cdot \|x_n\| = \|f_n - F\|,$$

což dává spor s hustotou f_n na jednotkové sféře, tedy $X = M$ a $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}\{x_1, x_2, \ldots\}$ je hustá v X. ∎

Poznámka 3.2. Později ukážeme, že opačné tvrzení (tj, že ze separability X plyne separabilita duálního prostoru X') neplatí! Prostor l^1 je separabilní a jeho duál l^∞ není separabilní.

A) Duální prostor k prostoru l^p, $1 < p < \infty$.
Nechť $e_n = \{0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots\}$ a $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$. Pak x lze vyjádřit ve tvaru $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (prostor l^p je úplný, tedy můžeme sčítat nekonečné řady prvků v Banachově prostoru, viz Věta 1.20) a je-li $f \in (l^p)'$, pak

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) &= f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \left| f \text{ je spojitý}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \left| f \text{ je lineární}\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n). \end{aligned}$$

Označne $c_n = f(e_n)$. Pak $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$. Z Hölderovy nerovnosti plyne [1]

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{l^p},$$

kde q je konjugovaný exponent k p. tj., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tedy

$$\|c\|_{l^q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge \|f\|. \tag{3.1}$$

Nyní ukážeme, že platí rovnost $\|f\| = \|c\|_{l^q}$. Položme

$$x^n = \{x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots\} = \{|c_1|^{q-1}\operatorname{sgn} c_1, \dots, |c_n|^{q-1}\operatorname{sgn} c_n, 0, 0, \dots\}.$$

Pak $|f(x_n)| = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^q$. Současně

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q = |f(x_n)| \le \|f\| \cdot \|x_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

tj.,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

a tedy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \le \|f\| \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \|c\|_{l^q} \le \|f\|$$

To spolu s (3.1) dává $\|f\| = \|c\|_q$. Celkem $(l^p)' \sim l^q$, kde ztotožnění (lineární izometrie) je taková, že funkcionálu

$$f \in (l^p)' \longmapsto \{f(e_k)\} \in l^q.$$

B) Duální prostor k l^1.
Označme e_n, x, c_n stejně jako výše. Pak

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k x_k| \le \max_{k\in\mathbb{N}}\{|c_k|\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|c\|_{l^\infty} \|x\|_{l^1},$$

odtud $\|f\| \leq \|c\|_{l^\infty}$. Nyní vhodně vezmeme x, abychom dokázali opačnou nerovnost. Položme

$$x^n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots\} = \{0, \ldots, 0, \operatorname{sgn} c_n^{\swarrow n\text{-tý}}, 0, \ldots\}.$$

Pak $|f(x_n)| = c_n \mathrm{sgn} c_n = |c_n|$ a současně

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x^n\|_{l^1} = \|f\|,$$

tedy $\|f\| \geq |c_n|$ pro $\forall n$. Odtud $\|f\| \geq \sup\limits_n |c_n| = \|c\|_{l^\infty}$. Celkem, $\|f\| = \|c\|_{l^\infty}$. Podobně jako v případě $1 < p < \infty$,

$$f \in (l^1)' \longmapsto \{f(e_k)\} \in l^\infty.$$

Poznámka 3.3. Prostor l^1 není duální k prostoru l^∞, platí pouze vlastní inkluze $(l^\infty)' \supset l^1$, tj. kromě funkcionálů tvaru $x \mapsto \sum x_k c_k$, kde $c = \{c_k\} \in l^1$ jsou možné ještě obecnější funkcionály (např. tzv. Banachovy limity, viz [12]). Důvod je ten, že l^1 je separabilní a l^∞ není separabilní. Kdybychom chtěli zopakovat konstrukci z předchozích dvou případů, „ztroskotáme“ na skutečnosti, že v normě prostoru l^∞ není množina $\operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ hustá v l^∞ (uvažte, že pro $x = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ je pro $\forall n \in \mathbb{N}$ vzdálenost $\varrho(x, \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}) = 1$).

C) Duální prostor k $\mathcal{L}^p(0,1)$. Provedeme „spojitou“ modifikaci postupu použitého pro l^p. Nechť $f \in (\mathcal{L}^p)'$ a pro libovolné $t \in [0,1]$ ozančme

$$u_t = u_t(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s < t, \\ 0, & t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

a položme $g(t) = f(u_t)$. Ukážeme, že g je absolutně spojitá funkce (tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každý po dvou disjunktní systém $(t_i, t_i + h_i)$ takový, že $\sum\limits_{i=1}^n h_i < \delta$ platí $\sum\limits_{i=1}^n |g(t_i + h_i) - g(t_i)| < \varepsilon$). Pro libovolný systém $(t_i, t_i + h_i)$ v intervalu $[0,1]$ ozančme $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(g(t_i + h_i) - g(t_i))$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |g(t_i + h_i) - g(t_i)| &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [g(t_i + h_i) - g(t_i)] = \\
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(u_{t_i + h_i} - f(u_{t_i}) = \\
&= f\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i + h_i} - u_{t_i})\right) \leq \\
&\leq \|f\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i + h_i} - u_{t_i}) \right\|_{\mathcal{L}^p} = \\
&= \|f\| \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i + h_i}(s) - u_{t_i}(s)) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \|f\| \cdot \left(\sum_{i-1}^n \int_{t_i}^{t_i + h_i} ds \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \|f\| \cdot \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tedy g je opravdu absolutně spojitá, tj. existuje skoro všude $g'(t) = \alpha(t)$ a $g(t)-g(0) = \int\limits_0^t \alpha(s)ds$, viz [10]. Evidentně $g(0) = f(u_0) = 0$, tedy $g(t) = \int\limits_0^t \alpha(s)ds$. Odtud

$$f(u_t) = g(t) = \int_0^t \alpha(s)ds = \int_0^1 u_t(s)\alpha(s)ds.$$

Je-li z libovolná schodovitá funkce (nabývá pouze konečně mnoha hodnot, alternativní terminologie je jednoduchá funkce) pak z lze vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí u_t a pak

$$f(z) = \int\limits_0^1 z(s)\alpha(s)ds.$$

Dále, libovolnou omezenou a měřitelnou funkci lze vyjádřit (skoro všude na daném intervalu) jako limitu schodovitých funkcí ([6]), tedy existuje posloupnost schodovitých funkcí $z_n \to x$ skoro všude na $[0, 1]$, pak

$$\left[\int\limits_0^1 |z_n(s) - x(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

pak i $z_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} x$. Odtud

$$f(x) = \lim f(z_n) = \lim \int\limits_0^1 z_n(s)\alpha(s)ds = \int\limits_0^1 \lim z_n(s)\alpha(s)ds = \int\limits_0^1 x(s)\alpha(s)ds.$$

Nakonec, je-li $x(s) \in \mathcal{L}^p$ libovolné, pak existuje posloupnost $x_n(s)$, jež je omezená a měřitelná taková, že $x_n(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} x(s)$, tj. $\int\limits_0^1 |x_n(s) - x(s)|^p ds \to 0$. Tedy stejně jako předtím, pro všechna $x \in \mathcal{L}^p$

$$f(x) = \int_0^1 x(s)\alpha(s)ds.$$

Nechť $x \in \mathcal{L}^p$, z Hölderovy nerovnosti v integrálním tvaru

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(s)||\alpha(s)|ds \leq \left(\int_0^1 |\alpha(s)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |x(s)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |\alpha(s)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\mathcal{L}^p}$$

plyne $\|f\| \leq \left(\int\limits_0^1 |\alpha|^q\right)^{\frac{1}{p}}$. Tedy, je-li $\alpha \in \mathcal{L}^q$, je $f \in (\mathcal{L}^p)'$. Ukážeme, že $\|f\| \geq \|\alpha\|_{l^q}$.
Uvažujme posloupnost funkcí

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}\alpha(t), & \text{je-li } |\alpha(t)| \leq n, \\ 0, & \text{je-li } |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Pak x_n jsou omezené, měřitelné a

$$|f(x_n)| = \left|\int\limits_0^1 x_n(s)\alpha(s)ds\right| \geq \int\limits_0^1 |x_n(t)||x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 |x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}dt = \int\limits_0^1 |x_n(t)|^p dt.$$

Odtud

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \leq \|f\| \|x_n\|_{l^p} \leq \|f\| \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

tedy

$$\left(\int_0^1 |x_n|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |x_n|^p \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Limitním přechodem $n \to \infty$

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^{(q-1)p} dt \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Celkem tedy $\|f\| = \|\alpha(t)\|_{l^q}$, což znamená $(\mathcal{L}^p)' = \mathcal{L}^q$. Funkcionálu $f \in (\mathcal{L}^p)'$ je přiřazena funkce $g(t) = f(u_t)$, pro níž platí $\alpha(t) = g'(t)$ skoro všude na $[0, 1]$ a funkcionál je pak tvaru

$$f(x) = \int_0^1 x(s)\alpha(s) \, ds.$$

D) Duál k $\mathcal{L}^1(0, 1)$ je $\mathcal{L}^\infty(0, 1)$ (ale ne naopak – separabilita). Konstrukce se provede podobně jako v případě prostoru $\mathcal{L}^p$, $1 < p < \infty$.

Poznámka 3.4. Poznamenejme zde něco málo o Riemannově–Stieltjesově integrálu, které využijeme v následujícím příkladu.
Riemannův–Stieltjesův integrál: Nechť g je funkce s ohraničenou variací a f je ohraničená, $D \equiv \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ je dělení intervalu $[0, 1]$, $\xi_i \in [t_i, t_{i-1}]$. Utvořme součty:

$$s(f; g, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad S(f; g, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(g(t_i) - g(t_{i-1})),$$

kde

$$m_i = \inf_{[t_i, t_{i-1}]} f(t), \quad M_i = \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f(t)$$

a integrální součet

$$\mathcal{S}(f; g, D, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

Dále postupujeme jako v Riemannově integrálu. Je-li f spojitá, pak je integrovatelná v Riemannově – Stieltjesově smyslu, dolní integrál je roven hornímu integrálu a je roven limitě integrálních součtů (pro nulovou posloupnost dělení) nezávisle na výběru reprezentantů. Konečná variace je potřeba, aby například pro konstaní funkce $f \equiv 1$ suma $\sum(g(t_i) - g(t_{i-1}))$ konvergovala, což je zaručeno, když $\sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \bigvee_0^1(g) < \infty$. Je-li $g(t) \equiv t$, pak se samozřejmě Riemannův–Stieltjesův integrál redukuje na Riemannův integrál.

