Cvičení 6

Následující dva příklady vyřešte pomocí funkcí tds_poiss.m resp. tds_exp.m a darling.m.

Příklad 1.: Za 2. světové války byl Londýn bombardován řízenými střelami. Jeho jižní část byla rozdělena na oblasti o ploše 0,25 km^2 a bylo zkoumáno, kolik řízených střel dopadlo na každou z těchto oblastí.

Počet střel	0	1	2	3	4 a víc
Počet oblastí	229	211	93	35	8

Na asymptotické hladině významnosti testujte hypotézu, že počet řízených střel, které dopadly na jednu oblast, se řídí Poissonovým rozložením. Úkol vyřešte
a) pomocí testu dobré shody,
b) pomocí jednoduchého testu Poissonova rozložení.

Výsledky:
Ad a) Test dobré shody
Odhad parametru λ … 0,9271
Realizace testové statistiky … K = 1,0301
p-hodnota = 0,794
Protože p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o Poissonově rozložení nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Ad b) Jednoduchý test Poissonova rozložení
Odhad parametru λ … 0,9271
Realizace testové statistiky … K = 572,6966
p-hodnota = 0,9614
Protože p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o Poissonově rozložení nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad 2.: Bylo zkoumáno 43 automobilů téže značky a měřena vzdálenost (v tisících km), kterou ujely, než se vyskytla první vážná porucha:

5	48	7	30	15	18	7	1	15	90	25	17	32
3	2	27	19	16	74	9	8	11	12	21	8	9
58	14	24	12	1	5	13	69	23	4	10	3	2
83	6	10	5									

Na asymptotické hladině významnosti testujte pomocí Darlingova testu hypotézu, že počet km se řídí exponenciálním rozložením. Jaká je střední hodnota počtu ujetých kilometrů do první vážné poruchy?

Výsledek Darlingova testu
Odhad parametru λ … 0,0024
Realizace testové statistiky … K = 51,8457
p-hodnota = 0,2839
Protože p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o exponenciálním rozložení nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.
Střední hodnota počtu ujetých kilometrů do první vážné poruchy je 410 298.

Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1-\rho)$, j = 0, 1, …

Počet N zákazníků ve stabilizovaném systému se tedy řídí rozložením $\mathrm{Ge}(1-\rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

Střední hodnota doby obsluhy: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku = $1-\frac{\lambda}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě = $\frac{\lambda}{\mu}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému poskytne funkce neomezeny_1.m

```
function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi ........ parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
```

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte

a) využití ortopeda

b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat

c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému

d) střední hodnotu počtu pacientů v systému.

Řešení: $\lambda = 2, \mu = 3, \rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ad a) Ortoped je využit na 66,6 %.

Ad b) Pravděpodobnost, že pacient nebude čekat: $a_0 = 1 - \rho = 0,\overline{3}$

Ad c) $E(W) = 1$ h, dále $E(W_Q) = 40$ min, $E(W_S) = 20$ min

Ad d) $E(N) = 2$ osoby, dále $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$ osoby, $E(N_S) = \frac{2}{3}$ osoby

Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=2;mi=3;
[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
```

Příklad 2.: Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 minuty. Obsluha trvá v průměru 1 minutu. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úkoly:

a) Na kolik % je pokladna využita?

b) Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě?

c) Jaká je střední hodnota doby pobytu v systému, ve frontě a doby obsluhy? Jaká je střední hodnota počtu zákazníků v systému, ve frontě, u pokladny?

Výsledek: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Pokladna je využita na 50 %.

Ad b) Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě, je 0,5.

Ad c) $E(W) = 2$ min, $E(W_Q) = 1$ min, $E(W_S) = 1$ min

Ad d) $E(N) = 1$ osoba, $E(N_Q) = 0,5$ osoby, $E(N_S) = 0,5$ osoby

Příklad 3.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:

a) Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě?

b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti?

c) Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.)

Řešení:

Jde o systém M/M/1/∞/FIFO.

$\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{3}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ad a) Pravděpodobnost čekání = $\rho = 0{,}75$

Ad b)

$$P(N > 3) = 1 - P(N \leq 3) = 1 - a_0 - a_1 - a_2 - a_3 = 1 - \sum_{j=0}^{3} (1-\rho)\rho^j = 1 - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^j = 0{,}3164$$

Ad c) $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 12\,\text{min}$.

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{\beta^j}{n!\,n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2, \dots \end{cases}$, kde $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

Charakteristiky stabilizovaného systému poskytne funkce neomezeny_n.m

```
function[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi);
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
%
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|n|Inf|FIFO.
%
% Vstupní parametry:
% n ......... počet linek obsluhy,
% lambda .... parametr vstupního proudu,
% mi ........ parametr obsluhy
%
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu (využití systému)
% PQ ........ pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
```

Příklad 4.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte

a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta

b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů

c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Řešení: n = 2, $\lambda = \frac{3600}{80} = 45, \mu = \frac{1}{\frac{2,5}{60}} = \frac{600}{25} = 24, \beta = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{15}{16} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

ad a) $$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{15}{8} + \frac{2\left(\frac{15}{8}\right)^2}{2\left(2 - \frac{15}{8}\right)}\right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31} = 0{,}0323$$

$$a_2 = \frac{\beta^2}{2!} a_0 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} = \frac{225}{3968} = 0{,}0567$$

ad b) $$E(N_S) = n\rho = 2\frac{15}{16} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

ad e)

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{1}{31} \cdot \frac{\frac{225}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{225}{248}$$

$$E(W) = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{225}{248} \cdot \frac{\frac{15}{16}}{\left(1 - \frac{15}{16}\right) \cdot 45} + \frac{1}{24} = \frac{32}{93} = 0{,}344\,\text{h} = 20 \text{ min } 38 \text{ s}$$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=45;mi=24;n=2;
[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
```

Příklad 5.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování jednoho požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

a) Může se systém stabilizovat?

b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?

c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny_n.m.

Výsledek:

Ad a) Systém se může stabilizovat.

Ad b) Průměrný počet požadavků čekajících na zpracování je 3,51.

Ad c) Průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování, činí 24 min.