

## Cvičení 4 s návodem

### Příklady na využití Poissonova rozložení

**Příklad 1.:** Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením  $Po(2)$ . Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?

**Řešení:**  $X$  – počet poruch během směny,  $X \sim Po(2)$ ,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0,8647.$$

V MATLABu:  $p = 1 - \text{poisspdf}(0,2)$

**Příklad 2.:** Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě 1 hovor, b) aspoň 2 hovory?

**Řešení:**  $X$  – počet zapojených hovorů během 4 minut =  $1/15$  hodiny,  $X \sim Po(t\lambda)$ , kde  $t = 1/15$  a  $\lambda = 15$ , tedy  $X \sim Po(1)$ .

ad a)  $P(X = 1) = e^{-1} = 0,36788$ ,

ad b)  $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 2e^{-1} = 0,264242$

V MATLABu: a)  $p = \text{poisspdf}(1,1)$ , b)  $p = 1 - \text{poisscdf}(1,1)$

**Příklad 3.:** Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů?

**Řešení:** Počítáme pravděpodobnost, že pracovník vyrobil aspoň 11 zmetků za předpokladu, že stroj je obsluhován správně.

$X$  – počet vyrobených zmetků za týden,  $X \sim Bi(5000, 0,001)$ . Při splnění podmínek dobré aproximace lze rozložení veličiny  $X$  aproximovat rozložením  $Po(5)$ .

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{t=0}^{10} \frac{5^t}{t!} e^{-5} = 1 - 0,9863 = 0,0137.$$

Je zřejmé, že nový pracovník nepracuje správně.

V MATLABu:  $p = 1 - \text{poisscdf}(10,5)$

Přesný výpočet v MATLABu:  $p = 1 - \text{binocdf}(10,5000,0.001)$

**Příklad 4.:** Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevel. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevel.

Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:

a) nebude žádný plevel,

b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevel,

c) vyrostou aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevel.

**Řešení:**  $X$  – počet rostlin plevel na jednotce plochy,  $X \sim Po(4)$

Ad a)  $P(X = 0) = e^{-4} = 0,0183$

V MATLABu:  $p = \text{poisspdf}(0;4)$

Ad b)  $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 \frac{4^x}{x!} e^{-4} = 0,4335$

V MATLABu:  $p = \text{poisscdf}(3;4)$

Ad c)  $P(5 \leq X \leq 7) = \sum_{x=5}^7 \frac{4^x}{x!} e^{-4} = 0,32$

V MATLABu:  $p = \text{poisscdf}(7;4) - \text{poisscdf}(4;4)$

**Příklad 5.:** V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% přibližný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.

**Řešení:**

Meze  $100(1-\alpha)\%$  přibližného empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu  $\lambda$  jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

V našem případě  $m = 225/30$ ,  $n = 30$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $u_{1-\alpha/2} = u_{0,95} = 1,64$

$$d = \frac{225}{30} - \sqrt{\frac{225}{30^2}} 1,64 = 6,68,$$

$$h = \frac{225}{30} + \sqrt{\frac{225}{30^2}} 1,64 = 8,32$$

Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.

V MATLABu:

$$d=225/30-15/30*\text{norminv}(0.95,0,1)$$

$$h=225/30+15/30*\text{norminv}(0.95,0,1)$$

## Práce se systémem MATLAB

**Úkol 1.:** Na výrobní lince se zhruba každé dvě hodiny vyskytne porucha. Sestrojte tabulku uvádějící, s jakou pravděpodobností se na této lince během osmihodinové pracovní směny nevyskytne žádná porucha, vyskytne jedna porucha, vyskytnou dvě poruchy atd. až vyskytne deset poruch. S jakou pravděpodobností nastane více než deset poruch? Určete nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny.

### Řešení:

X - počet poruch během osmi hodin,  $X \sim \text{Po}(t\lambda)$ , kde  $t = 4$  a  $\lambda = 1$ , tedy  $X \sim \text{Po}(4)$ .

$$P(X = 0) = \pi(0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = 0,0183$$

$$P(X = 1) = \pi(1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 0,0733$$

.....

$$P(X = 10) = \pi(10) = \frac{4^{10}}{10!} e^{-4} = 0,0053$$

Přehledný zápis všech výsledků je v následující tabulce (včetně hodnot distribuční funkce). Všimněte si, že ačkoli jsme samozřejmě nevyčerpali všechny možné počty poruch (těch je nekonečně mnoho), dosahuje součet všech vypočtených pravděpodobností téměř 1. Najdeme ho jako hodnotu distribuční funkce  $\Phi(10)=0,9972$  a jde o pravděpodobnost, že počet poruch bude nejvýše deset. Celková pravděpodobnost, že by byl počet poruch naopak větší než deset, je tedy  $1-\Phi(10)$  a činí pouze necelá tři promile ( $1-0,9972 = 0,0028$ ).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(n)$	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053
$\Phi(n)$	0,0183	0,0916	0,2381	0,4335	0,6288	0,7851	0,8893	0,9489	0,9786	0,9919	0,9972

Nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny je tři až čtyři (protože parametr Poissonova rozložení je v našem případě přirozené číslo, budou módy existovat dva).

### Návod pro MATLAB:

```
x=[0:10]';  
pf=poisspdf(x,4);  
df=poisscdf(x,4);  
[x pf df]
```

Grafické znázornění:

```
plot(x,pf,'o')  
figure  
stairs(x,df)
```

(Samostatný úkol: Jak nakreslit graf distribuční funkce bez svislých čar?)

Jedno z možných řešení:

```
hold on  
for i=1:(length(x)-2) plot([i,i],[0,1],'w'); end
```

**Úkol 2.:** Pro  $n = 30$  a  $\vartheta = 0,1$  ilustруйте aproximaci binomického rozložení  $Bi(n, \vartheta)$  Poissonovým rozložением  $Po(n\vartheta)$ . Vypočtené hodnoty obou pravděpodobnostních funkcí v bodech  $x = 0, 1, \dots, 30$  zapište do tabulky a znázorněte graficky.

**Návod:**

```
x=[0:1:30]';  
pf1=binopdf(x,30,0.1);  
pf2=poisspdf(x,3);  
[x pf1 pf2]  
plot(x,pf1,'o',x,pf2,'*')
```

**Úkol 3.:** Vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s rozložением  $Po(2)$  a nakreslete jejich histogram.

**Návod:**

```
r=poissrnd(2,100,1);  
hist(r,x)
```

**Úkol 4.:** Odhadněte střední hodnotu a vypočtete meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu na základě proměnné  $r$  z předešlého úkolu. (Hodnoty uložené v proměnné  $r$  považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 100 z rozložení  $Po(2)$ .)

**Návod:**

```
[m,meze]=poissfit(r)
```

Upozornění: MATLAB počítá meze intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu  $\lambda$  podle vzorce:

$$d = \frac{1}{2n} \chi^2_{\alpha/2}(2nm), \quad h = \frac{1}{2n} \chi^2_{1-\alpha/2}(2(nm+1)),$$

nikoliv podle vzorce  $d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$ ,  $h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$ , který využívá aproximaci

Poissonova rozložení normálním rozložением.