E) Duální prostor k prostoru $C[0,1]$.
Nechť $f \in (C[0,1])'$, u_t, $g(t)$ jsou stejné jako u $\mathcal{L}^p$. Místo f vezmeme F – rozšíření f na $B[0,1]$ – ohraničené funkce). Ukážeme, že g má ohraničenou variaci na $[0,1]$. Nechť $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ je libovolné dělení. Položme $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}[g(t_i) - g(t_{i-1})]$. Pak pro rozšíření F funkcionálu f na $B[0,1]$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[g(t_i) - g(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}})] =$$
$$= F\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right] \le \|F\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right\| \le \|f\|,$$

tedy $g \in BV[0,1]$. Nechť nyní $x \in C[0,1]$ libovolné, $t_0 = a,\ t_1 = \frac{1}{n}, \ldots, t_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ t_n = 1$. Položme

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[u_{\frac{k}{n}}(t) - u_{\frac{k-1}{n}}(t)\right],$$

funkce z_n je schodovitá a tedy

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} F(z_n) = \int\limits_0^1 x(t)dg(t)dt$. Z druhé strany $z_n(t) \rightrightarrows x(t)$, odtud

$$F(z_n) \overset{\text{spoj.}}{\longrightarrow} F(x) \Rightarrow F(x) = \int\limits_0^1 x(t)dg(t)dt.$$

Pro spojité funkce $F = f$, tedy

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t)dt.$$

Naopak je zřejmé, že f definováno výše je lineární funkcionál na $C[0,1]$ a pro jeho normu platí

$$|f(x)| \le \left|\int_0^1 x(t)dg(t)\right| \le \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \int_0^1 |dg(t)| = \|x\|_{C[0,1]} \bigvee_0^1(g),$$

tedy $\|f\| \le \bigvee\limits_0^1(g)$.
Protože rozšíření F není jediné, ani reprezentující funkce g, není funkcionál f určen jednoznačně. Lze dokázat, že mezi všemi reprezentujícími funkcemi existuje *jediná*, která je *zprava spojitá*, tj. $\forall t \in [0,1]$ je $g(t+0) = g(t)$ a $g(0) = 0$.
Shrnutí: Jestliže v $BV[0,1]$ ztotožníme funkce, které se v bodech spojitosti liší jen o konstantu, pak můžeme psát $(C[0,1])' = BV[0,1]$.

F) Obecný tvar lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru. Nechť $f \in H'$ je libovolný. Označme $L = \{x \in H;\ f(x) = 0\}$, tj. L je uzavřený lineární podprostor v H. Nechť $L^\perp$ je jeho ortogonální doplněk a nechť $x \notin L$ a $x_0 \in L^\perp$ je projekce x na $L^\perp$. Pak $f(x_0) = \alpha \neq 0$ (kdyby $\alpha = 0$, pak $x_0 \in L$ i $x_0 \in L^\perp \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x \in L$, což dává spor). Položme $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$, tedy $f(x_1) = 1$. Nechť nyní $x \in H$ je libovolné a $f(x) = \beta$. Pak

$$0 = f(x) - \beta f(x_1) = f(x - \beta x_1) \Rightarrow x - \beta x_1 \in L$$

odtud $x = \beta x_1 + z$, kde $x_1 \in L^\perp$, $z \in L$. Tedy $H = L \oplus \mathrm{Lin}\{x_1\}$. Protože $x_1 \perp L$, pro $\forall x \in X$ je

$$\langle x, x_1 \rangle = \langle \beta x_1 + z, x_1 \rangle = \beta \|x_1\|^2 = f(x)\|x_1\|^2,$$

tedy

$$f(x) = \frac{1}{\|x_1\|^2}\langle x, x_1 \rangle = \left\langle x, \frac{x_1}{\|x_1\|^2} \right\rangle .$$

Označíme-li $u = \frac{x_1}{\|x_1\|^2}$, je $f(x) = \langle x, u \rangle$ pro $\forall x \in X$. Ukážeme, že u je přiřazeno funkcionálu f jednoznačně. Je-li $f(x) = \langle x, v \rangle$ $\forall x \in X$, pak $0 = \langle x, u - v \rangle$ pro $\forall x \in X$, pak i pro $x = u - v \Rightarrow u = v$. Podobně dokážeme, že $\|f\| = \|u\|$, a to takto

$$|f(x)| = |\langle x, u \rangle| \leq \|x\| \cdot \|u\|$$

odtud $\|f\| \leq \|u\|$ pro $x = u$ dostáváme

$$|f(u)| = \|u\|^2 = \|u\| \cdot \|u\| \leq \|f\| \cdot \|u\|$$

odtud plyne opačná nerovnost $\|f\| \geq \|u\|$. Celkem $\|f\| = \|u\|$.

Poznámka 3.5. S právě dokázaným výsledkem je v souladu skutečnost, že $(l^2)' = l^2$, tj. každý prvek $(l^2)'$ můžeme reprezentovat pomocí $y \in l^2$, tj. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \langle x, y \rangle$, neboť z rovnoběžníkového pravidla norma v l^2 pochází ze skalárního součinu.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda platí: $(c_0)' = l^1$; $(c)' = l^1$.
2. Rozhodněte, zda c_0, resp. c jsou separabilní.
3. Nechť X je NLP, $f \in X'$. Určete Codim Ker(f), Ker$(f) = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$.
4. Nechť $X = C[0,1],\ L = \left\{ x \in X : \ \int\limits_0^1 x(t)dt \right\}$.
   1. Dokažte, že L je uzavřený podprostor a najděte $f \in X' : \ L = \mathrm{Ker}(f)$.
   2. Ukažte, že pro $x \notin L$ neexistuje $y \in L : \ \varrho(x, L) = \|x - y\|$.

3.2 Reflexivita a slabá konvergence

Definice 3.6. Nechť X je NLP, X' je jeho duál a nechť $X'' = (X')'$ je duální prostor k prostoru X'. Prostor X'' se nazývá *druhý duální prostor* k prostoru X.

Nechť x je pevný prvek z X a $f \in X'$ je libovolný. Pak tomuto funkcionálu přiřadíme číslo $f(x)$. Tím je definováno lineární zobrazení z X' do $\mathbb{R}$. Platí $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, tedy zobrazení $f \longmapsto f(x)$ je spojité lineární zobrazení z X' do $\mathbb{R}$, můžeme jej tedy chápat jako prvek prostoru X'', tj. funkcionál na X'. Tento funcionál označíme J_x, tj., $J_x(f) = f(x)$. Z nerovnosti

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

plyne $\|J_x\| \leq \|x\|$. Z druhé strany, k libovolnému $x \in X$ existuje $f_0 \in X'$ a $\|f_0\| = 1$ takové, že $|f_0(x)| = \|x\|$ a pro tento funkcionál platí

$$\big|J_x(f_0)\big| = |f(x_0)| = \|x\| = \|x\|\|f_0\|,$$

odtud $\|J_x\| \geq \|x\|$, celkem $\|J_x\| = \|x\|$. Zobrazení $J : X \to X''$ je lineární izometrie. Toto zobrazení se nazývá *kanonické vnoření* prostoru X do prostoru X''.

Definice 3.7. Jestliže platí $J(X) = X''$, tj. zobrazení J je surjekce, prostor X nazveme *reflexivní*.

Příklad 3.8. (i) Prostory l^p, $\mathcal{L}^p(a,b)$ pro $1 < p < \infty$ jsou reflexivní, neboť $(l^p)' = l^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $(l^q)' = l^p$, tedy $(l^p)'' = l^p$. Úplně stejně se dokáže, že $(\mathcal{L}^p(a,b))'' = \mathcal{L}^p(a,b)$.
(ii) Prostory l^1 a $\mathcal{L}^1(a,b)$ nejsou reflexivní, neboť $(l^1)' = l^\infty$, ale $(l^\infty)' \supset l^1$. Podobně je tomu pro prostor $\mathcal{L}^1(a,b)$.
(iii) Prostor $C[0,1]$ není reflexivní. Toto tvrzení dokážeme takto. Předpokládejme, sporem, že $C[0,1]$ je reflexivní. Pak libovolný spojitý lineární funkcionál na $BV[a,b]$ je tvaru

$$F_x(f) = f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t),$$

kde $g \in BV[a,b]$. Uvažujme nyní funkcionál

$$\tilde{F}(f) = \lim_{h \to 0+} [f(t_0 + h) - f(t_0 - h)],$$

kde $t_0 \in (0,1)$ je pevně zvolený bod. Evidentně, $\tilde{F}$ je aditivní a homogenní a

$$|\tilde{F}(f)| = |f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)| \leq \bigvee_0^1 (f) = \|f\|.$$

Zde jsme použili obvyklé označení $f(t_0 \pm 0)$ pro jednostranné limity funkce f v bodě t_0. Protože $\tilde{F} \neq 0$, to plyne z toho, že $\tilde{F}(f_1) \neq 0$ pro funkci f definovanou předpisem

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Podle našeho předpokladu $(C[0,1])'' = C[0,1]$, existuje $x_0 \in C[0,1]$ takové, že

$$\tilde{F}(f) = \int_0^1 x_0(t)df(t).$$

Uvažujme funkci $f_0(t) = \int_0^t x_0(s)\,ds$. Proto tuto funkci platí $\tilde{F}(f_0) = 0$, neboť f_0 je spojitá. Z druhé strany, $\tilde{F} \neq 0$ implikuje $x_0(t) \not\equiv 0$ a tedy

$$\tilde{F}(f_0) = \int_0^1 x_0(s)df_0(s) = \int_0^1 x_0^2(s)\,ds > 0,$$

což je spor, tedy funkcionál $\tilde{F}$ není tvaru $\tilde{F} = F_{x_0}$ pro žádné $x_0 \in C[0,1]$, tj. $C[0,1]$ je *vlastní* podprostor v $\big(BV[a,b]\big)'$.

Definice 3.9. Nechť X je NLP a $x_n \in X$. Řekneme, že posloupnost x_n konverguje *slabě*, píšeme $x_n \rightharpoonup x$, jestliže $f(x_n) \to f(x)$ pro $\forall f \in X'$. Nechť $f_n \in X'$, řekneme, že tato posloupnost konverguje $*$-slabě k $f \in X'$, píšeme $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, jestliže $f_n(x) \to f(x)$ pro $\forall x \in X$

Poznámka 3.10. (i) V prostoru konečné dimeze slabá konvergence je totéž co silná konvergence, neboť obě konvergence se redukují na konvergenci po složkách posloupnosti prvků z $\mathbb{R}^n$.

