Cvičení 9

Optimalizace systémů hromadné obsluhy (s neomezenou kapacitou)

1. Systém M/M/1/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Známe náklady c_1 na obsluhu jednoho požadavku a náklady c_2 na údržbu prázdného systému za jednotku času. Hledáme intenzitu obsluhy μ tak, aby funkce nákladů a ztrát

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

nabývala svého minima. Vzhledem k tomu, že systém musí být schopen se stabilizovat (tj. $\lambda < \mu$), je minima dosaženo pro $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$.

Optimální intenzitu obsluhy a hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální intenzitu počítá funkce opt_neomezeny_1.m.

Příklad 1.: Na konci montážní linky se nachází pracoviště kontroly kvality, které se skládá z prostoru na čekání palet a zkušebního pracoviště. Průměrně přichází 80 palet v průběhu osmihodinové směny. Doba mezi příchody palet má exponenciální rozložení a doba kontroly rovněž. Náklady na kontrolu jedné palety činí 100 Kč, prostojové náklady jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu kontroly jedné palety a najděte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.
Výsledek: 5 minut, tedy za 1 h by se mělo zkontrolovat 12 palet. Funkce nákladů a ztrát nabývá hodnoty 1400.

Příklad 2.: V dílně dochází v průměru ke třem poruchám strojů za hodinu, přičemž se jedná o poissonovský proud. Prostojové náklady stroje jsou 1000 Kč/h. Můžeme volit mezi průměrným opravářem, který opravuje 4 stroje za 1 h a stojí i režií 500 Kč/h a zkušeným opravářem, který opravuje 5 strojů ze 1 h a stojí i s režií 650 Kč/h. V obou případech předpokládáme, že doba opravy se řídí exponenciálním rozložením. Kterého opraváře je výhodnější přijmout?
Výsledek: Funkce nákladů a ztrát pro průměrného opraváře nabývá hodnoty 5000, pro zkušeného opraváře 4750, je tedy výhodnější přijmout zkušeného opraváře.

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ. Známe náklady c_1 na čekajícího zákazníka za jednotku času a náklady c_2 na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek n tak, aby kriteriální funkce

$$C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$$

nabývala svého minima.

Přitom $E(N_Q) = P_Q \dfrac{\rho}{1-\rho}$, $P_Q = a_0 \dfrac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \dfrac{a_n}{1-\rho}$, $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \dfrac{\beta}{n}$,

$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{\beta^j}{j!} + \dfrac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$, $E(N_S) = n\rho$. Podmínka stabilizace: $n > \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Optimální počet linek a hodnotu kriteriální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce opt_neomezeny_n.m.

Příklad 3.: V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace se sporožirovým účtem 3 přepážky. Klienti, kteří do pobočky přicházejí kvůli těmto operacím, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že v průměru přichází 68 klientů za hodinu, přičemž intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro odbavení klienta je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s. Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky činí 300 Kč/h, najděte optimální počet přepážek.

Výsledek:

n	C(n)
3	1050,2
4	485,53
5	708,69

Optimální jsou 4 přepážky.

Příklad 4.: Začínající softwarová firma může očekávat 4 objednávky za měsíc. Charakter objednávek je takový, že programátor je schopen vyřešit za měsíc průměrně 2 objednávky. Měsíční náklady na provizorní řešení, kdy zákazník čeká na konečné řešení, jsou 50 000 Kč. Nemá-li programátor práci, dostává základní plat 10 000 Kč z rezervního fondu firmy. V případě, že programátor má objednávku, je základní plat plus výkonnostní příplatek zcela pokryt z ceny objednávky. Za předpokladu, že vstupní proud objednávek je Poissonův proces a doba práce na zakázce se řídí exponenciálním rozložením, zjistěte, jaký je optimální počet programátorů.

Výsledek:

n	C(n)
3	54444
4	28696
5	31990

Optimální jsou 4 programátoři.