

Cvičení 5

Příklady na testování exponenciálního a Poissonova rozložení

Teoretická část

I. Test dobré shody

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z rozložení s distribuční funkcí $\Phi(x)$.

Testová statistika $K = \sum_{j=1}^r \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$ se za platnosti nulové hypotézy asymptoticky řídí

rozložením $\chi^2(r-p-1)$, kde p je počet odhadovaných parametrů daného rozložení.

Přitom

n_j je absolutní četnost j -tého třídícího intervalu pro veličinu X resp. j -té varianty veličiny X ,
 np_j je teoretická četnost j -tého třídícího intervalu pro veličinu X resp. j -té varianty veličiny X .
Platí-li nulová hypotéza, pak $p_j = \Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j)$ resp. $p_j = \Phi(x_{[j]}) - \lim_{x \rightarrow x_{[j]}^-} \Phi(x) = P(X = x_{[j]})$.

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-p-1), \infty \rangle$.

Jestliže $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α .

Aproximace se považuje za vyhovující, když $np_j \geq 5$, $j = 1, \dots, r$.

Při nesplnění podmínky $np_j \geq 5$, $j = 1, \dots, r$ je třeba některé intervaly resp. varianty slučovat.

II. Jednoduchý test exponenciálního rozložení (Darlingův test)

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z exponenciálního rozložení.

Testová statistika $K = \frac{(n-1)S^2}{M^2}$, která se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

Přitom M je výběrový průměr a S^2 je výběrový rozptyl daného náhodného výběru.

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty \rangle$.

Jestliže $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α .

III. Jednoduchý test Poissonova rozložení

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z Poissonova rozložení.

Testová statistika $K = \frac{(n-1)S^2}{M}$, která se v případě platnosti H_0 asymptoticky řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

Přitom M je výběrový průměr a S^2 je výběrový rozptyl daného náhodného výběru.

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty \rangle$.

Jestliže $K \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α .

Příklad 1.: V systému hromadné obsluhy byla sledována doba obsluhy 70 zákazníků (v min). Výsledky jsou uvedeny v tabulce rozložení četností:

Doba obsluhy	Počet zákazníků
(0, 3]	14
(3,6]	16
(6,9]	10
(9,12]	9
(12,15]	8
(15,18]	5
(18,21]	3
(21,24]	5

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že daný náhodný výběr pochází z exponenciálního rozložení. Použijte:

- test dobré shody,
- Darlingův test exponenciálního rozložení

Výsledek:

Ad a)

Testová statistika $K = 6,6178$, kritický obor $W = \langle 9,4877, \infty \rangle$, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout H_0 .

Ad b)

Testová statistika $K = 35,7265$, kritický obor $W = \langle 0;47,9242 \rangle \cup \langle 93,8565, \infty \rangle$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad 2.: Na jistém nádraží byl sledován počet přijíždějících vlaků za 1 h. Pozorování bylo prováděno celkem 15 dnů (tj. 360 h) a výsledky jsou uvedeny v tabulce:

Počet vlaků za 1 hodinu	0	1	2	3	4	5	6	7 a víc
četnost	27	93	103	58	50	21	6	2

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že počet přijíždějících vlaků za 1 h se řídí Poissonovým rozložením, a to

- testem dobré shody,
- jednoduchým testem Poissonova rozložení.

Výsledek:

Ad a)

Testová statistika $K = 9,5892$, kritický obor $W = \langle 11,0705, \infty \rangle$, na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout H_0 .

Ad b)

Testová statistika $K = 3331,1304$, kritický obor: $W = \langle 0,308,4 \rangle \cup \langle 413,4, \infty \rangle$.

H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.