(ii) V předchozí kapitole jsem definovali slabou (= bodovou) konvegenci posloupnosti operátorů $A_n \in \mathcal{L}[X,Y]$. Tato konvergence aplikovaná na případ $Y = \mathbb{R}$, tj. pro $f_n \in X'$ tato konvergence znamená $*$-slabou konvergenci.
(iii) Jeli $f_n \rightharpoonup f$ v X', tj. pro $\forall F \in X''$ paltí $F(f_n) \to F(f)$. Pak vzhledem ke kanonickému vnoření $X \subseteq X''$, platí $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
(iv) Platí $x_n \to x$ v normě prostoru X, tj., $\|x_n - x\| \to 0 \implies x_n \rightharpoonup x$. Vskutku, pro libovolný funkcionál $f \in X'$

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \, \|x_n - x\| \to 0$$

pro $n \to \infty$.
(v) Ze slabé konvergence neplyne konvergence v normě. Uvažujme $X = l^2$ a posloupnost prvků „kanonické báze“ $e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \}$ kde 1 je na n-tém místě. Protože $(l^2)' = l^2$, každý spojitý funkcionál f na l^2 je tvaru $f(x) = \langle x, a \rangle$ pro nějaké $a = \{a_n\} \in l^2$. Platí

$$f(e_n) = \langle e_n, a \rangle = a_n \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty$$

neboť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ a z nutné podmínky konvergence $a_n \to 0$. Na druhé straně, pro libovolnou dvojici $n \neq m$ platí $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, tedy posloupnost e_n není cauchyovská proto nemůže být konvergentní.

Jako důsledky Banach-Steinhausovy a Hahn-Banachovy věty dostáváme následující vlastnosti slabě konvergentních posloupností.

Věta 3.11. (i) *Každá slabě konvergentní posloupnost je ohraničená.*
(ii) *Každá posloupnost má nejvýše jednu slabou limitu.*
(iii) *Jestliže $x_n \rightharpoonup x$, pak pro každou vybranou podposloupnost x_{n_k} také $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*
(iv) *Posloupnost $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0 \in X' \iff$*

(i) *Posloupnost $\{\|f_n\|\}$ je ohraničená;*

(ii) *Existuje množina $M \subset X$ s $\overline{\operatorname{Lin} M} = X$ taková, že $f_n(x) \to f_0(x)$ pro $\forall x \in M$.*

Důkaz. (i) Nechť $x_n \rightharpoonup x$. Prvky této posloupnosti můžeme považovat za prvky X'', které prvku $f \in X'$ přiřadí reálné číslo $f(x_n)$ a norma tohoto funkcionálu na X' je rovna $\|x_n\|$. Každá posloupnost $f(x_n)$ je konvergentní a tedy ohraničená. Podle Věty 2.18 je ohraničená i posloupnost norem operátorů, tj. v našem případě posloupnost $\|x_n\|$.
(ii) Kdyby $x_n \rightharpoonup \hat{x}$ a $x_n \rightharpoonup \tilde{x}$, $\hat{x} \neq \tilde{x}$, podle Věty 2.26 existuje $f \in X'$ takové, že $f(\hat{x}) \neq f(\tilde{x})$. Pak posloupnost reálných čísel $f(x_n)$ má dvě různé limity, což je spor.
(iii) Dokáže se stejně jako pro posloupnosti reálných čísel, viz [2, str. 23].
(iv) Plyne z Poznámky 2.19. ∎

Věta 3.12. *Nechť X, Y jsou NLP, $A \in \mathcal{L}[X,Y]$. Jestliže $x \rightharpoonup x_0$, pak $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$.*

Důkaz. Nechť $\varphi \in X'$ je libovolný. Pak funkcionál f definovaný předpisem $f(x) = \varphi(Ax)$ je spojitý, tj. $f \in X'$. Protože $x_n \rightharpoonup x$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$, tj., $\varphi(Ax_n) \to \varphi(Ax_0)$. Funkcionál $\varphi \in X'$ byl libovolný, tj. $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$. ∎

Následující tvrzení se často používá ve variačním počtu a dalších oblastech aplikací funkcionální analýzy.

Věta 3.13. *Nechť X je NLP. Pak norma je slabě zdola polospojitý funcionál na X, tj.,*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x_0\|.$$

Důkaz. Sporem, je-li $\liminf \|x_n\| < \|x_0\|$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že stále $\liminf \|x_n\| < \|x_0\| - \varepsilon$. To implikuje, že existuje podposloupnost x_{n_k} taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| < \|x_0\| - \varepsilon.$$

Z Hahn-Banachovy věty plyne, že existuje $f \in X'$ takový, že $\|f\| = 1$ a $f(x_0) = \|x_0\|$. Pak

$$f(x_{n_k}) \leq \|f\| \cdot \|x_{n_k}| = \|x_{n_k}\| < \|x_0\| - \varepsilon$$

pro k dostatečně velká. Současně ale $f(x_{n_k}) \to f(x_0) = \|x_0\|$ – spor. ∎

Nyní uvedeme bez důkazu dve tvrzení, které však hrají důležítou roli v aplikacích

Věta 3.14. (Milmanova-Pettisova věta). *Banachův prostor X je reflexivní, pokud je jednotková koule $B(0;1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ je rovnonoměrně konvexní, tj. ke $\forall \varepsilon \in (0,2)$ $\exists \delta > 0$ takové, že pro*

$$\forall x, y \in \partial B(0;1) = S(0;1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}, \quad \|x - y\| > \delta$$

platí

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \varepsilon$$

Důkaz. Viz [15, str. 127]. Nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$ ilustrující, že l^1 a l^∞ nejsou reflexivní a naopak l^p, $1 < p < \infty$ jsou reflexivní. ∎

Věta 3.15. (Eberleinova-Šmuljanova věta). *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost, tj. každá uzavřená a ohraničená množina je slabě kompaktní.*

Důkaz. Viz [15, str. 127]. ∎

Na závěr tohoto odstavce uvedeme tvrzení o slabé konvergenci v prostorech funkcí a posloupností.

Věta 3.16. *Posloupnost $\{x^{[n]}\} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^\infty \in l^p$, $1 < p < \infty$ konverguje slabě k $x^{[0]} = \{x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots,\}$, právě když*

(i) Posloupnost $\{\|x^{[n]}\|\}$ je ohraničená;

(ii) Platí $\lim_{n\to\infty} x_k^{[n]} = x_k^{[0]}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tedy posloupnost $x^{[n]} \rightharpoonup x^{[0]}$ právě když je ohraničená a po složkách konverguje k $x^{[0]}$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ triviálně plyne z definice slabé konvergence a části (i) Věty 3.11. Implikace $\Leftarrow$ plyne z Poznámky 2.19.
Předpoklad (ii) znamená, že pro $e_k = \{0, \dots, 0, 1, 0 \dots\} \in l^q$ a odpovídající funkcionály f_k, tj.

$$f_j(e_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & j \neq j, \end{cases}$$

platí $f_k(x^{[n]}) = x_k^{[n]} \to f_k(x^{[0]}) = x_k^{[0]}$. Stačí tedy ukázat, že $\overline{\mathrm{Lin}\,\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}} = l^q$. Je-li $x = \{x_1, \dots, x_k, \dots\} \in l^q$ libovolná, pak

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^q\right) \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right\|_{l^q} \to 0$$

pro $n \to \infty$, tedy opravdu $x \in \overline{\mathrm{Lin}\,\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}}$. ■

O slabé konvergenci v l^1 vypovídá následující tvrzení, které bývá v literatuře referováno jako Schurova věta.

Věta 3.17. *V prostoru l^1 jsou slabá konvergence a konvergence v normě ekvivalentní, tj. $x_n \rightharpoonup x \iff \|x_n - x\| \to 0$.*

Důkaz. Kdyby tvrzení neplatilo, našli bychom posloupnost $\{x^n\} \in l^1$, $x^n = \{x_1^n, x_2^n \dots, x_k^n, \dots\}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\|x_n\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n| > 5\varepsilon$$

a $\varphi(x^n) \to 0$ pro $\forall \varphi \in (l_p)' = l^\infty$. Uvažujme funkcionály $\varphi_k \in (l^1)'$, kterým odpovídá posloupnost $e_k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, kde 1 je na k-tém míste. Aplikací těchto funcionálů na posloupnost x^n dostáváme, že pro $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} x_k^n = 0$. Dále sestrojíme indukcí dvě posloupnosti $1 < n_1 < n_2 < \dots$ a $1 < m_1 < m_2 < \dots$ takto: n_1 bude nejmenší ze všech čísel $n > 1$ a m_1 bude nejmenší ze všech čísel $m > 1$, pro něž

$$|x_1^{n_1}| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{j=m_1}^{\infty} |x_j^{n_1}| < \varepsilon.$$

Dále, n_2 je nejmenší $n > n_1$, pro něž

$$\sum_{j=1}^{m_1} |x_j^{n_2}| < \varepsilon$$

m_2 je nejmenší $m > m_1$, pro něž

$$\sum_{j=m_2}^{\infty} |x_j^{n_2}| < \varepsilon.$$

Takto pokračujeme dále. Nyní zvolíme speciální funcionál φ reprezentovný posloupností $a = \{a_1, a_2 \dots, a_k, \dots\} \in l^\infty$, a to tak, aby

$$a_j = \operatorname{sgn} x_j^{n_k} \quad \text{pro} \quad m_{k-1} \le j \le m_k,$$

Abychom dostali spor, stačí provést následující odhad. Pro $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^{n_k}\right| - \left|\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{n_k}|\right| \le 2 \sum_{j=1}^{m_k - 1} |x_j^{n_k}| + 2 \sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{n_k}| < 4\varepsilon.$$

Vidíme tedy, že

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^{n_k}\right| \ge \varepsilon$$

pro $\forall k \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s $\varphi(x_{n_k}) \to 0$. ■

Poznámka 3.18. Předchozí věta muže být využita k alternativnímu důkazu, že prostor l^1 není reflexivní, tj. duál k l^∞ není l^1. Vskutku, pokud v reflexivním prostoru splývá slabá konvergence s konvergencí v normě, podle Eberlejnovi-Šmuljanovy věty musí být jednotková koule kompaktní, tedy prostor je konečně dimenzionální - spor.

Spojitou analogií Věty 3.16 je následujcí tvrzení.

Věta 3.19. *Posloupnost $x_n \in \mathcal{L}^p(a,b)$, $1 < p < \infty$ konverguje slabě k funkci $x_0 \in \mathcal{L}^p(a,b)$, právě když*

(i) *Posloupnost norem $\|x_n\| = \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ je ohraničená;*

(ii) *Pro každé $t \in [0,1]$ platí*

$$\int_0^t x_n(s)\,ds \to \int_0^t x_0(s)\,ds.$$

Důkaz. Uvažujme funkce

$$a_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 \le t \le \tau, \\ 0 & \text{pro } \tau < t \le 1. \end{cases}$$

Funkce a_τ jsou stupňovité a tyto funkce toho typu jsou husté v $\mathcal{L}^q(0,1)$, $1 < q < \infty$. Tvrzení pak plyne z Poznámky 2.19. ■

Cvičení

(i) Nechť v NLP X platí $x_n \rightharpoonup x$ a posloupnost x_n obsahuje konvergentní podpoloupnost. Rozhodněte, zda $x_n \to x$ v normě prostoru X.

(ii) Nechť posloupnost spojitých funkcí f_n konverguje na $[a,b]$ *bodově* ke spojité funkci f. Rozhodnněte, zda $f_n \rightharpoonup f$. Platí opačná implikace: $f_n \rightharpoonup f \implies f_n \to f$ bodově na $[a,b]$?

3.3 Duální a adjungované operátory

Nechť X, Y jsou NLP, X', Y' jsou jejich duály. Nechť $\mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ je lineární operátor (ne nutně spojitý) s definičním oborem $\mathcal{D}(A)$ hustým v X. Pro libovolné $\varphi \in Y'$ je předpisem $x \longmapsto \varphi(Ax)$ definován lineární funcionál (ne nutně spojitý) na X, označme jej f. Dále označme

$$D' = \{\varphi \in Y' : \varphi \circ A \in X'\},$$

tj., D' je množina těch φ, pro něž je funkcionál f spojitý. Tím je definováno zobrazení $A' : D' \subset Y' \to X'$, které nazýváme *duální operátor* k operátoru A. Tedy

$$A'\varphi(x) = \varphi(Ax) \quad \text{pro } \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Poznámka 3.20. (i) Protože definiční obor $\mathcal{D}(A)$ je hustý v X, je adjungovaný operátor A' definován jednoznačně. Vskutku, předpisem $f = \varphi \circ A$ jsou definovány hodnoty f pro $x \in \mathcal{D}(A)$. Je-li současně funkcionál g definován vztahem $g(x) = \varphi(Ax)$, pak $f(x) - g(x) = (f-g)(x) = 0$ pro $x \in \mathcal{D}(A)$. V bodech $\xi \notin \mathcal{D}(A)$ postupujeme takto. Existuje $x_n \in \mathcal{D}(A)$ taková, že $x_n \to \xi$ (připomeňme, že $\mathcal{D}(A)$ je hustý v X), pak definujeme $f(\xi) := \lim f(x_n)$. Pak pro takto definované rozšíření funcionálů f, g platí $(f-g)(\xi) = 0$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} (f-g)(x_n) = 0,$$

pak $(f-g)(x) = 0$ pro $\forall x \in X$, tj. $f = g$.

(ii) Je-li $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, Zobrazení A je definováno $m \times n$ maticí, kterou opět označíme A, tj. $A : x \longmapsto Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ chápeme jako sloupcový vektor. Pak každá lineární forma $\varphi \in Y' = \mathbb{R}^m$ je tvaru $\varphi(y) = \langle y, b\rangle_m$, funkcionál $f \in X' = \mathbb{R}^n$ je tvaru $\langle x, a\rangle_n$. Pak z lineární algebry

$$f(x) = \langle Ax, b\rangle_m = \langle x, A^T b\rangle_n,$$

tj., duální operátor je reprezentován transponovonou maticí (konjugovanou transponovanou $A^* = \overline{A^T}$ v komplexním případě).

(iii) Je-li $A \in \mathcal{L}[X, Y]$, tj. A je spojitý, pak $D' = Y'$ neboť

$$|f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

pro $\forall \varphi \in Y'$.

Věta 3.21. *Je-li $A \in \mathcal{L}[a, b]$, Pak platí $\|A\| = \|A'\|$.*

Důkaz. Z definice operátoru A' plyne, že $\forall \varphi \in Y'$ a $\forall x \in X$ platí

$$|(A'\varphi)(x)| = |\varphi(Ax) \leq \|\varphi\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

odtud $\|A'\varphi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\|$, tj., $\|A'\| \leq \|A\|$. Nechť $x_0 \in X$ je libovolné. Podle důsledku Hahn-Banachovy věty $\exists \varphi \in Y'$ takové, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi(Ax_0) = \|Ax_0\|$. Odtud

$$|\varphi(Ax_0)| = |(A'\varphi)(x_0) \leq \|A'\varphi\| \cdot \|x_0\| \leq \|A'\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x_0\|,$$

tj. $\|A\| \leq \|A'\|$. Celkem $\|A\| = \|A'\|$. ∎

V dalším výkladu se zaměříme na speciální případ, kdy $X = H$ je Hilbertův prostor. Nechť $A : H \to H$ je lineární operátor s $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Pak $A' : H' \to H'$. Protože prostor H' můžeme ztotožnit s H, lze se na duální operátor dívat jako na operátor z H do H a většinou se tento operátor značí A^* (místo A') a nazývá se *adjungovaný operátor*. Tedy adjungovaný operátor A^* je definován takto: Označme D^* množinu všech $y \in H$, pro něž je (lineární) funkcionál $x \longmapsto \langle Ax, y\rangle$ spojitý. Pak podle věty o reprezentaci spojitého lineárního funcionálu na Hilbertově prostoru (číst E) nad Poznámkou 3.5) existuje $z \in H$ takové, že

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle \quad \text{pro } \forall x \in D(A).$$

Klademe $z = A^*y$ a $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}^*$. Tedy

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \text{pro } \forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*).$$

Následující tvrzení ukazáje, že adjungovaný operátor má „obvyklé“ vlastnosti známé z lineární algebry (kde adjungovaný operátor je reprezentován transponovanou resp. konjugovanou transponovanou maticí).

Věta 3.22. *Předpokládejme, že k operátoru A existuje inverze A^{-1} a definiční obory obou těchto operátorů $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(A^{-1})$ jsou husté v H. Pak existuje inverze k adjungovanému opertátoru a platí $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Důkaz. Především poznamenejme, že $(A^{-1})^*$ je dobře definován, neboť $\overline{\mathcal{D}(^{-1})} = H$. Nechť $y \in \mathcal{D}\big((A^{-1})^*\big)$. Pro $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ platí

$$\langle x, y\rangle = \langle A^{-1}Ax, y\rangle = \langle Ax, (A^{-1})^* y\rangle.$$

To znamená, že $(A^{-1})^* y \in \mathcal{D}(A^*)$ a $A^*(A^{-1})^* y = y$. Analogicky, pro $\bar{x} \in \mathcal{D}(A^{-1})$, $\bar{y} \in \mathcal{D}(A^*)$ platí

$$\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle AA^{-1}\bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle A^{-1}\bar{x}, A^*\bar{y}\rangle = \langle \bar{x}, (A^{-1})^* A^*\bar{y}\rangle.$$

Odtud $A^*\bar{y} \in \mathcal{D}\big((A^{-1})^*\big)$ a $(A^{-1})^* A^* \bar{y} = \bar{y}$. Celkem jsem dokázali, že

$$A^*(A^{-1})^* = I, \quad (A^{-1})^* A^* = I,$$

tedy $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. ∎

Věta 3.23. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A \in \mathcal{L}[H]$. Označme* $\operatorname{Ker} A = \{x \in H : Ax = 0\}$. *Pak platí*

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp, \quad \overline{\mathcal{R}(A^*)} = (\operatorname{Ker} A)^\perp =, \quad (\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp = \operatorname{Ker} A^*, \quad \big(\mathcal{R}(A^*)\big)^\perp = \operatorname{Ker} A.$$

Důkaz. Dokážeme pouze první vztah, ostatní se dokážou analogicky. Rovnost množin dokážeme tak, že dokážeme dvě inkulze.

$\subseteq$: Nechť $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$. Pak existuje $y_n \in \mathcal{R}(A)$, $y_n \to y$ a $y_n = Ax_n$. Nechť $z \in \operatorname{Ker} A^*$ je libovolné, pak

$$\langle y_n, z\rangle = \langle Ax_n, z\rangle = \langle x_n, A^* z\rangle = 0,$$

odtud $\lim\langle y_n, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$, tj. $y \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$. Dokázali jsem že $\overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

$\supseteq$: Nechť $y \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$ a předpokládejme, že $y \notin \overline{\mathcal{R}(A)}$. Nechť $u \in (\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp$, $\|u\| = 1$. Pak $\langle u, y\rangle \neq 0$ a $\langle u, Ax\rangle = 0$ pro $\forall x \in H$. Odtud $\langle A^* u, x\rangle = 0$ pro $\forall x \in H$. To znamená, že $A^* u = 0$, tj. $u \in \operatorname{Ker} A^*$, což znamená, že $\langle u, y\rangle = 0$, spor. Tedy $(\operatorname{Ker} A^*)^\perp \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$. ∎

Poznámka 3.24. Je-li $X = \mathbb{R}^n$ předchozí věta je známé tvrzení z lineární algebry, a to že nehomogenní systém $Ax = y$ má řešení, právě když $\langle y, u\rangle = 0$ pro všechna řešení u rovnice $A^* u = 0$.

Cvičení

(i) Nechť $H = l^2$, $A\{x_k\} = \{x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots\}$,

$$\mathcal{D}(A) = \{x = \{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 < \infty\}.$$

  a) Dokažte, že $\overline{\mathcal{D}(A)} = l^2$;
  b) Rozhodněte, zda A je spojitý;
  c) Určete $\mathcal{D}(A^*)$ a A^*.

(ii) Nechť $J : H_0^1[0,1] \to \mathcal{L}^2(0,1)$ je definováno předpisem $Jx = x$, tj., vzhledem k inkluzi $H^1 \subset \mathcal{L}^2$ je to operátor vnoření H^1 do $\mathcal{L}^2$. Určete $J' : \mathcal{L}^2 \to H_1$. Na H^1 bereme skalární součin $\langle x, y\rangle = \int_0^1 [x'y' + xy]\, dt$.

(iii) Určete duální operátor A' k operátoru $A : H^1[0,1] \to \mathcal{L}^2(0,1)$ definovanému předpisem $Ax = x'$.

Kapitola 4

Kompaktní operátory a základy spektrální teorie

V této závěrečné kapitole textu se nejprve zaměříme na tzv. kompaktní operátory, které jsou v jistém smyslu "spojnicí" mezi spojitými lineárními operátory a operátory s konečně dimenzionálním oborem hodnot (zejména, operátory mezi prostory konečné dimenze). V druhém části se zaměříme na spektrální teorii, což je v jistém smyslu rozšíření do nekonečné dimenze vlastních hodnot a vektorů matic.

4.1 Kompaktní množiny v Banachových prostorech

V tomto odstavci uvedme některá kriteria kompaktnosti a relativní kompaktnosti v Banachových prostorech.

Definice 4.1. Nechť X je Banachův prostor. Řekneme, že množina $M \subseteq X$ je *relativně kompaktní* (alternativní terminologie je *prekompaktní*), jestliže její uzáver je kompaktní množina, tj. z každé posloupnosti bodů množiny $\overline{M}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v $\overline{M}$.

Z teorie metrických prostorů (viz [1, str. 60, Věta 6.14]) je známo toto tvrzení.

Věta 4.2. *Nechť X je Banachův prostor, $M \subseteq X$. Množina M je relativně kompatní, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-ová síť, tj. konečně prvková množina $K \subseteq M$ taková, že ke každému $y \in M$ existuje $x \in K$ takové, že $\|y - x\| < \varepsilon$.*

Dále připomeňme, že kompaktní množina je vždy uzavřená a ohraničená a opačná implikace platí právě když prostor má konečnou dimenzi.

Věta 4.3. (Ascoli-Arzelá). *Množina $M \subseteq C[a, b]$ je relativně kompaktní, právě když je rovnomocně spojitá (tj. ke $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ takové, že $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$, $|t_2 - t_1| < \delta$ a $\forall x \in M$ je $|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$) a ohraničená v normě $C[a, b]$ (tj., $\exists L > 0$ takové, že $\|x\| \leq L$ pro $\forall x \in M$).*

Důkaz. $\Rightarrow$: Ohraničenost M je zřejmá. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $x_1, \dots, x_k$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$ síť v M. Každá z funcí x_i je podle Heine-Cantorovy věty (viz [2, str. 186, Věta D.50]) stejnoměrně spojitá, tj. k $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists \delta_i > 0$ takové, že

$$|t_2 - t_1| < \delta_i \quad \Longrightarrow \quad |x_i(t_2) - x_i(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Položme $\delta = \min_{1\le i\le k} \delta_i$. Je-li $x \in M$ libovolné, $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$|x(t_2) - x(t_1)| \le |x(t_2) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x(t_1)| < \varepsilon,$$

protože z předchozích úvah plyne, že každý ze sčítanců je $< \frac{\varepsilon}{3}$.
$\Leftarrow$: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Z rovnomocné spojitosti systému funkcí z množiny M plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in M$ je $|t_2 - t_1| < \delta \implies |x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$. Vezměme libovolné dělení intervalu $[a, b]$ s normou $<$ než δ, označme jeho dělící body t_i. Dále, z ohraničenosti množiny M plyne existence konstanty $L > 0$ takové, že $|x(t)| \le L$ pro $\forall x \in M$. Rozdělme interval $[-L, L]$ dělícími body y_k tak, aby norma tohoto dělení byla menší než ε. Sestrojme vodorovné a svislé přímky procházející body t_i a y_k, tím získáme „opravdovou" síť v množine $[a, b] \times [-L, L]$. Nyní uvažujme třídu po částech afinních funkcí, jejichž grafy procházijí uzly této sítě a při přechodu od t_i k t_{i+1} se funkční hodnota změní nejvýše o jeden dílek na svislé ose. Pak není obtížné ukazát, že takto sestrojená konečná množina funkcí je ε-ová síť v M. ■

Věta 4.4. *Možina $M \subset l^p$, $1 \le p < \infty$ je kompaktní, právě když*

(i) *Množina M je omezená, tj. existuje $L \ge 0$ tak, že $\|x\| \le L$ pro $\forall x \in M$;*

(ii) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall x \in M$ platí

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p < \varepsilon.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$": Ohraničenost množiny je zřejmá. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a nechť $x^{[1]}, \dots, x^{[n]}$ je konečná $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}$-ová síť v M, tj. ke každému $x \in M$ existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $\|x - x^{[k]}\|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože každá z poslopností $x^{[k]} \in l^p$, $k = 1, \dots, n$, k $\frac{\varepsilon}{2}$ existuje n_k takové, že

$$\sum_{j=n_k+1}^{\infty} |x_j^{[k]}|^p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Označme $N = \max_{1\le k\le n} n_k$. Pak

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p \le \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j - x_j^{[k]}|^p + \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j^{[k]}|^p \le \|x - x^{[k]}\|^p + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$": Konečnou ε-ovou síť najdeme takto. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak podle (ii) existuje $N \in \mathbb{N}$ takové,

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad \text{pro } \forall x \in M.$$

Dále, podle (i) existuje $L \ge 0$ takové, že

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \le L.$$

Odtud $|x_j| \le L$ pro $\forall j \in N$. Nyní defunujeme množinu $\mathcal{K} \subset M$ tak, že prvky $\mathcal{K}$ jsou tvořeny posloupnostmi, pro něž $x_j = 0$ pro $j > N + 1$. Pokud jde o prvky x_j, $j = 1, \dots, N$ v této síti, stačí vytvořit $\frac{\varepsilon^p}{2}$-ovou síť pro N-tice čísel, z nichž každé je v absolutní hodnotě $\le L$. To je však kompaktní množina v $\mathbb{R}^N$, tedy taková síť určitě existuje. Celkem tedy prvky $x^{[k]} \in \mathcal{K}$ splňují pro $\forall x \in M$

$$\|x - x^{[k]}\|^p = \sum_{j=1}^{N} |x_j - x_j^{[k]}|^p + \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Tím je ukázáno, že $\mathcal{K}$ je ε-ová síť v M. ■

Podobně jako předchozí tvrzení se dokáže následující věta.

Věta 4.5. *Množina $M \subset \mathcal{L}^p(a,b)$ je relativně kompaktní, právě když*

(i) *Množina M je omezená.*

(ii) *Ke $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak,že pro $\forall h \in (0,\delta)$ a $\forall x \in M$ platí*

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|\, dt < \varepsilon.$$

V tomto vzorci je pro argumenty vně intevalu $[0,1]$ funkce rozšířena jako konstantní s hodnotou $x(1)$.

Příklad 4.6.

(i) Rozhodněte, zda prostor c_0 posloupností konvergujících k nule je kompaktní v l^∞.

Řešení. Není, neboť například posloupnost $x^{[n]}] = \{n, 0, 0, \dots\} \in c_0$, ale není ohraničená, tedy z ní nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Jiný příklad (ohranižené) posloupnosti, ze které nelze vybrat konvergentní podposloupnost je $x^{[n]} = \{1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, kde číslo 1 je na prvních n místech. Pro tuto poloupnost platí $\|x^{[n]} - x^{[m]}\|_{l^\infty} = 1$ pro $m \neq n$, tedy z ní nelze vybrat konvergentní podposloupnost. ▲

(ii) Rozhodněte, kdy je „elipsoid“

$$\mathcal{E} = \left\{ x = \{x_k\} \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\lambda_n} \right\}$$

Kompaktní množina v l^2.

Řešení. Hledanou podmínkou je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Vskutku, předpokladejme nejprve, že tato podminka neplatí, tj. existuje podposloupnost $\lambda_{n_k} \to A \neq 0$. Předpokládejme, že $A > 0$, případ $A < 0$ je analogický. K $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ existuje $K \in \mathbb{N}$ takové, že pro $k \geq K$ je $\lambda_{n_k} > A - \varepsilon = \frac{A}{2}$. Definujme posloupnost $x^{[k]} = \{x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, \}$ takto:

$$x^{[k]} = \{0, \dots, 0, \lambda_{n_k}, 0, \dots\},$$

kde číslo λ_{n_k} je na n_k-tém místě. Pak pro $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ je

$$\|x^{[k]} - x^{[l]}\| = \sqrt{\lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_l}^2} > \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4}} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Tedy z poslopnosti $x^{[k]}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

Naopak, nechť $\lambda_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pak pro libovolné $x = \{x_k\} \in \mathcal{E}$ platí

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \le \max_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \le \Lambda,$$

kde $\Lambda = \max_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k < \infty$, neboť posloupnost λ_n je konvergentní, tedy ohraničená. Tedy $\mathcal{E}$ je ohraničená množina. Nyní ukážeme, že je splněna i druhá podmínka z Věty 4.4. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pro libovolné $x \in \mathcal{E}$ platí podobně jako v předchozí části důkazu

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^2 \le \max_{k>N} \lambda_k^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \le \alpha_N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \le \alpha_N,$$

kde $\alpha_N = \max_{k>N} \lambda_k^2 \to 0$ pro $N \to \infty$ (jinak by neplatilo $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$). Tedy k $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové že $\alpha_n < \varepsilon$ pro $n > N$, tj. opravdu platí i druhá podmínka z Věty 4.4.

▲

Cvičení

(i) Nechť $X = C[0,1]$

$$M = \{x \in X : \ x \in C^1[a,b], \ \|x\|_{H^1} \le L\}.$$

Rozhodněte, zda M je kompaktní v $C[0,1]$.

(ii) Rozhodněte, zda tzv. *Hilbertova krychle*

$$M = \left\{ x = \{x_k\} \in l^2 : \ |x_k| \le \frac{1}{k} \right\}$$

je kompaktní v l^2.

4.2 Kompaktní operátory

Definice 4.7. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}[X,y]$. Řekneme, že operátor T je *kompaktní*, pokud T zobrazuje ohraničené množiny v X na relativně kompaktní množiny v Y (tj. množiny, jejichž uzávěr je kompaktní, alternativní terminologie je *prekompaktní množina*). Tedy pro libovolnou ohraničenou posloupnost prvků $x_n \in X$ posloupnost Tx_n v Y obsahuje konvergentní podposloupnost.

Poznámka 4.8. (i) Je-li obor hodnot $\mathcal{R}(T)$ konečně dimenzionální v Y, je spojitý lineární operátor kompaktní.
(ii) Je-li lineární operátor z X do Y kompaktní, je spojitý.
(iii) Pro nelineární operátory z kompaktnosti spojitost obecně neplyne.

Příklad 4.9. Nechť $X = Y = C[0,1]$, $K(t,s)$ je spojitá funkce na $[0,1] \times [0,1]$ $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$. Rozhodněte, zda A je kompaktní operátor.

Řešení. Nechť $K \subset C[0,1]$ je libovolná omezená množina, tj., existuje $M > 0$ takové, že $\|x\| \le M \ \forall x \in K$. Pak

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds \right| \le \max_{[t,s]} \int_0^1 |K(t,s)|\,ds \|x\|,$$

Tedy množina $A(K)$ je omezená, neboť funkce $\int_0^1 |K(t,s)|\,ds$ je spojitá a tedy omezená na $[a,b]$. Ukážeme nyní, že $A(K)$ je rovnomecně spojitý systém funkcí. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Funkce $K(t,s)$ je spojitá, tedy i stejnomerně spojitá na $[0,1]$ vzhledem k t pro $\forall s \in [0,1]$. To znamná, že k $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|t_1 - t_2| < \delta \implies K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{M}$, tedy

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le \int_0^1 |K(t_1,s) - K(t_2,s)||x(s)|\,ds \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

▲

Definice 4.10. Nechť Y je Banachův prostor s normou $\| \, \|_Y$, $X \subset Y$ je lineární podprostor v Y s normou $\| \, \|_X$ (typicky např. $X = l^p$, $1 \le p < \infty$, $Y = l^\infty$). Řekneme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y, pokud identické zobrazení $I : X \to Y$ je spojiité, tj. existuje $L \ge 0$ tak, že

$$\|x\|_Y \le L\|x\|_X \quad \text{pro } \forall x \in X,$$

píšeme $X \hookrightarrow Y$. Dále, řekneme, že prostor X je *kompaktně vnořen* do prostoru Y, pokud identické zobrazení $I : X \to Y$ je kompaktní, píšeme $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Příklad 4.11.

(i) Platí $\mathcal{L}^2(0,1) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(0,1)$. Z Cauchyovy nerovnosti plyne

$$\|x\|_{\mathcal{L}^1} = \int_0^1 |x(t)|\,dt \le \left(\int_0^1 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2} = \|x\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Tedy vnoření je spojité.

(ii) Prostor $X = C^1[a,b]$ s normou $\|f\|_X = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ je kompaktně vnořen do $C[a,b]$ s normou $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Vskutku, nechť M je omezená v $\| \, \|_{C^1}$ normě, tj. exituje $L \ge 0$ tak, že

$$|f(t)| \le L \quad \text{a} \quad |f'(t)| \le L \quad \text{pro } \forall x \in M. \tag{4.1}$$

Druhá podmínka implikuje, že funkce z M jsou rovnomocně spojité. To se dokáže takto. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Pak pro $|t_2 - t_1| < \delta$ z Lagrangeovy věty pro $\forall f \in M$

$$|f(t_2) - f(t_1)| = |f'(c)||t_2 - t_1| \le L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Omezenost množiny M plyne triviálně z první podmínky v (4.1). Prekompaktnost M v $C[a,b]$ nyní plyne z Ascoli-Arzelaovy věty.

Věta 4.12. *Nechť $A : X \to Y$ je kompaktní lineární operátor. Jestliže $x_n \rightharpoonup x$ slabě v X, Pak $Ax_n \to Ax$ v Y.*

Důkaz. Je-li $x_n \rightharpoonup x$, pak podle principu stejnoměrné omezenosti je $\{x_n\}$ ohraničená. To znamená, že $\{Ax_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost. Z druhé strany, z implikace $x_n \rightharpoonup x \implies Ax_n \rightharpoonup Ax_0$. Nyní není těžké ukázat že skutečnost, že Ax_n obsahuje konvergentní podposloupnost implikuje, že $Ax_n \to Ax_0$. ■

Věta 4.13. *Nechť X je Banachův prostor, $A, B \in \mathcal{L}[X]$ a B je navíc kompaktní. Pak složené operátory AB a BA jsou kompaktní.*

Důkaz. Operátor B převede ohraničenou posloupnost x_n na poslounost, která obsahuje konvergentní podposloupnost Bx_n a operátor A zobrazí tuto konvergentní podposloupnost na konvergentní podposloupnost. Tím je dokázána kompaktnost složení AB. Kompaktnost BA se dokáže analogicky. ∎

Důsledek 4.14. *Nechť X je nekonečně dimenzionální prostor. Je-li A kompaktní a existuje inverzní operátor, pak tento operátor není spojitý, jinak by byl kompaktní idetický operátor $I = AA^{-1}$.*

Věta 4.15. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Je-li A_n posloupnost kompaktních operátorů, pro níž $A_n \to A$. Pak limitní operátor A je také kompaktní. Jinými slovy, prostor $\mathcal{L}_c[X, Y]$ kompaktních operátorů je uzavřený v prostoru spojitých operátorů $\mathcal{L}[X, Y]$.*

Důkaz. Nechť $M \subset X$ je libovolná ohraničená množina, tj. existuje $r > 0$ takové, že $\|x\| \leq r$ pro $\forall x \in M$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. K $\frac{\varepsilon}{2r} > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq N$ je $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2r}$. Označme $A(M) = K$, $A_N(M) = K_0$. Pak množina K_0 je $\frac{\varepsilon}{2}$-ová síť v K. Vskutku, nechť $y \in K$ je libovolné a $x \in A^{-1}\{y\}$, tj. $x \in M$ a $Ax = y$. Položme $y_N = A_N x \in K_0$. Pak platí

$$\|y - y_N\| = \|Ax - A_N x\| \leq \|A - A_N\| \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože $A_N(M) = K_0$ je relativně kompaktní, existuje v ní konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-ová síť, označme ji $\tilde{K}$. Pak pro $\forall y \in M$ existuje $y_0 \in K_0$ a $\tilde{y} \in \tilde{K}$ takové, že $\|y - \tilde{y}\| \leq \|y - y_0\| + \|y_0 - \tilde{y}\| < \varepsilon$. Tedy $\tilde{K}$ je konečná ε-ová síť v $K = A(M)$, tj. K je relativně kompaktní a tedy A je kompaktní operátor. ∎

Věta 4.16. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $A : X \to Y$ je kompaktní. Pak obor hodnot $\mathcal{R}(A) \subseteq Y$ je separabilní (jako lineární prostor pod Y).*

Důkaz. Nechť

$$B_n = \{x \in X : \|x\| \leq n, \quad K_n = A(B_n)\}.$$

Pak K_n je komplaktní a tedy separabilní. Vskutku, je-li M kompaktní a M_n je její (konečná)$\frac{1}{n}$ síť, pak nejvýše spočetná množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je hustá v M. Označme T_n spočetnou hustou podmnožinu v K_n a $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Pak $\overline{T} = K$. ∎

Věta 4.17. *(Schauderova věta). Operátor $A : X \to Y$ je kompaktní, právě když adjungovaný operátor $A' : Y' \to X'$ je kompaktní.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Ukážeme, že pro množinu $K = \{f \in Y', \|f\| \leq 1\}$ je množina $A'(K)$ kompaktní. Označme $B = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pak $A(B) \subset Y$ je relativně kompaktní a pro $f \in K$ a $\forall y \in A(B)$ platí

$$|f(y)| \leq \|f\| \, \|y\| = \|f\| \, \|Ax\| \leq \|f\| \, \|A\| \, \|x\| = \|A\|.$$

Tedy funkcionály $f \in K$ jsou stejnoměrně ohraničené na $A(B)$. Dále, nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné a $y_1, y_2 \in A(B)$ jsou libovolná splňující $\|y_1 - y_2\| < \varepsilon$. Pak pro $\forall f \in K$ je

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|f\| \, \|y_1 - y_2\| < \varepsilon.$$

Odtud stejně jako v důkazu Ascoli-Arzelaovy věty (Věta 4.3) je K relativně kompaktní množina funkcí na $A(B) \subset Y$. Nyní nechť $g_n \in A'(K)$ je libovolná posloupnost, tj. $g_n = A' f_n$ pro nějaké $f_n \in K$. Odtud existuje vybraná podposloupnost f_{n_k} taková, že

$$\sup_{x \in B} \left| f_{n_k}(Ax) - f_{n_j}(Ax) \right| \to 0$$

pro $j, k \to \infty$. Odtud

$$\sup_{x\in B}\bigl|f_{n_k}(Ax) - f_{n_j}(Ax)\bigr| = \sup_{x\in B} \|(f_{n_k} - f_{n_j})(Ax)\bigr| = \sup_{x\in B} \bigl\|A' f_{n_k} - A' f_{n_j}\bigr\| \, \|x\| = \\ = \|A' f_{n_k} - A' f_{n_j}\| \to 0$$

pro $j, k \to \infty$. To znamená, že posloupnost $\{g_{n_k}\}$ je cauychovská, tedy konvergentní.
„$\Leftarrow$“: Nechť A' je kompaktní. To znamená, že $A'' : X'' \to Y''$ je také kompaktní. Označme B'' uzavřenou jednotkovou kouli v X'', pak $A''(B'')$ je kompaktní množina v Y''. Protože $A''|_X = A$ a $B'' \subset B$, platí $A(B) \subseteq A''(B'')$, přižemž $A''(B'')$ je relativně kompaktní, a tedy i $A(B)$ je relativně kompaktní. ∎

Odstavec zakončíme trojicí tvrzení, tzv. Fredholmových vět, které úzce souvisejí s následujícím odstavcem věnovaným základům spektrální teorie. Použijeme označní motivované z Hilbertových prostorů, pro množiny $M \subset X$ a $N \subset X'$ definujeme

$$M^\perp = \{f \in X' :\ f(x) = 0 \text{ pro } \forall x \in M\}, \quad {}^\perp N = \{x \in X :\ f(x) = 0 \text{pro } \forall f \in N\}.$$

Věta 4.18. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X, $\lambda \neq 0$ a K' je adjungovaný operátor ke K.*

(i) Pak operátor $K - \lambda I$ je prostý, právě když je surjektivní.

(ii) Platí

$$\mathcal{R}(K' - \lambda I) = \mathrm{Ker}\,(K - \lambda I)^\perp, \quad \mathcal{R}(K - \lambda I)^\perp = \mathrm{Ker}\,(K' - \lambda I).$$

Zejména obory hodnot $\mathcal{R}(K - \lambda)$, $\mathcal{R}(K' - \lambda)$ jsou uzavřené.

(iii) Platí

$$\dim \mathrm{Ker}\,(K - \lambda I) = \dim \mathrm{Ker}\,(K - \lambda I) < \infty.$$

Důkaz. Viz [8, str. 54–55]. ∎

4.3 Základy spektrální teorie

Nechť X je *komplexní* Banachův prostor, $T : X \to X$ je lineární (obecně ne nutně spojitý) operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(T)$ hustým v X. V dalším výkladu budeme pro stručnost psát $\lambda - T$ místo přesnějšího $\lambda I - T$, kde I je identický operátor.

Definice 4.19. Nechť $\rho(T)$ je množina těch $\lambda \in \mathbb{C}$ pro které platí:

(i) Existuje inverzní operátor $(\lambda - T)^{-1}$, tj. $(\lambda - T)x = 0 \implies x = 0$;

(ii) Operátor $(\lambda - T)^{-1}$ je spojitý, tj. existuje $c > 0$ takové, že

$$\|(\lambda - T)^{-1} x\| \le c\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}[(\lambda - T)^{-1}];$$

(iii) Obor hodnot operátoru $(T - \lambda)$ je hustý v X, tj. $\overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = X$.

Množina $\rho(T)$ se nazývá *rezolventní množina* operátoru T a její prvky se nazývají regulární hodnoty operátoru T. Množina $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ se nazývá *spektrum operátoru* T. Podle toho, která z podmínek (i) – (iii) je narušena, dělíme spektrum na *diskrétní* $\sigma_D(T)$, *spojité* $\sigma_C(T)$ a *residuální* $\sigma_R(T)$. Diskrétnímu spektru se také říká vlastní hodnoty operátoru T.

Poznámka 4.20. (i) Je-li $X = \mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$, jsou jedinými prvky spektra vlastní hodnoty.
(ii) Nechť $X = l^2$, A je operátor na X, který posloupnosti $\{x_k\}$ přiřadí posloupnost $\left\{\frac{x_k}{k}\right\}$. Pak

$$A^{-1}\big(\{y_k\}\big) = \{ky_k\},$$

tedy A^{-1} není spojitý, tj. $\lambda = 0$ je prvkem spojitého spektra $\sigma_C(A)$, $\lambda_k = \frac{1}{k}$ jsou prvky diskrétního spektra.
(iii) Nechť $X = l^2$, $T : \{x_1, x_2, \dots\} \longmapsto \{0, x_1, x_2, \dots\}$. Pak $Tx = 0 \iff x = 0$ tedy existuje $T^{-1} : \{y_1, y_2, y_3, \dots\} \longmapsto \{y_2, y_3, \dots\}$. Pro prvek $e_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$ je $\operatorname{dist}(e_1, \mathcal{R}(T)) \geq 1$, tedy $\lambda = 0$ je prvkem residuálního spektra $\sigma_R(T)$. Dále, nechť $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ je libovolné. Rovnice $(T - \lambda)x = -e_1$ má řešení $\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \dots\} \notin l^2$, je-li $|\lambda| \leq 1$, tedy $\sigma_P(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Později ukážeme, že spektrum je uzavřená podmnožina množíny $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|$. V našem případě $\|T\| = 1$, tedy

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Poznámka 4.21. Situace se *podstatně* zjednodušuje, uvažujeme-li spaktra *spojitých* operátorů z X do X. Pak vzhledem k Banachově větě (Důsledek 2.33), je-li $\lambda - T$ prostý a na, je inverzní operátor také spojitý. Tedy, v tomto případě se určení spektra oprátoru redukuje je na nalezení podmínek, kdy operátor $\lambda - T$ buď není prostý nebo není na.

V dalším výkladu používáme standardní označení $T_\lambda = \lambda - T$.

Věta 4.22. *Nechť $\mu \in \rho(T)$. Pak pro $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž*

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|T_\mu^{-1}\|},$$

platí $\lambda \in \rho(T)$. Speciálně, rezolventní množina $\rho(T)$ je otevřená a spektrum $\sigma(T)$ je uzavřená množina.

Důkaz. Nechť $x \in \mathcal{D}(T)$. Pak

$$T_\lambda x = (\lambda - T)x = (\lambda - \mu)x + (\mu - T)x = (\lambda - \mu)x + T_\mu x,$$

odtud

$$\|T_\lambda x\| \geq \|T_\mu x\| - |\lambda - \mu|\|x\|.$$

Současně

$$\|x\| = \|T_\mu^{-1} T_\mu x\| \leq \|T_\mu^{-1}\|\|T_\mu x\|.$$

Odtud

$$\|T_\mu^{-1}\|\|T_\lambda x\| \geq \|T_\mu^{-1}\|\|T_\mu x\| - |\lambda - \mu|\|T_\mu^{-1}\|\|x\| \geq (1 - |\lambda - \mu|\,\|T_\mu^{-1}\|)\|x\|$$

a další úpravou

$$\|T_\lambda x\| \geq \frac{1 - |\lambda - \mu|\|T_\mu^{-1}\|}{\|T_\mu^{-1}\|}\|x\|.$$

To znamená, že operátor T_λ^{-1} existuje a je spojitý. Podobnými úvahami lze ukázat, že z hustoty $\mathcal{R}(T_\mu)$ v X plyne hustota $\mathcal{R}(T_\lambda)$, tj. $\lambda \in \rho(T)$. Celkem tedy $\rho(T)$ je otevřená množina a její komplement je pak uzavřená množina. ∎

Následující věta ukazuje, že pro uzavřené operátory se podmínka příslušnosti do rezolventní množiny $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = X$ realizuje silnějším způsobem.

Věta 4.23. *Nechť X je Banachův prostor a $T : X \to X$ je uzavřený. Pak pro $\forall \lambda \in \rho(T)$ je*

$$\mathcal{D}((\lambda - T)^{-1}) = R(\lambda - T) = X.$$

Důkaz. Nechť $\lambda \in \rho(T)$. Pak $\overline{\mathcal{R}(\lambda - T)} = X$ a existuje $c > 0$ takové, že $\|(\lambda - T)x\| \geq c\|x\|$ pro $\forall x \in \mathcal{D}(T)$. Nechť $x_n \in X$ a předpokládejme, že $(\lambda - T)x_n \to y$. Je-li $y_n = (\lambda - T)x_n$, tj. $y_n \to y$ a ze spojitosti operátoru $(\lambda - T)^{-1}$ dostáváme

$$(\lambda - T)^{-1} y_n = x_n \to (\lambda - T)^{-1} y =: x.$$

Protože T je uzavřený, je $x \in \mathcal{D}(T)$ a $(\lambda - T)x = y$. Celkem jsem ukázali, že $y_n \in \mathcal{R}(\lambda - T)$, $y_n \to y \implies y \in \mathcal{R}(T)$, tj. $\mathcal{R}(\lambda - T)$ je uzavřený. Protože $\overline{\mathcal{R}(\lambda - T)} = X$ ($\lambda \in \rho(T)$), dostáváme požadované tvrzení. ∎

Věta 4.24. *Nechť $\lambda \in \rho(T)$ a $\mathcal{R}(\lambda - T) = X$ (tedy jsou např. splněny předpoklady předchozí věty). Označme $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$. Pak pro každé $\mu \in \rho(T)$ platí tzv. rezolventní identita*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu, \quad R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu.$$

Důkaz. Nechť $y \in X$, $x = R_\mu y$, tj. $y = T_\mu x$. Odtud

$$T_\mu x - T_\lambda x = \mu x - Tx + (\lambda x - Tx),$$

tj.,

$$y - T_\lambda x = (\mu - \lambda)x = (\mu - \lambda) R_\mu y.$$

Další úpravou dostáváme

$$y - T_\lambda R_\mu y = (\mu - \lambda) R_\mu y.$$

Aplikací operátoru R_λ na obě strany předchozí rovnosti

$$R_\lambda y - R_\mu y = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu y.$$

Protože $y \in X$ bylo libovolné, dostáváme první identita. Vztah o komutaci operátorů R_λ a R_μ obdržíme zámenou λ a μ v předchozím výpočtu. ∎

Následující tvrzení je obdobou základní věty algebry o tom, že každý polynom stupně ≥ 1 má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Věta 4.25. *Nechť X je komplexní Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}[X]$. Pak $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Kdyby $\rho(T) = \mathbb{C}$, je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathcal{L}[X]$ definovaná předpisem $x \longmapsto (\lambda - T)^{-1}$ omezená a holomorfní v celé komplexní rovině $\mathbb{C}$ a podle modifikované Liouvilleovy věty [7, str. 91] je konstantní[1]. Z druhé strany, pro $|\lambda| > \|T\|$ platí

$$\|(\lambda - T)x\| \geq |\lambda| x - \|Tx| \geq (|\lambda| - \|T\|)\|x\|$$

a odtud

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda| - \|T\|},$$

což znamená, že $(\lambda - T)^{-1} \to 0$ pro $|\lambda| \to \infty$. To vzhledem k tomu, že $(\lambda - T)^{-1}$ je konstantní, že $(\lambda - T)^{-1} = 0$ – spor. ∎

[1] Lze ukázat, že tato věta platí nejen pro zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ ale i pro zobrazení, jejichž obor hodnot je komplexní Banachův prostor.

Věta 4.26. *Nechť* $T \in \mathcal{L}[X]$. *Pak*

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}.$$

Důkaz. Důkaz využívá skutečnosti uvedené ve Větě 1.20, že pokud $\|T\| < 1$, je operátor $I - T$ invertibilní a $\|(I-T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$. Pro $|\lambda| > \|T\|$ je

$$\lambda - T = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

invertibilní a inverze je spojitý operátor. Skutečnost, že $\overline{\mathcal{R}(\lambda - T)} = X$ plyne z faktu, že

$$\left\|(\lambda - T)^{-1} y\right\| = \|\lambda \left(I - \frac{T}{\lambda} \right)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^{n-1} y \right\| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} \|y\|$$

Poslední nekonečná řada je konvergentní pro $\forall y \in X$, tj. pro $\forall y \in X$ je definováno $R_\lambda y = (\lambda - T)^{-1} y$. ■

Definice 4.27. Nechť $T \in \mathcal{L}[X]$. Spektrální poloměr operátoru je definován vztahem

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Následující věta ukazuje, že pro spektrální poloměr platí podobný vzorec jako pro poloměr konvergence mocninné řady.

Věta 4.28. *Platí vzorec*

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{4.2}$$

Důkaz. Podle Věty 1.20 pro $\lambda > \|T\|$ je $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{n-1}}{\lambda^n}$ a pro poloměr této mocninné řady v proměnné $\frac{1}{\lambda}$ platí $R = \limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Dále lze ukázat, že pro polynom $F(\lambda) = \alpha_m \lambda^n + \cdots + \alpha_0$ platí

$$\sigma(F(T)) = F(\sigma(T))$$

ve smuslu, $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $F(\lambda) \in \sigma(F(T))$. Tedy $r_\sigma(T^n) = \big(r_\sigma(T)\big)^n$. Dále platí

$$r_\sigma(T^n) \leq \|T^n\| \quad \Longrightarrow \quad \big(r_\sigma(T)\big)^n \leq \|T^n\|,$$

tedy

$$r_\sigma(T) \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \Longrightarrow \quad r_\sigma(T) \leq \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

To spolu s předchozími úvahami implikuje, že existuje $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ a tedy platí vztah (4.2). ■

4.4 Spektrum kompaktních operátorů

V tomto odstavci uvedeme několik tvrzení týkajících se spektrálních vlastností kompaktních operátorů. Tato tvrzení doplňují Větu 4.18 z Odstavce 4.2.

Věta 4.29. *Nechť* $T \in \mathcal{L}[X]$ *je kompaktní. Pak pro libovolné* $\lambda \neq 0$ *je*

$$\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda) < \infty.$$

Důkaz. Označme $Y = \{x \in X : \|x\| = 1\} \cap \operatorname{Ker} T_\lambda$. Nechť $x \in Y$, tj. $\|x_n\| = 1$ a $x_n = \lambda^{-1} T x_n$, tj., z posloupnosti x_n lze vybrat konvergentní podposloupnost (neboť $\lambda^{-1}T$ je kompaktní), což znamená, že jednotková sféra v $\operatorname{Ker} T_\lambda$ je kompaktní. To implikuje, že $\dim \operatorname{Ker} T_\lambda < \infty$. ■

Věta 4.30. *Nechť $T \in \mathcal{L}[X]$ je kompaktní $\lambda \neq 0$. Pak obor hodnot $\mathcal{R}(T_\lambda)$ je uzavřený podprostor.*

Důkaz. Sporem, předpokládejme, že $\mathcal{R}(T_\lambda)$ není uzavřený, tj., existuje $y_n = T_\lambda x_n \in \mathcal{R}(T_\lambda)$, $y_n \to y \notin \mathcal{R}(T_\lambda)$. Pak zřejmě $y \neq 0$ (neboť triviálně $0 \in \mathcal{R}(T_\lambda)$). To znamená, že $x_n \notin \operatorname{Ker} T_\lambda$ pro n dostatečně velká. Pak je vzdálenost $\varrho(x_n, \operatorname{Ker} T_\lambda) = d_n > 0$, neboť obor hodnot $\operatorname{Ker} T_\lambda$ je uzavřený podprostor podle předchozí věty. Vyberme posloupnost $u_n \in \operatorname{Ker} T_\lambda$ takovou, že $\theta_n := \|x_n - u_v| < 2d_n$. Ukážeme, že $\theta_n \to \infty$. Je-li θ_n ohraničená, obsahuje posloupnost $T(x_n - u_n)\|$ konvergentní podposloupnost. Současně ale

$$x_n - u_n = \lambda^{-1}\big[T_\lambda(x_n - y_n) + T(x_n - u_n)\big]$$

a tedy i $x_n - u_n$ obsahuje konvergentní podposloupnost konvergující k nějakému $x \in X$. Pak posloupnost $T_\lambda(x_n - u_n)$ konverguje k $T_\lambda x$ i k y. Odtud $T_\lambda x = y$, tj. $y \in \mathcal{R}(T_\lambda)$ – spor. Tj. $\theta_n \to \infty$.
Označme $v_n = \theta_n^{-1}(x_n - u_n)$. Pak $\|v_n\| = 1$ a

$$T_\lambda v_n = \frac{1}{\theta_n} T_\lambda(x_n - u_n) = \frac{1}{\theta_n} T_\lambda(x_n) \to 0,$$

neboť $T_\lambda x_n = y_n \to y$ je konvergentní a tedy omezená. Dále platí

$$v_n = \lambda^{-1}\lambda\big((\lambda - T)v_n + Tv_n\big) = \frac{1}{\lambda}(T_\lambda v_n + Tv_n).$$

Protože $\|v_n\| = 1$, obsahuje Tv_n konvergentní podposloupnost, označím ji opět v_n, $v_n \to v$ a $T_\lambda v = 0$ (neboť $T_\lambda v_n \to 0$), tj. $v \in \operatorname{Ker} T_\lambda$ a proto i $w_n := v_n + \theta_n v \in \operatorname{Ker} T_\lambda$, což znamená $d_n \leq \|x_n - w_n\|$. Současně

$$x_n - w_n = x_n - u_n - \theta_n v = \frac{\theta_n(x_n - u_n)}{\theta_n} - \theta_n v = \theta_n(v_n - v),$$

odtud

$$\|x_n - v_n\| \leq |\theta_n| \|v_n - v\| \leq 2d_n \|v_n - v\|,$$

neboť $\theta_n \leq 2d_n$. Tím jsme dostali nerovnost $1 < \|v_n - v\|$, která odporuje tomu, že $v_n \to v$. Tím jsme vyloučili i případ $\theta_n \to' \infty$. Celkem tedy obor hodnot $\mathcal{R}(T_\lambda)$ je uzavřený podprostor. ■

Věta 4.31. *Nechť $T \in \mathcal{L}[X]$ je kompaktní. Pak bodové spektrum $\sigma_P(T)$ je nejvýše spočetná množina s jediným možným hromadným bodem $\lambda = 0$.*

Důkaz. Nechť λ_k jsou prvky bodového spektra operátoru T, tj. $\exists\, x_k \neq 0$ takové, že $Tx_k = \lambda_k x_k$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou navzájem různá, pak $x_1, \dots, x_n$ jsou lineárně nezávislé prvky. To se dokáže sporem, nechť $x_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$. Pak

$$\begin{aligned} Tx_n - \lambda_n x_n =& T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1}) - \lambda_n(\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_{n-1}x_{n-1} = \\ =& \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n) + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0. \end{aligned}$$

Jsou-li $x_1, \dots, x_{n-1}$ lineárně nezávislá, nutně $\alpha_1 = 0 = \cdots = \alpha_{n-1}$, spor, neboť $x_n \neq 0$. Tedy $x_1, \dots, x_{n-1}$ jsou lineárně závislá a konstrukci můžeme opakovat až „sestoupíme“ na $n = 2$ a dostanemem konečný spor.

Nyní nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, ukážeme, že množina $\{\lambda \in \sigma_P(T) : |\lambda| > \varepsilon\}$ je konečná. Předpokládejme, že je nekonečná, tj existuje posloupnost λ_n s $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ a $Tx_n = \lambda_n x_n$ s $x_n \neq 0$. Pak $\{x_n\}$ je lineárně nezávislá množina. Označme $M_n = \mathrm{Lin}\,\{x_1, \dots, x_n\}$. Pak $M_{n-1} \subset M_n$ je uzavřený lineární podprotor v M_n a podle Rieszova lemmatu (Lemma 1.13) existuje $u_n \in M_n$, $\|u_n\| = 1$ takové, že $\|u_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall x \in M_{n-1}$. Protože $Tx_n = \lambda_n x_n$ platí i $Tx_n \in M_n$. Nyní, je-li $x \in M_n$, tj. $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, je

$$(\lambda_n - T)x = \alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1},$$

odtud $(\lambda_n - T)(M_{n-1}) \subset M_{n-1}$. To implikuje $(\lambda_n - T)u_n \in M_{n-1}$, a tedy $z := (\lambda - T)u_n + Tu_m \in M_{n-1}$ pro $1 \leq m < n$, tj. i $\frac{1}{\lambda_n} z \in M_{n-1}$. Celkem tedy

$$Tu_n - Tu_m = \lambda_n u_n - (\lambda_n u_n - Tu_n - Tu_m) = \lambda_n (u_n - \frac{1}{\lambda_n} z),$$

což znamená, že

$$\|Tu_n = Tu_m\| = |\lambda_n| \|u_n - \frac{1}{\lambda_n} z\| > \frac{\varepsilon}{2},$$

neboť $|\lambda_n| > \varepsilon$ a $\|u_n - \lambda_n^{-1} z\| > \frac{1}{2}$ protože $\lambda_n^{-1} z \in M_{n-1}$. Sestrojili jsme posloupnost $\|u_n\| = 1$ takovou, že Tu_n neosahuje konvergentní podposloupnost a to je spor. ■

Věta 4.32. *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}[X]$ je kompaktní operátor. Pak pro $\lambda \in \mathbb{R}$ má rovnice*

$$(\lambda - T)x = y$$

řešení, právě když $\varphi(y) = 0$ pro $\forall \varphi \in X'$, které je řešením rovnice $(\lambda - T')\varphi = 0$.

Důkaz. Rovnice má řešení právě když

$$y \in \mathcal{R}(T_\lambda) = \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = {}^\perp[\mathrm{Ker}\,(\lambda - T')],$$

tj. $\varphi(y) = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathrm{Ker}\,(\lambda - T')$, tj. $(\lambda - T')\varphi = 0$. Zde jsme využili znační zavedeného před Větou 4.18. ■

Literatura

[1] Z. Došlá, O. Došlý, Metrické prostory - teorie a příklady, MU, Brno, 2000.

[2] Z. Došlá, J. Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU, Brno, 2008.

[3] Z. Došlá, V. Novák, Nekonečné řady, MU, Brno 2002.

[4] P. Drábek, J. Milota, Lectures on Nonlinear Analysis, Vydavatelský servis, Plzeň, 2004.

[5] , V. Jarník, Diferenciální počet II, Academia, Praha, 1976.

[6] V. Jarník, Integrální počet II, Academia, Praha, 1976.

[7] J. Kalas, Analýza v komplexním oboru, MU, Brno, 2006.

[8] J. Lukeš, Zápisky z funkcionální analýzy, Karolinum, Praha 2002

[9] J. Lukeš, J. Malý, Míra a Integrál, Karolinum, Praha, 2002.

[10] A. N. Kolgomorov, S. V. Fomin, Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1975.

[11] M. Ráb, J. Kalas, Obyčejné diferenciální rovnice, MU, Brno, 2001.

[12] J. Šedivý a kol., Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČMF, Edice Světonázorová výchova v matematice, JČMF, Praha, 1987.

[13] A. E. Taylor, Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha 1973.

[14] G. Teschl, Topics in Real and Functional analysis, www.mat.univie.ac.at/ gerald/ftp/book-fa/fa.pdf

[15] K. Yoshida, Funcional Analysis, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1965.